Prácticas de Cálculo

Práctica 1. "Funciones de una Variable Real"

En esta práctica se introducen los conceptos de función y dominio. También se aborda el dibujo de curvas en coordenadas explícitas, implícitas, paramétricas y polares. Por último se estudiará con diversos ejemplos el concepto de límite y continuidad de una función.

Funciones reales de variable real

Las funciones se definen en *Mathematica* de la siguiente forma:

f[x_] := x^2 + 3 x - 5

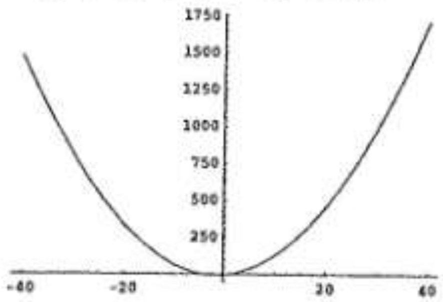
y podemos obtener la imagen de cualquier elemento de su dominio:

```
f[0]
f[-157]
f[t]
```

```
-5
24173
-5 + 3 t + t^2
```

El comando Plot nos permite conocer su gráfica en un intervalo determinado:

```
Plot[f[x], {x, -40, 40}];
```



Dominio

Para obtener el dominio de una función será necesario en algunos casos resolver inecuaciones. Para ello necesitaremos cargar un paquete específico:

```
<< Algebra`InequalitySolve`
```

Así pues, dada una función

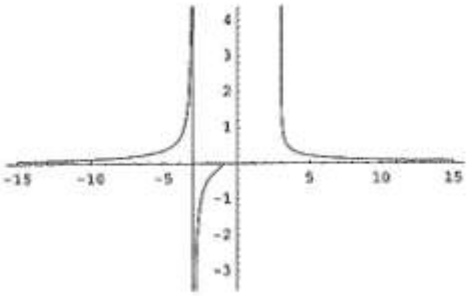
$$f[x\_] := \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x^2 - 9}$$

averigüemos su dominio:

InequalitySolve[x^2 - 2 x - 3 >= 0, x]

$x \leq -1 \,||\, x \geq 3$

```
Plot[f[x], {x, -15, 15}]
```



Representación de curvas

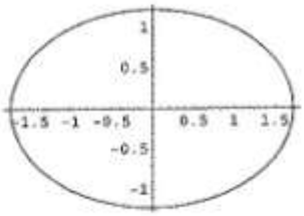
El comando Plot permite representar curvas en coordenadas explícitas.

En el caso de curvas expresadas en implícitas debemos cargar un nuevo paquete:

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
```

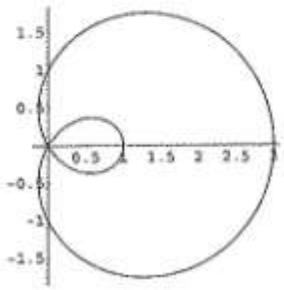
Podemos obtener la elipse:

```
ImplicitPlot[x^2 + 2 y^2 == 3, {x, -2, 2}, AspectRatio -> Automatic];
```



La cardioide:

```
ImplicitPlot[x^4 - 4 x^3 + 3 x^2 + 2 x^2 y^2 == y^2 + 4 x y^2 - y^4, {x, -1, 3},
  AspectRatio -> Automatic];
```



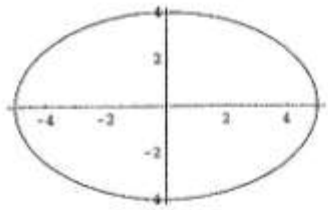
Las coordenadas paramétricas permiten definir curvas considerando el siguiente esquema:

x=f(t)

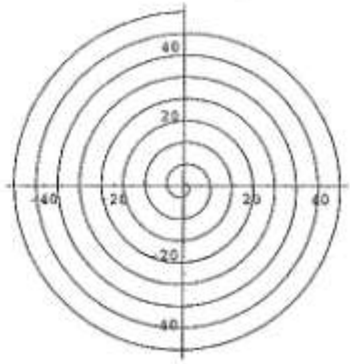
y=g(t)

donde t es un parámetro que varía en cierto intervalo [t1,t2].

