Práctica 3. "Cálculo Integral"

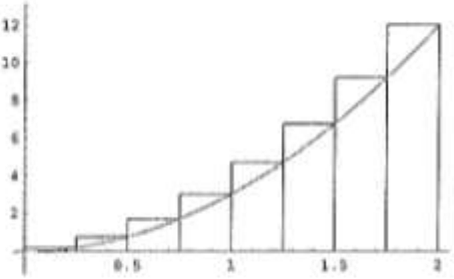
En esta práctica se trata de ilustrar el concepto de integral de Riemann mediante la aproximación del área encerrada por una curva y el eje OX, por suma de rectángulos superiores e inferiores. Se abordará también el cálculo de integrales definidas y su aplicación a la obtención de longitudes de curvas, áreas de figuras planas, volúmenes de revolución y áreas de superficies de revolución.

Interpretación geométrica de la integral

El paquete Area.m permite calcular la suma de las áreas de un conjunto de rectángulos tomados a partir de una partición del intervalo (a,b). AreaR[f,a,b,n] calcula el área superior, mientras que AreaL[f,a,b,n] calcula el área inferior.

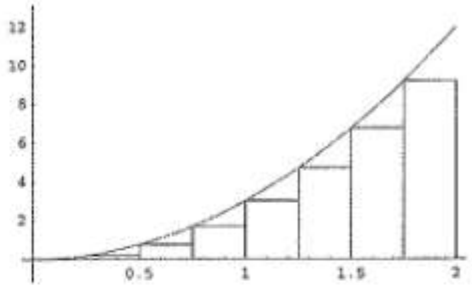
```
<< "c:\\Area.m"
```

```
f[x_] := 3 x^2;
AreaR[f, 0, 2, 8]
```




```
9.5625
```

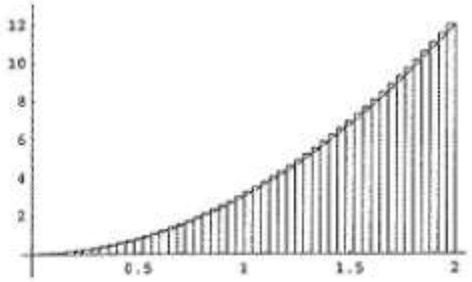
AreaL[f, 0, 2, 8]



6.5625

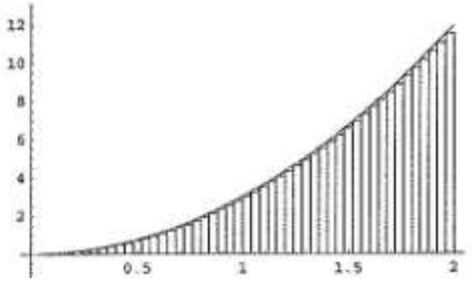
De lo anterior vemos que el área A encerrada por la función $f(x)=3\,x^2$ y el eje OX en el intervalo (0,2) cumple que:
$6.56 < A < 9.56$. Si disminuimos el diámetro de la partición conseguiremos acotar mejor el valor.

AreaR[f, 0, 2, 50]



8.2416

AreaL[f, 0, 2, 50]



7.7616

De lo anterior tenemos que: $7.76 < A < 8.24$
En los ejemplos anteriores se ha calculado el área por exceso y por defecto asociadas a dos particiones del intervalo (0,2), una de ocho y otra de cincuenta subintervalos. En el primer caso, el diámetro de la partición es 2/8, mientras que en el segundo es 2/50. La integral de Riemann se define como el límite de esas áreas cuando el diámetro de la partición, d, tiende a cero. Cuando los límites por exceso y por defecto no coinciden se dice que la función no es integrable.

AreaR[f, 0, 2, 1000]
AreaL[f, 0, 2, 1000]

8.012

7.988

AreaR[f, 0, 2, 10000]
AreaL[f, 0, 2, 10000]

8.0012

7.9988

El comando Integrate de *Mathematica* permite obtener el valor de esta integral.

```
Integrate[f[x], {x, 0, 2}]
```

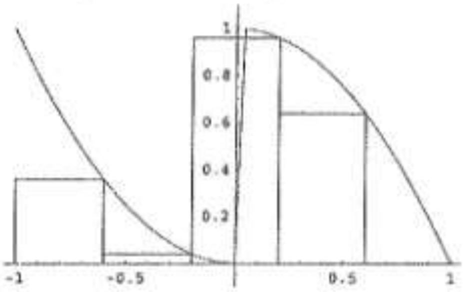
8

Definimos una función que tiene una discontinuidad de salto en el punto 0. La función es de la forma:

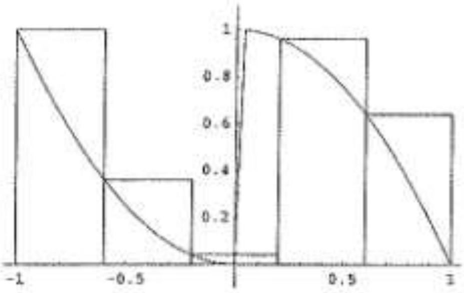
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<0 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad x>=0 \end{cases}$$

Para definir esta función, podemos utilizar el comando If de *Mathematica* de la siguiente forma:

```
f[x_] := If[x < 0, x^2, 1 - x^2]
AreaR[f, -1, 1, 5]
AreaL[f, -1, 1, 5]
```



0.8



1.2

```
AreaR[f, -1, 1, 100]
AreaL[f, -1, 1, 100]
```

1.

1.02

```
Integrate[f[x], {x, -1, 1}]
```

1

Cálculo de primitivas e integrales definidas

El comando Integrate de *Mathematica* permite obtener la primitiva de una función:

```
Integrate[ArcTan[x], x]
```

$x \operatorname{ArcTan}[x] - \frac{1}{2} \operatorname{Log}[1 + x^2]$

y NIntegrate, el valor numérico de una integral definida:

$\texttt{Integrate}[3^x, \{x, 1, 5\}]$

$\frac{240}{\operatorname{Log}[3]}$

```
NIntegrate[3^x, {x, 1, 5}]
```

218.457

En ocasiones, el resultado de la integral inmediata no está escrito en la forma esperada:

```
Integrate[(x^3)^(1/5), x]
```

$\frac{5}{8}\, x\, (x^3)^{1/5}$

y es necesario reagrupar las potencias de la variable:

```
PowerExpand[%]
```

$\frac{5\, x^{8/5}}{8}$

En otras ocasiones, se manipula la forma de escribir la respuesta basándose en las propiedades del logaritmo:

```
Integrate[(3 x^2 + 2 x) / (x^3 + x^2), x]
```

2 Log[x] + Log[1 + x]

```
Integrate[Exp[Log[x]] / x, x]
```

x

```
Integrate[x Sin[x^2 + 1], x]
```

$-\frac{1}{2}$ Cos[$1 + x^2$]

```
Integrate[x^2 / Sqrt[1 - (x^3 - 1)^2], x]
```

$-\frac{1}{3}$ ArcSin[$1 - x^3$]

```
Integrate[2 / (3 x + 1), x]
```

$\frac{2}{3}$ Log[1 + 3 x]

```
Integrate[(1 - x^2) Sqrt[x], x]
```

$\frac{2\, x^{3/2}}{3} - \frac{2\, x^{7/2}}{7}$

```
Integrate[8 x^2 / (x^3 - 2)^3, x]
```

$-\frac{4}{3\, (-2 + x^3)^2}$

Integrales impropias

Integrate[$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, {x, a, Infinity}]

If[$a > 0$, $\frac{2}{\sqrt{a}}$, $\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx$]

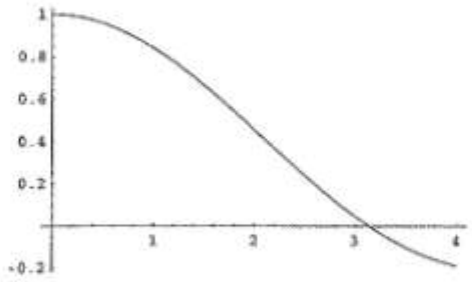
Integrate[$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, {x, -a, a}]

If[$a > 0$, π, $\int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$]

Integrate[$E^{-b x}$, {x, a, Infinity}]

If[$a > 0$ && Re[b] > 0, $\frac{E^{-a b}}{b}$, $\int_a^\infty E^{-b x}\, dx$]

```
Integrate[Sin[x] / x, {x, 0, 4}]
SinIntegral[4]
N[%]
1.7582
Plot[Sin[x] / x, {x, 0, 4}]
```



```
- Graphics -
```

$$\text{Integrate}\left[\frac{1}{\text{x Log[x]}}, \{\text{x, E, Infinity}\}\right]$$

Integrate::idiv : Integral of $\frac{1}{\text{x Log[x]}}$ does not converge on {E, ∞}.

