

ENDOMORFISMOS Y DIAGONALIZACIÓN.

En lo que resta de este tema, nos centraremos en un tipo especial de aplicaciones lineales: los endomorfismos.

Definición: Endomorfismo.

Se llama endomorfismo a una aplicación lineal $f: V \longrightarrow V$, en que el espacio inicial y final son el mismo.

La matriz de un endomorfismo es cuadrada $n \times n$, donde n es la dimensión de V .

ENDOMORFISMOS BIYECTIVOS

Observemos que un endomorfismo ha de ser inyectivo y suprayectivo a la vez, o bien ninguna de las dos cosas.

Esto se obtiene de la fórmula $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = n$ (siendo n la dimensión del espacio V).

Notemos que si el primer sumando es n (suprayectiva), el segundo ha de ser 0 (inyectiva), y viceversa.

Teorema: Caracterización de los endomorfismos biyectivos.

Sea $f: V \longrightarrow V$ y sea A su matriz asociada.

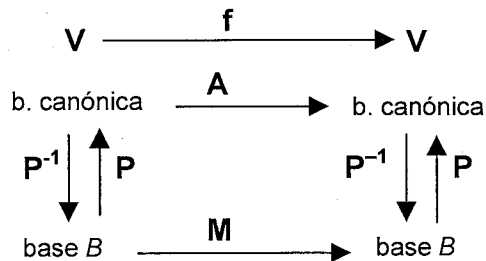
Las siguientes propiedades son todas equivalentes, es decir, si se cumple una, se cumplen todas las demás:

- f es biyectiva
- f es inyectiva
- f es suprayectiva
- $\text{rg}(f) = n$
- $\text{rg}(A) = n$
- $\det(A) \neq 0$
- f transforma bases en bases
- 0 no es valor propio (más adelante se verá el significado de esto último)

Ejemplos de endomorfismos biyectivos (es decir, que cumplen todo lo anterior) son las aplicaciones ya vistas: giros, simetrías y homotecias.

SEMEJANZA DE MATRICES

Cuando aplicamos a endomorfismos el concepto de “matriz en distintas bases”, visto para aplicaciones lineales, utilizaremos siempre la misma base B en el espacio inicial y final:



- A es la matriz de f en base canónica
- P es la matriz de cambio de base: de la base B a la canónica
- M es la matriz de f en base B

Entonces, $M = P^{-1} A P$

Esto nos lleva a la siguiente

Definición: Matrices semejantes.

Se dice que dos matrices cuadradas A y B son semejantes si son matrices del mismo endomorfismo en distintas bases.

También se puede expresar así: A y B son semejantes si existe una matriz cuadrada inversible P tal que $B = P^{-1} A P$.

- Notar que el concepto de equivalencia de matrices es más amplio que el de semejanza. Si dos matrices son semejantes entonces son equivalentes, pero no al revés.

En este tema se tratará de ver, dada una matriz, **si existe otra matriz semejante a ella que sea diagonal**: $P^{-1} A P = D$, y en ese caso calcular la diagonal D y la matriz de paso P .

En otras palabras: dado un endomorfismo, trataremos de encontrar una base en la cual la matriz del endomorfismo sea sencilla (diagonal si es posible).

Para ello se utilizarán los **valores y vectores propios**.

VALORES Y VECTORES PROPIOS.

En un endomorfismo, dado que el espacio inicial y el final son el mismo, podemos comparar un vector v con su imagen $f(v)$, y ver si es múltiplo suyo.

Definición.

Si un vector v (no nulo) cumple que su imagen es múltiplo suyo, es decir, si

$$f(v) = \lambda v$$

con λ escalar, se dice que v es un vector propio (o autovector) de f , y que λ es su valor propio (o autovalor) asociado.

Además, si λ es un valor propio, todos sus vectores propios asociados forman un subespacio. Se llama subespacio propio asociado a λ , y se denota por V_λ .

Ejemplos.