```
ParametricPlot[{5 Sin[t], 4 Cos[t]}, {t, 0, 2 π}];
```



```
ParametricPlot[{t Sin[t], t Cos[t]}, {t, 0, 16 π}, AspectRatio → Automatic];
```



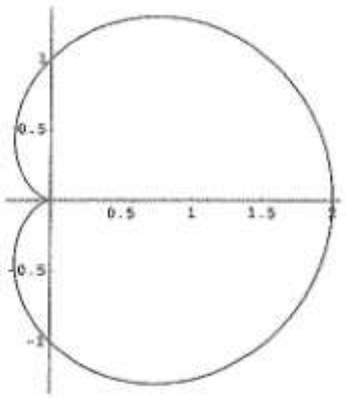
En ocasiones son muy útiles las coordenadas polares, que representan el plano utilizando los valores ρ y θ. En este caso tenemos:

$x=\rho \cos\theta$

$y=\rho \operatorname{sen}\theta$

donde θ es el ángulo en $(0, 2\pi]$ y ρ es el radio . Por ejemplo, la cardioide ρ=f(θ)=1+Cos[θ] podría representarse como:

```
ParametricPlot[{(1 + Cos[θ]) * Cos[θ], (1 + Cos[θ]) * Sin[θ]},
  {θ, 0, 2 π}, AspectRatio -> Automatic];
```

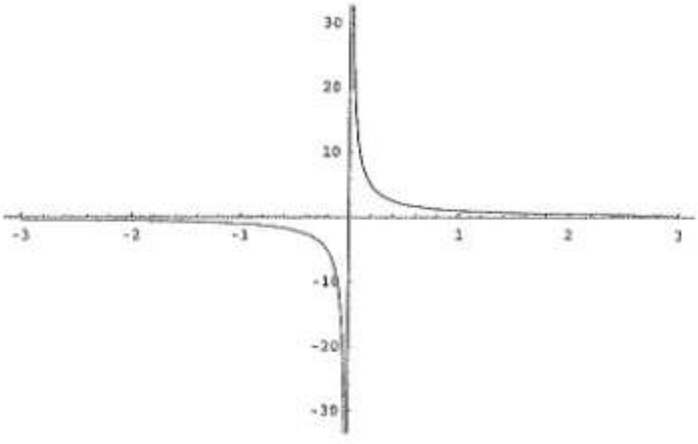


Simetrías

Una función se dice *par* si es simétrica respecto al eje Y, es decir, *f(-x)=f(x)*. Una función se dice *impar* si es simétrica respecto al origen, es decir, *f(-x)=-f(x)*.

La siguiente es una función impar e inyectiva

```
Plot[1 / x, {x, -3, 3}]
```



Una forma de comprobar si una función *f(x)* es par o impar es aplicar la sustitución de *x* por *-x* mediante la regla:

```
regla = {x -> -x}
```
$\{x \to -x\}$

```
Exp[x] /. regla
```
E^{-x}

```
Sin[x] /. regla
```
-Sin[x]

```
Cos[x] /. regla
```
Cos[x]

```
Sinh[x] /. regla
```
-Sinh[x]

```
Cosh[x] /. regla
```
Cosh[x]

```
Log[Cos[x]] - Cos[x] /. regla
```
-Cos[x] + Log[Cos[x]]

$x\,(4 - x^2)$ `/. regla`

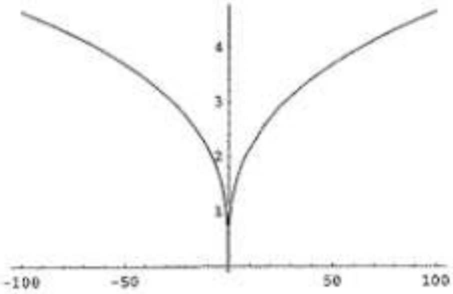
$-x\,(4 - x^2)$

$\sqrt[3]{x}$ `/. regla`

$(-x)^{1/3}$

`Plot[{`$\sqrt[3]{x}$`, %}, {x, -100, 100}]`

Plot::plnr : $x^{1/3}$ is not a machine-size real number at x = -100..



Otra alternativa es utilizar comandos de *Mathematica*. La función **FuncionParQ** devuelve **True** si la función es par y **False** en caso contrario.