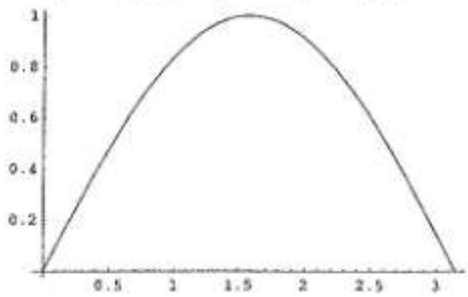
$$\int_E^\infty \frac{1}{\text{x Log[x]}}\,dx$$

```
Integrate[Log[x] / Sqrt[x], {x, 0, 1}]
-4
Integrate[Cos[x] / x, {x, 1, Infinity}]
-CosIntegral[1]
N[%]
-0.337404
```

Aplicaciones de la integral definida. Areas de curvas planas

Cuando una curva viene dada en coordenadas cartesianas en forma explícita, y=f(x), resulta sencillo calcular el área que encierra la curva, en un intervalo dado.

```
Plot[Sin[x], {x, 0, π}];
```



$$\int_0^\pi \text{Sin[x]}\,dx$$

2

Para calcular el área encerrada por una función que toma valores positivos y negativos, es necesario considerar el valor absoluto de la misma, en caso contrario llegaríamos a resultados erróneos:

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{Sin[x]}\, dx$$

0

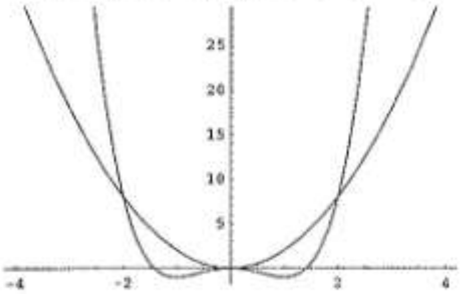
En este caso, el valor del área vendría dado por :

$$\int_0^{\pi} \mathbf{Sin[x]}\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\mathbf{Sin[x]}\, dx$$

4

De forma similar, el área encerrada por dos curvas habría de calcularse en base a la integral del valor absoluto de su diferencia. Por ejemplo:

```
f[x_] = x^4 - 2 x^2;
g[x_] = 2 x^2;
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -4, 4}];
```



En este caso, hemos de calcular los puntos de corte de ambas curvas:

```
Solve[f[x] == g[x], x]
```

{{x → -2}, {x → 0}, {x → 0}, {x → 2}}

Teniendo en cuenta la simetría de la curva, se tiene:

$$2 * \left(\int_0^{2} (\mathbf{g[x]} - \mathbf{f[x]})\, dx + \int_2^{4} (\mathbf{f[x]} - \mathbf{g[x]})\, dx\right)$$

256

Un ejemplo muy útil en muchas ocasiones son las coordenadas polares,
que representan el plano utilizando las coordenadas ρ y θ. En este caso tenemos,

$x = \rho$ Cos[θ]

$y = \rho$ Sin[θ]

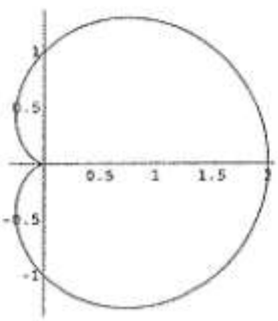
donde θ es el ángulo en $(0,2\pi]$ y ρ es el radio.

En el caso particular de coordenadas polares, se tiene:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta 1}^{\theta 2} f^2(\theta)\, d\theta$$

Por ejemplo, la cardioide, ρ=f(θ)=1+Cos[θ], podría representarse mediante:

```
ParametricPlot[{(1 + Cos[θ]) * Cos[θ], (1 + Cos[θ]) * Sin[θ]},
  {θ, 0, 2 π}, AspectRatio -> Automatic];
```



```
2 * (1/2 ∫_0^π (1 + Cos[θ])^2 dθ)
```