1) En una homotecia $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ todos los vectores son vectores propios, y su valor propio es 2, ya que cualquier vector v queda transformado en $2v$.

$$(x,y) \mapsto (2x, 2y)$$

2) Consideremos una simetría respecto al plano XZ, $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \mapsto (x, -y, z)$$

- Observar que los vectores de la forma $(\alpha, 0, 0)$ quedan transformados en sí mismos (es decir, multiplicados por 1). Por tanto 1 es valor propio, con vectores propios los de la forma $(\alpha, 0, 0)$

- De igual modo son vectores propios los de la forma $(0, 0, \beta)$, también con valor propio 1.

- Observar que los vectores de la forma $(0, \gamma, 0)$ quedan transformados en $(0, -\gamma, 0)$, es decir, multiplicados por -1 . Por tanto -1 también es valor propio, con vectores propios los de la forma $(0, \gamma, 0)$.

3) En un giro de 45° , $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ no hay valores ni vectores propios, ya que ningún vector queda transformado en un múltiplo de sí mismo.

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right)$$

Propiedades.

1. Los valores propios de A son los mismos que los de su traspuesta.
2. Los valores propios de una matriz diagonal o triangular, son sus elementos diagonales.
3. Si los valores propios de A son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ entonces los de A^k son $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$.
4. Si los valores propios de A son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ entonces los de αA son $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$.
5. Si los valores propios de A son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y si A tiene inversa, entonces los valores propios de A^{-1} son $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$.

Cálculo de los valores y vectores propios.

¿Cómo encontrar escalares λ y vectores v que verifiquen $f(v) = \lambda v$?

Veámoslo con un ejemplo.

Sea $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $(x,y) \mapsto (3x+2y, y)$

La búsqueda de vectores propios parte de la ecuación $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, es decir, $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

Por tanto planteamos la ecuación $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, que es $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Esto también podemos escribirlo como $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

para poder pasar todo al miembro izquierdo,

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{que es una ecuación equivalente a la primera, } f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}, \text{ es decir,}$$

los vectores $\mathbf{v}=(\mathbf{x},\mathbf{y})$ no nulos que la verifiquen, serán vectores propios, y los λ serán los valores propios.

Para la mayoría de los valores de λ , este sistema será compatible determinado (rango 2), y por tanto no tendrá más soluciones que $x=0, y=0$. Estos valores de λ no son valores propios.

Sin embargo, para algunos valores de λ , el sistema será compatible indeterminado y por tanto existirán soluciones no nulas del sistema: es decir, vectores no nulos tales que $f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$.

Estos valores de λ , que hacen el sistema compatible indeterminado, son los valores propios. Las soluciones \mathbf{v} de este sistema para cada λ , son los vectores propios.

¿Cuándo el sistema será compatible indeterminado? Esto ocurrirá cuando la matriz del sistema tenga determinante nulo. Planteamos entonces

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

es decir $(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$

lo que se cumple sólo para los valores $\lambda=1, \lambda=3$. Estos son los valores propios.

Ahora calculamos los vectores propios resolviendo el sistema $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

para $\lambda=1$ y para $\lambda=3$, (el sistema ha de ser compatible indeterminado)

$\lambda=1$:

El sistema es $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuya solución son los vectores $(\alpha, -\alpha)$.

Por tanto, estos son los vectores propios de valor propio 1. El subespacio que forman es V_1 . Una base de V_1 es $(1, -1)$.

$\lambda=3$:

El sistema es $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuya solución son los vectores $(\mu, 0)$.

Por tanto, estos son los vectores propios de valor propio 3. El subespacio que forman es V_3 . Una base de V_3 es $(1, 0)$.

Escribamos esto para cualquier matriz A cuadrada, de dimensión n .

Método general para calcular los valores y vectores propios :

1. Calcular el determinante $\det(A - \lambda I)$, que será un polinomio de grado n , en la indeterminada λ . Se llama **polinomio característico** de A .

El polinomio característico también se puede definir como $\det(\lambda I - A)$.

2. Hallar sus raíces. Estos serán los valores propios.

3. Para cada valor propio λ , resolver el sistema $(A - \lambda I) \vec{x} = \vec{0}$ (compatible indeterminado), la solución será el subespacio propio asociado a λ .

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Partimos de A , la matriz de un endomorfismo f en base canónica.

Nuestro propósito era encontrar otra base, en que la matriz de f fuese diagonal. Pues bien,

Si B es una base formada por vectores propios, la matriz en base B es diagonal.

