Práctica 4. "Series de Potencias y de Fourier"

En esta práctica se introducen los conceptos de desarrollo en serie de potencias y desarrollo en serie de Fourier, de una función dada. Mediante una serie de ejemplos prácticos se tratará de que el alumno entienda el concepto de convergencia, en cada uno de los casos, y se familiarice intuitivamente con este tipo de técnicas.

Práctica 4. "Series de Potencias y de Fourier"

En esta práctica se introducen los conceptos de desarrollo en serie de potencias y desarrollo en serie de Fourier, de una función dada. Mediante una serie de ejemplos prácticos se tratará de que el alumno entienda el concepto de convergencia, en cada uno de los casos, y se familiarice intuitivamente con este tipo de técnicas.

Series de Potencias

Como primer ejemplo, aplicamos la fórmula del desarrollo de McLaurin para obtener una aproximación de la función exponencial en un entorno del origen:

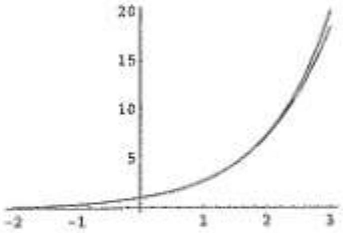
$$f(x) \approx f(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i}(0)}{i!} x^i$$

```
f[x_] := e^x;
n = 5;
```

$$s[x\_] = f[0] + \sum_{i=1}^{n} \frac{D[f[x], \{x, i\}] \,/.\, x \to 0}{i\,!} * x^i$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

```
Plot[{f[x], s[x]}, {x, -2, 3}]
```



```
? Series
```

```
Series[f, {x, x0, n}] generates a power series expansion for f about the
  point x = x0 to order (x - x0)^n. Series[f, {x, x0, nx}, {y, y0,
  ny}] successively finds series expansions with respect to y, then x.
```

```
Series[e^x, {x, 0, 5}]
```

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+O[x]^6$$

Intentemos resolver ahora un problema más complicado. Se busca una solución de la ecuación diferencial: *f'[x] - f[x] = 0.* Para ello, se supone que *f[x]* admite un desarrollo en series de potencias. Se consideran los 5 primeros términos de esta serie, cuyos coeficientes habrá que calcular.

```
y = 1 + Sum[a[i] x^i, {i,5}]+ O[x]^6
```

$$1+a[1]\,x+a[2]\,x^2+a[3]\,x^3+a[4]\,x^4+a[5]\,x^5+O[x]^6$$

```
ecu=D[y,x] - y == 0
```

$$(-1+a[1])+(-a[1]+2\,a[2])\,x+(-a[2]+3\,a[3])\,x^2+(-a[3]+4\,a[4])\,x^3+(-a[4]+5\,a[5])\,x^4+O[x]^5==0$$

```
sol = Solve[ecu]
```

$$\left\{\left\{a[1]\to 1,\ a[2]\to\frac{1}{2},\ a[3]\to\frac{1}{6},\ a[4]\to\frac{1}{24},\ a[5]\to\frac{1}{120}\right\}\right\}$$

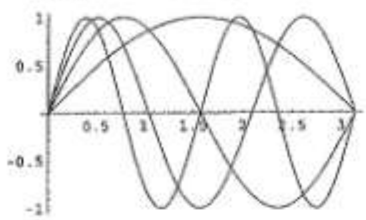
```
y /. sol
```

$$\left\{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+O[x]^6\right\}$$

Series de Fourier

En las series de Fourier, la familia de funciones elementales para desarrollar una función dada ya no son funciones potenciales, sino funciones trigonométricas de períodos distintos, de la forma:

```
Plot[{Sin[x], Sin[2 x], Sin[3 x], Sin[4 x]}, {x, 0, π}]
```

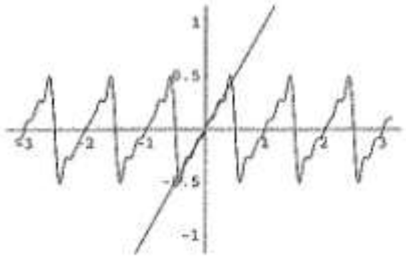


```
<<Calculus`FourierTransform`
```

```
f[x_]=FourierTrigSeries[x,x,5]
```

$$\frac{\mathrm{Sin}[2\pi x]}{\pi}-\frac{\mathrm{Sin}[4\pi x]}{2\pi}+\frac{\mathrm{Sin}[6\pi x]}{3\pi}-\frac{\mathrm{Sin}[8\pi x]}{4\pi}+\frac{\mathrm{Sin}[10\pi x]}{5\pi}$$

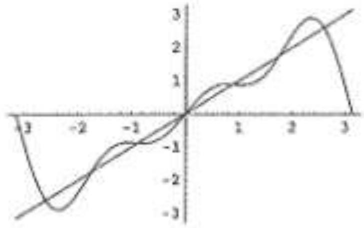
```
Plot[{f[x],x},{x,-π,π}]
```




```
f[x_] = FourierTrigSeries[x, x, 3, FourierParameters → {-1/(2 π), 1/(2 π)}] // Simplify
```

$\frac{2}{3}$ (4 - 3 Cos[x] + 2 Cos[2 x]) Sin[x]

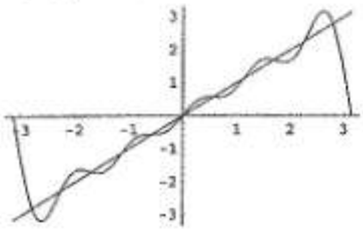
```
Plot[{f[x],x},{x,-π,π}]
```




```
f[x_] = FourierTrigSeries[x, x, 5, FourierParameters → {-1/(2 π), 1/(2 π)}] // Simplify
```

$\frac{1}{15}$ (46 - 45 Cos[x] + 32 Cos[2 x] - 15 Cos[3 x] + 12 Cos[4 x]) Sin[x]

```
Plot[{f[x],x},{x,-π,π}]
```



Ejercicios

- Obtener un desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones y dibujar la función original y su aproximación en un entorno del punto dado:

  $f(x)=e^x$, en x=1.

  $f(x)$=Sin[x], en x=0 y en x=π.

  $f(x)$=Cos[x], en x=0 y en x=π.

- Encontrar una solución para la siguiente ecuación diferencial utilizando desarrollos en serie:

  $f'[x]^2 - f[x]^2 = 1$

- Calcular el desarrollo en serie de Fourier de la función f[x]=x^2, considerando 2, 5 y 10 términos.