$\frac{3\pi}{2}$

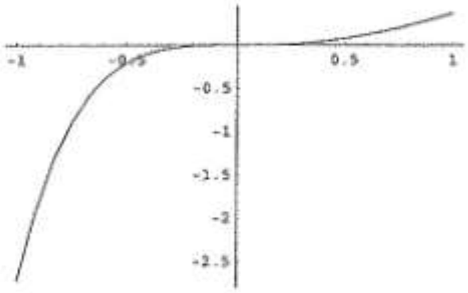
Longitudes de curvas

Para una funcion f de clase C^1 en [a ,b] la longitud de dicha curva de ecuacion cartesiana y=f(x) entre los puntos de coordenadas cartesianas (a ,f(a)) , (b, f(b)) viene determinada por :

$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

```
f[x_] = x^3 e^-x;
```

```
Plot[f[x], {x, -1, 1}, PlotRange -> All];
```




```
NIntegrate[Sqrt[1 + (f'[x])^2], {x, -1, 1}]
```

4.23868

En el caso de una curva dada en coordenadas polares ρ =f(θ), la longitud del arco de curva comprendido entre $\theta=\alpha$ y $\theta=\beta$ es

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2}\, d\theta$$

En el caso de la curva cardioide ρ=f(θ)=1+Cos[θ],

```
f[θ_] := 1 + Cos[θ];
```

```
NIntegrate[√((f[θ])^2 + (f'[θ])^2), {θ, 0, 2π}]
```

8.

Volúmenes de revolución

Si la curva viene dada en coordenadas cartesianas (x,y), el volumen del cuerpo engendrado al girar la región plana limitada por la curva y=f(x), positiva y continua en [a,b], el eje OX, y las rectas x=a, x=b, alrededor de OX es:

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\, dx$$

Dada la curva y=Sin[x] entre 0 y π, el volumen del cuerpo engendrado al girar dicha curva alrededor del eje OX viene dado por:

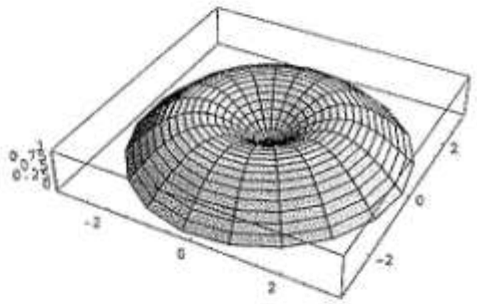
```
π NIntegrate[Sin[x]^2, {x, 0, π}]
```

4.9348

Hemos obtenido el volumen del sólido:

```
<<Graphics`SurfaceOfRevolution`
```

```
SurfaceOfRevolution[Sin[x], {x, 0, π}];
```



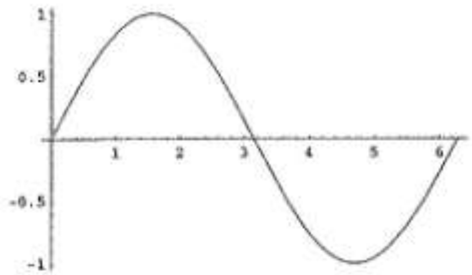
Áreas de superficies de revolución

Si la curva viene dada en coordenadas cartesianas (x,y), el área de la superficie de revolución engendrada por la curva y=f(x) al girar alrededor del eje OX entre a y b resulta ser:

$$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

El área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva y=Sin[x] alrededor del eje OX entre los puntos de abcisa x=0 y x=2π resulta ser:

```
Plot[Sin[x], {x, 0, 2 π}];
```



```
2 π NIntegrate[ Abs[Sin[x]] Sqrt[1 + Cos[x]^2], {x, 0, 2 π}]
28.8472
```

Ejercicios

- Calcular el valor de las integrales de Riemann de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

  $f(x)=\frac{x}{x+1}$ en (0,10)

  $f(x)=\frac{x}{x+1}$ en (-2,2)

  $f(x)=\begin{cases} -x & \text{si} \quad x \\ x & \text{si} \quad x>=0 \end{cases}$ en (-1,1)

- Obtener las siguientes integrales indefinidas:

  $$\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\, dx$$

  $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$$

  $$\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

- Calcular el área del recinto que determinan la curva $y=x^3-6x^2+8x$ y el eje OX.

- Calcular el volumen y el área de la superficie del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva y=Chx alrededor del eje OX en el intervalo [0,1]. Dibujar el cuerpo.