Veámoslo con el ejemplo anterior:

Hemos encontrado los vectores propios $u=(1,-1)$ y $v=(1,0)$, correspondientes a los dos valores propios. Con estos dos vectores, como son linealmente independientes, se forma una base de \mathbb{R}^2 , $B=\{(1,-1), (1,0)\}$.

Hallemos la matriz de f en esta base y comprobaremos que efectivamente es diagonal.

Recordemos la definición de la matriz de f en base B (la misma base en el espacio inicial y final):

Hay que poner en las columnas las imágenes de los vectores de la base B , expresadas en coordenadas respecto de la base B .

Ahora bien, sabemos que los vectores de la base, u y v , son vectores propios: por tanto conocemos su imagen, que es un múltiplo suyo.

$$f(u) = 1 \cdot u \quad (\text{ya que } u \text{ es vector propio de valor propio } 1).$$

$$f(v) = 3 \cdot v \quad (\text{ya que } v \text{ es vector propio de valor propio } 3).$$

Ahora hay que expresar estas imágenes en coordenadas respecto de la misma base B , es decir, expresarlas como combinación lineal de u y v . Es fácil:

$$f(u) = 1 \cdot u \quad \text{se expresa como } 1 \cdot u + 0 \cdot v \quad \rightarrow \text{coordenadas } (1,0) \quad \rightarrow \text{1}^{\text{a}} \text{ columna } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

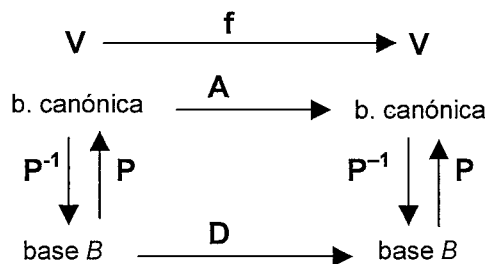
$$f(v) = 3 \cdot v \quad \text{se expresa como } 0 \cdot u + 3 \cdot v \quad \rightarrow \text{coordenadas } (0,3) \quad \rightarrow \text{2}^{\text{a}} \text{ columna } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así ya podemos formar la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, que efectivamente es diagonal.

Los elementos de la diagonal son precisamente los valores propios, 1 y 3 en este caso.

Además se cumplirá el siguiente esquema:

$$\boxed{P^{-1} A P = D}$$



donde:

- A es la matriz de f en base canónica, que ya conocíamos: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es la diagonal de los valores propios.
- P es la matriz de cambio de la base **B** a la canónica; por tanto tendrá en sus columnas los vectores de **B** expresados en base canónica:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{es decir, } P \text{ tiene en sus columnas los vectores propios } \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Planteándolo en general,

Diagonalizar una matriz cuadrada A es encontrar una diagonal D semejante a A.

Interpretando A como la matriz de un endomorfismo f, se trata de encontrar una base en la cual la matriz de f sea una diagonal D.

Para ello tendremos que hallar los valores y vectores propios de f. Así,

- La diagonal D será la diagonal de los valores propios.
- La base en cuestión será la base formada por los vectores propios.
- Poniendo los vectores propios en columna, se obtiene P tal que $P^{-1} A P = D$.

Pero atención: esto no es posible para todas las matrices. Si la construcción anterior es posible, diremos que **A es diagonalizable**.

Para ver si A es diagonalizable, habrá que ver si se puede formar la base de vectores propios. Es decir, habrá que ver si, uniendo las bases de los distintos subespacios propios, "hay suficientes vectores" como para formar con ellos una base del espacio total V.

Y esto ocurrirá si la suma de las dimensiones de los subespacios propios es igual a la dimensión total.

$$\boxed{A \text{ es diagonalizable} \Leftrightarrow \dim(V_{\lambda_1}) + \dots + \dim(V_{\lambda_r}) = n}$$

Veamos cómo hallar esas dimensiones.

Dimensión de los subespacios propios:

Observemos que V_λ es el subespacio solución de un sistema compatible indeterminado, cuya matriz es $A - \lambda I$.