```
FuncionParQ[func_, var_] := TrueQ[func - (func /. var -> -var) == 0]
```

```
FuncionParQ[Cos[x],x]
```
True

```
FuncionParQ[x^3/y^2,y]
```
True

```
FuncionParQ[x^3/y^2,x]
```
False

La función **FuncionImparQ** devuelve **True** si la función es impar y **False** en caso contrario.

```
FuncionImparQ[func_,var_]:= TrueQ[func+ (func /. var->-var) ==0]
```

```
FuncionImparQ[Sin[x],x]
```
True
```
FuncionImparQ[x^3/y^2,x]
```
True
```
FuncionImparQ[x^3/y^2,y]
```
False

Hay funciones que no son pares ni impares

```
FuncionParQ[Exp[x],x]
```
False
```
FuncionImparQ[Exp[x],x]
```
False

Funciones inversas

Los siguientes ejemplos muestran la forma de calcular la inversa de una función dada:

Funcion f(x)=2x+1

```
f[x_] := 2 x + 1
Solve[x == f[y], y]
```
$\{\{y \to \frac{1}{2}\ (-1 + x)\}\}$

$$g[x\_] := \frac{1}{2}\ (-1 + x)$$

```
g[f[x]]
```
x
```
f[g[x]]
```
x

Funcion f(x)=$\sqrt{3\ x + 2}$

```
Clear[f, g, y]
f[x]
```
f[x]

$$f[x\_] := \sqrt{3\ x + 2}$$

```
Solve[x == f[y], y]
```
$\{\{y \to \frac{1}{3}\ (-2 + x^2)\}\}$

$$g[x\_] := \frac{1}{3}\ (-2 + x^2)$$

```
g[f[x]]
```
x
```
f[g[x]]
```
$\sqrt{x^2}$

Límites y continuidad

Mathematica nos permite calcular límites de funciones. Previamente cargaremos el paquete adecuado:

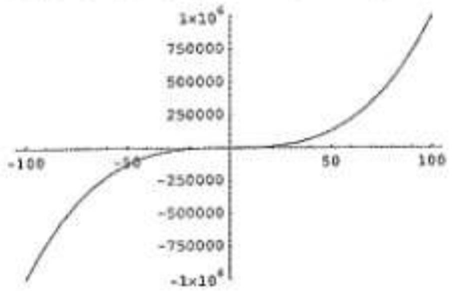
```
<< Calculus`Limit`
```

Dada la función

```
f[x_] := x^3;
```

observando su gráfica parece que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

```
Plot[f[x], {x, -100, 100}, PlotRange -> {-10^6, 10^6}];
```



Podemos diseñar una tabla de valores y estudiar la evolución de la función:

```
TableForm[Table[{x, f[x]}, {x, 0, 100, 0.5}],
 TableHeadings -> {None, {"x\n", "f[x]\n"}}]
```

Directamente, podemos calcular su límite cuando x→100

```
Limit[f[x], x → 100]
```

```
1000000
```

y cuando x→∞

```
Limit[f[x], x → ∞]
```

∞

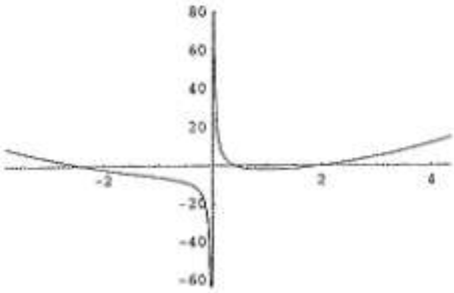
Una función y=f(x) es continua en un punto x_0 si :

está definida en dicho punto
existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$
$\lim_{x\to x_0} f(x)$=f(x_0)

Estudiemos lo que ocurre con la siguiente función cerca del punto x=0.

$$p[x\_] := \frac{x^3 - 5x + 2}{x}$$