Por tanto, la dimensión del espacio solución (es decir, el número de parámetros del sistema) es igual al número de incógnitas menos el rango de la matriz del sistema:

$$\dim(V_\lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda I)$$

También nos pueden ayudar los siguientes resultados: La dimensión de V_λ ,

- a) no puede ser cero,
- b) está comprendida entre 1 y la multiplicidad de λ en el polinomio característico:

$$1 \leq \dim(V_\lambda) \leq \text{mult}(\lambda)$$

(Nota. La "multiplicidad" de a en un polinomio es el exponente con que aparece el factor $(x-a)$. Por ejemplo, en $(x-4)^3(x+5)$, la raíz 4 tiene multiplicidad 3, y la raíz -5 tiene multiplicidad 1).

Esto es útil para los λ de multiplicidad 1, pues $\dim(V_\lambda)$ está comprendida entre 1 y 1, por tanto es $\dim(V_\lambda)=1$ sin tener que calcular el rango de la matriz.

Método general para diagonalizar matrices.

Dada una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$, o equivalentemente el endomorfismo f en \mathfrak{R}^n :

A) Ver si es diagonalizable.

- 1) Calcular el polinomio característico y hallar los valores propios.
- 2) Para cada valor propio λ , calcular la dimensión del subespacio propio V_λ .
- 3) Sumar las dimensiones de todos los V_λ . Si la suma es n , la matriz (o el endomorfismo) es diagonalizable. En caso contrario no es diagonalizable, y hemos terminado.

B) Diagonalizar, en el caso de que sea diagonalizable.

- 1) Hallar los vectores propios, resolviendo el sistema correspondiente para cada valor propio.
- 2) Hallar una base de cada subespacio propio, y unir las todas para formar una base de vectores propios del espacio total \mathfrak{R}^n .
- 3) La matriz P es la que contiene en sus columnas la base de vectores propios.
- 4) La matriz D es la diagonal de los valores propios.

Para que D sea $n \times n$ se necesitarán n valores propios, así que en la diagonal habrá que repetir cada valor propio λ tantas veces como indique $\dim(V_\lambda)$. Además ha de respetarse un mismo orden al colocar los valores propios en D , y los vectores propios en las columnas de P .

- 5) Todo lo anterior garantiza que se cumple $P^{-1} A P = D$, lo cual es la diagonalización de A .

Ejemplos.

1) Veamos si es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

El polinomio característico es $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18$ que factoriza como $(\lambda-2)(\lambda-3)^2$. Por tanto, sus raíces son $\lambda=2$ (simple) $\lambda=3$ (doble).

Estos son los valores propios.

Para ver si es diagonalizable, hallemos las dimensiones de los subespacios V_2, V_3 :

$$\dim(V_2) = 3 - \text{rg}(A-2I) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

(o también, $\dim(V_2)=1$ directamente porque $\lambda=2$ tiene multiplicidad 1)

$$\dim(V_3) = 3 - \text{rg}(A-3I) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

La suma de ambas dimensiones es $1+1=2$, no es igual a la dimensión total 3.

Por tanto, **A no es diagonalizable.**

2) Veamos si es diagonalizable el siguiente endomorfismo: $\mathfrak{R}^3 \xrightarrow{f} \mathfrak{R}^3$
 $(x,y,z) \mapsto (x-4y, -y, 2y+z)$

Ello se refiere a diagonalizar la matriz de f en base canónica, $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Para ver si es diagonalizable, hallamos sus valores propios. El polinomio característico es

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Valores propios: $\lambda=1$ doble, $\lambda=-1$ simple.

Como $\lambda=-1$ es simple (multiplicidad 1), ya sabemos que $\dim(V_{-1}) = 1$. Hallemos $\dim(V_1)$.

$$\dim(V_1) = 3 - \text{rg}(A - I) = 3 - \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

La suma de ambas dimensiones es $1+2 = 3$, la dimensión del espacio total \mathfrak{R}^3 .

Por tanto, **A** (o el endomorfismo **f**) **es diagonalizable**.

Para diagonalizar, calculamos los subespacios propios, resolviendo los sistemas

$(A - \lambda I) \vec{x} = \vec{0}$ para $\lambda = 1$ y para $\lambda = -1$.

$\lambda = 1$:

El sistema es $(A - I) \vec{x} = \vec{0}$, es decir,
$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{solución } (\alpha, 0, \beta)$$

Base de V_1 : $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ (notar que efectivamente se obtiene un espacio de dimensión 2)

$\lambda = -1$:

El sistema es $(A + I) \vec{x} = \vec{0}$, es decir,
$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{solución } (2\gamma, \gamma, \gamma)$$

Base de V_{-1} : $\{(2,1,1)\}$ (notar que efectivamente es un espacio de dimensión 1)

Así pues, la base de vectores propios se forma uniendo las bases de V_1 y V_{-1} :

$$B = \{(1,0,0), (0,0,1), (2,1,1)\}$$

Poniendo esta base en columnas se obtiene la $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Y la diagonal se forma con los valores propios 1 doble y -1 simple: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(Notar que ha de respetarse un mismo orden al colocar los valores y los vectores propios).

Así pues, la diagonalización es $P^{-1} A P = D$, es decir,

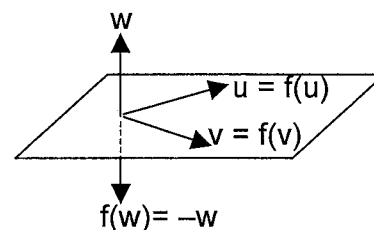
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Compruébese la igualdad. Puede hacerse fácilmente, viendo que $AP=PD$).

La interpretación geométrica de este ejemplo es la siguiente: eligiendo una base adecuada, la base $B = \{u, v, w\}$ de vectores propios, el endomorfismo **f** toma una forma "sencilla":

- el primer vector de la base, al aplicarle f queda como está (es de valor propio 1) : $f(u) = u$
- lo mismo para el segundo, v , también de valor propio 1 : $f(v) = v$
- el tercero, w , queda convertido en su opuesto (es de valor propio -1): $f(w) = -w$

Esto nos permite saber que f es en realidad una simetría, con plano de simetría dado por u y v , que actúa como un "espejo".



Al ver la forma original de la matriz, dada en base canónica, no era evidente cuál era el comportamiento geométrico de f . Ahora, trabajando en base $B = \{u, v, w\}$, sí está claro y además la matriz de f es más sencilla.

Teorema: Matrices reales simétricas.

Toda matriz real simétrica es diagonalizable, y todos sus valores propios son reales.

Por tanto si la matriz es real simétrica, no hace falta comprobar que es diagonalizable.

Uso de la diagonalización para calcular potencias de una matriz.

Supongamos que queremos calcular la potencia A^n de una matriz. Esto puede llevar una gran cantidad de operaciones.

Pero si la matriz A es diagonalizable, el cálculo se facilita notablemente.

En ese caso, diagonalizando la matriz tendremos $P^{-1}AP = D$, por tanto $A = PDP^{-1}$.

Entonces,

$$A^n = A \cdots A = P D P^{-1} P D P^{-1} \cdots P D P^{-1} = P D \cdots D P^{-1} = P D^n P^{-1}$$

es decir,

$$\boxed{A^n = P D^n P^{-1}}$$

lo cual es muy fácil de calcular teniendo en cuenta que para hallar la potencia D^n basta elevar a la potencia n cada elemento diagonal.

Ejemplo

Hemos obtenido anteriormente la diagonalización de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$P^{-1}AP = D, \text{ por tanto } A = PDP^{-1}, \text{ donde } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos entonces A^9 .

$$A^9 = P D^9 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1^9 & 0 \\ 0 & 3^9 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 19683 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 19683 & 19682 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EL CÁLCULO DE VECTORES PROPIOS

1. Círculos de Gershgorin.

Este resultado permite localizar una zona del plano complejo (o de la recta real) en la que se encuentran los valores propios, y así acotarlos entre ciertos límites:

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, se pueden dibujar en el plano complejo n círculos, uno por cada fila de la matriz, de la siguiente manera:

- Centro: el elemento diagonal de la fila
- Radio: la suma de los valores absolutos de los demás elementos de la fila

Entonces, **todo valor propio de A se encuentra contenido en alguno de los círculos, incluido el borde.**

- Si trabajamos en \mathcal{R} , podemos considerar sólo la parte real de los círculos, resultando entonces unos intervalos en la recta real.