```
Plot[p[x], {x, -10, 10}];
```



Claramente se ve que no es continua en x=0. Dicho punto no pertenece a su dominio. Además:

```
x = 10^-k; TableForm[Table[{x, p[x]}, {k, 1, 5}]] // N
```

0.1	15.01
0.01	195.
0.001	1995.
0.0001	19995.
0.00001	199995.

```
x = -10^-k; TableForm[Table[{x, p[x]}, {k, 1, 5}]] // N
```

-0.1	-24.99
-0.01	-205.
-0.001	-2005.
-0.0001	-20005.
-0.00001	-200005.

```
Clear[x]
```

Límite lateral por la derecha:

```
Limit[p[x], x -> 0, Direction -> -1]
```

∞

Límite lateral por la izquierda:

```
Limit[p[x], x -> 0, Direction -> 1]
```

$-\infty$

En este ejercicio se trata de calcular los límites de la función

$$\mathbf{f[x\_] := \frac{Abs[x]}{Sin[x]}}$$

en el punto $x=0$:

```
Limit[f[x], x → 0]
```

1

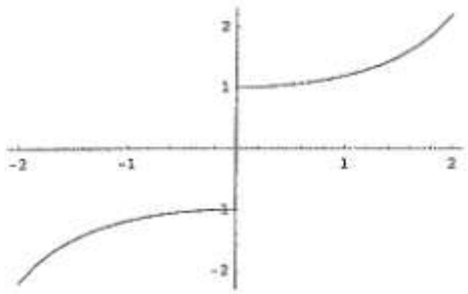
```
Limit[f[x], x → 0, Direction -> -2]
```

1

```
Limit[f[x], x → 0, Direction -> 2]
```

-1

```
Plot[f[x], {x, -2, 2}]
```



Ejemplos de cálculos de límites:

$$\mathbf{Limit\left[\frac{x + Sin^2[x]}{x - Sin^2[x]}, x \to \infty\right]}$$

$$\mathrm{Limit}\left[\frac{x + \mathrm{Sin}^2[x]}{x - \mathrm{Sin}^2[x]}, x \to \infty\right]$$

```
Limit[x^(1/x), x → ∞]
```

1

```
Limit[(Sin[2 x]/x)^(1/x), x → 0]
```

∞

```
Limit[Exp[x] (1 - Exp[Sin[x] - x])/(x - Sin[x]), x → 0]
```

1

```
Limit[Log[Cos[a x]]/Log[Cos[b x]], x → 0]
```

$\frac{a^2}{b^2}$

```
Limit[((a^x - 1) Log[1 - x^2])/(((1 - x^2)^n - 1) ArcSin[x]), x → 0]
```

$\frac{\text{Log}[a]}{n}$

Ejercicios

- Obtener el dominio de las siguientes funciones

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+4}}$

$f(x)=\frac{x+1}{Sin[x](x-1)}$

$f(x)=Log[(7-x^2)(x^2+1)]$

$f(x)=\sqrt{\frac{x-6}{x^2-4x+1}}$

$f(x)=Log\left[\frac{x-6}{x^2-4x+1}\right]$

$f(x)=\sqrt{Log\left[\frac{x-6}{x^2-4x+1}\right]}$

- Obtener la gráfica de la circunferencia de centro (5,2) y radio 3, en coordenadas implícitas, paramétricas y polares.

- Estudiar analitica y gráficamente los siguientes límites

$lim_{x\to 0}\ e^{1/x}$
$lim_{x\to 0}\ Sin[\frac{1}{x}]$
$lim_{x\to \infty}\ (1+\frac{1}{x})^x$

- Estudiar la continuidad de $f(x)=\frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$ y de $g(x)=\frac{e^{1/x^2}}{1+e^{1/x^2}}$