2. Método de las potencias.

Se trata de un método iterativo para calcular el valor propio dominante (es decir, de mayor valor absoluto) de una matriz, así como su vector propio asociado.

Hay dos condiciones para asegurar la convergencia de este método :

- 1) Que haya un único valor propio de mayor valor absoluto (*p. ej. no se podría aplicar a una matriz cuyos valores propios fueran $-5, 1, 5$*). Este valor propio será el que calcularemos.
- 2) Que dicho valor tenga asociado un subespacio propio de dimensión 1, por tanto generado por un solo vector propio. Este vector propio será el que calcularemos.

En estas condiciones, el método se desarrolla de la siguiente manera:

1. Partir de un vector cualquiera (no nulo), v_0 .
2. Calcular $u_1 = A v_0$.
3. Anotar $\sigma_1 =$ la componente de mayor valor absoluto de u_1 .
4. Dividir u_1 por la componente σ_1 : $v_1 = \frac{u_1}{\sigma_1}$
5. Iterar desde el paso 2: $v_2 = A v_1$, etc.

Entonces, los vectores v_i **convergen al vector propio** buscado, mientras que la componente de mayor valor absoluto σ_i **converge al valor propio**.

Se puede detener el proceso cuando dos iteraciones sucesivas sean iguales, o difieran en menos de una cantidad previamente estipulada (una milésima, una diezmilésima...)

Ejemplo

Calculemos el valor propio dominante y su vector propio asociado, para $A = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$

Partimos del vector $v_0 = (1,0)$. Hemos trabajado con 4 cifras significativas.

Nº iteración	u_i	σ_i	$v_i = \frac{u_i}{\sigma_i}$
0	(1,0)	1	(1,0)
1	(-4,-6)	-6	(0.6667, 1)
2	(9.333, 10)	10	(0.9333, 1)
3	(8.2667,8.4)	8.4	(0.9841,1)
...
8	...	8	(1,1)
9	(8,8)	8	(1,1)

Como los vectores v_8 , v_9 ya son iguales, el proceso ya ha convergido, siendo 8 el valor propio dominante, y (1,1) su vector propio asociado.

AUTOEVALUACIÓN - Endomorfismos y diagonalización.

Cada (●) es un punto.

Hay en total 40 puntos, de los cuales 15 son de cuestiones y 25 de ejercicios.

A) Cuestiones (15 puntos)

(●) C-1) Razonar por qué una matriz 3×3 no puede tener 4 valores propios.

C-2) Si la matriz de un endomorfismo en base canónica es $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(●) a) Di, sin calcular, cuáles son los valores propios.

(●) b) Di, sin calcular, cuáles son los vectores propios.

C-3) Una cierta matriz A , de tamaño 4×4 , tiene como valor propio el 8.

(●) a) ¿Qué posibilidades hay para el rango de la matriz $A - 8I$?

(●) b) ¿Qué posibilidades hay para la dimensión del subespacio propio V_8 ?

C-4) Señalar si estas matrices serían diagonalizables (*sí*; *no*; *no se sabe*).

(●●) a) Una matriz 2×2 con valores propios: 3, 5 simples.

(●●) b) Una matriz 3×3 con valores propios: 6, 7, 8 simples.

(●●) c) Una matriz 2×2 con valor propio: -3 doble

(●●) d) Una matriz 3×3 con valores propios: 9 doble, 1 simple.

(●) C-5) Inventa una matriz 3×3 que sea diagonalizable. (Busca un ejemplo lo más sencillo posible).

(●) C-6) Sea A una matriz real simétrica 2×2 con dos valores propios, λ y μ . Si un vector propio asociado a λ es $(-1, 3)$, ¿cuál será un vector propio asociado a μ ?

B) Ejercicios (25 puntos)

E-1) Clasificar los siguientes endomorfismos:

- (•) a) En \mathbb{R}^3 , dado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- (•) b) En \mathbb{R}^2 , dado por la ecuación $f(x,y) = (2x+5, 4x+10)$
- (•) c) En \mathbb{R}^2 , la aplicación identidad (matriz identidad).

E-2) Dado el endomorfismo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, determinar si los siguientes vectores son o no vectores propios, y en caso afirmativo, hallar su valor propio.

- (•) a) $u = (0,3,0)$
- (•) b) $v = (1, 0, -1)$
- (•) c) $w = (2,2,1)$

E-3) Hallar los valores propios de los siguientes endomorfismos:

- (••) a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$
- (•) b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

E-4) Dado el siguiente endomorfismo, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- (•) a) Hallar sus valores propios.
- (••) b) Hallar sus vectores propios.
- (•) c) Determinar si es diagonalizable, y diagonalizar en su caso.

E-5) Considera el endomorfismo de \mathbb{R}^3 dado por $f(x,y,z) = (3x-3z, 3y+9z, -3z)$

- (•) a) Hallar sus valores propios.
- (••) b) Hallar sus vectores propios.
- (•) c) Determinar si es diagonalizable.
- (•) d) En caso afirmativo, escribir la diagonal y la matriz de paso P.

(●) E-6) Sabiendo que una cierta matriz A tiene valores propios 1, -1, 2, hallar los valores propios de A^t , de $4A$, de A^3 , y de A^{-1} .

(●●) E-7) Dado el endomorfismo $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ hallar la matriz de f en la base $B = \{(1,0,2), (1,0,-1), (0,3,0)\}$
 $(x,y,z) \mapsto (-x, -y, x+z)$

(●●) E-8) De una matriz A de tamaño 2x2, se sabe que es diagonalizable y que los valores propios son 0 y 3, con vectores propios respectivamente (1,1) y (4,1). Hallar la matriz A. (Sugerencia: $A = PDP^{-1}$).

(●●) E-9) Dada $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ hallar, mediante el método de las potencias, el valor propio dominante y su vector propio.

SOLUCIONES A LA AUTOEVALUACIÓN - Endomorfismos y diagonalización

A) Soluciones a las Cuestiones

Sol. C-1) a) Una matriz 3x3 puede tener **como mucho 3 valores propios**: ya que el polinomio característico es de grado 3 y puede tener como máximo 3 raíces.

Sol. C-2) a) Como la matriz es diagonal, los valores propios son los elementos diagonales: **4, -1, 3**.

b) Los vectores propios son los de la **base canónica**: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Ya que, como la matriz contiene las imágenes de la base canónica en columnas, se observa que

$f(1,0,0) = (4,0,0)$ luego $(1,0,0)$ es vector propio de valor propio 4.

$f(0,1,0) = (0,-1,0)$ luego $(0,1,0)$ es vector propio de valor propio -1.

$f(0,0,1) = (0,0,3)$ luego $(0,0,1)$ es vector propio de valor propio 3.

Sol. C-3) a) Tendrá rango **estrictamente menor que 4**, es decir, **3, 2, 1, ó 0**. Ya que la matriz $A-8I$ dará lugar a un sistema compatible indeterminado, cuyas soluciones son los vectores propios de valor propio 8.

b) Como todos los subespacios propios, podrá tener dimensión como mínimo 1, y como máximo la dimensión del espacio vectorial, en este caso 4. Por tanto, dimensión **1, 2, 3 ó 4**.

De hecho la dimensión de V_8 está relacionada con el rango de la matriz $A-8I$, puesto que $\dim(V_8) = 4 - \text{rg}(A-8I)$.

Sol. C-4) a) Los subespacios propios son V_3 y V_5 . Los dos valores propios son simples, es decir, de multiplicidad 1. Como la dimensión del subespacio propio está comprendida entre 1 y la multiplicidad, dicha dimensión ha de ser 1, tanto para V_3 como para V_5 .

Entonces $1 + 1 = 2$, **sí es diagonalizable**.

b) Los subespacios propios son V_6 , V_7 y V_8 . De manera similar, los tres valores propios son simples, de multiplicidad 1. Como la dimensión del subespacio propio está comprendida entre 1 y la multiplicidad, dicha dimensión ha de ser 1, para los tres subespacios.

Entonces $1+1+1=3$, **sí es diagonalizable**.

c) El subespacio propio será V_{-3} , cuya dimensión estará comprendida entre 1 y la multiplicidad que es 2. Por tanto, **no sabemos con estos datos** si dicha dimensión será 1 ó 2. Si fuese 2, la matriz sería diagonalizable (2 vectores propios), pero si fuese 1, no lo sería.

d) Los subespacios propios serán V_9 y V_1 . La dimensión de V_1 ha de ser 1 por un razonamiento como los anteriores, pero la dimensión de V_9 puede ser 1 ó 2. Si fuese 2 la matriz sería diagonalizable ($2+1=3$) pero si fuese 1, no lo sería. Por tanto, **con estos datos no se sabe**.

Sol. C-5) Lo más fácil es una matriz que ya sea diagonal, así seguro que es diagonalizable. (Entonces la matriz de paso P sería la identidad.). También podríamos poner cualquier matriz real simétrica, que siempre es diagonalizable.

Sol. C-6) a) En una matriz real simétrica, los vectores propios de distinto valor propio son ortogonales. Por tanto el vector asociado a μ deberá ser ortogonal a $(-1,3)$. Por ejemplo $(3,1)$ o cualquier múltiplo suyo.

B) Soluciones a los Ejercicios

Sol. E-1) a) El rango de la matriz es 3 (se obtiene escalonando), rango máximo. Luego el endomorfismo es **inyectivo y suprayectivo**, por tanto **biyectivo**.

b) La matriz del endomorfismo es $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ que tiene rango 1.

No tiene rango máximo, luego el endomorfismo **no es inyectivo ni suprayectivo**.

c) La matriz del endomorfismo es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene rango 2, rango máximo.

Luego el endomorfismo es **inyectivo y suprayectivo**, por tanto **biyectivo**.

Sol. E-2) a) Hallamos la imagen de u:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vemos que $f(u) = 1 \cdot u$, luego **u es vector propio de valor propio 1**.

b) Hallamos la imagen de v:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vemos que $f(v) = 0 \cdot v$, **v es vector propio de valor propio 0**.

c) Hallamos la imagen de w:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

vemos que $f(w)$ no es múltiplo de w. Por tanto **w no es vector propio**.

Sol. E-3) a) (Como es triangular, el polinomio característico se resuelve fácilmente) El polinomio característico es $(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+6)$, luego los valores son **2,1,-6**.

b) El polinomio característico es $\lambda(\lambda-5)$ luego los valores son **0, 5**.

Sol. E-4) a) Polinomio característico: $(-1-\lambda)(2-\lambda)^2$, valores propios **-1 simple, 2 doble**.

b) Para $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solución } (\alpha, 0, -2\alpha) \text{ , vector propio } (1, 0, -2)$$

Para $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solución } (0, \beta, -\beta) \text{ , vector propio } (0, 1, -1)$$

c) Los vectores propios son en total dos, luego no forman una base de \mathbb{R}^3 .
El endomorfismo **no es diagonalizable**.

Sol. E-5) Primero escribimos la matriz de f, que es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) Polinomio característico: $(3-\lambda)^2(-3-\lambda)$, valores propios **3 doble, -3 simple**.

b) Para $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solución } (\alpha, \beta, 0) \text{ , vectores propios } (1, 0, 0) \text{ , } (0, 1, 0)$$

Para $\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ solución } (\beta, -3\beta, 2\beta) \text{ , vector propio } (1, -3, 2)$$

c) Hay en total tres vectores propios que forman una base de \mathbb{R}^3 . Esto significa que el endomorfismo **sí es diagonalizable**.

d) La diagonal es la de los valores propios: $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

La matriz de paso tiene en columnas los vectores propios (en el mismo orden que los valores): $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(Se puede comprobar que se cumple $D = P^{-1}AP$).

Sol. E-6) Valores de A^t : **1, -1, 2** (los mismos que A)
Valores de $4A$: **4, -4, 8** (los de A multiplicados por 4)
Valores de A^3 : **1, -1, 8** (los de A elevados al cubo)
Valores de A^{-1} : **1, -1, $\frac{1}{2}$** (inversos de los de A).

Sol. E-7) Primero escribimos la matriz del endomorfismo en base canónica, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz de cambio de base tendrá en sus columnas la base dada: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto la matriz en la base dada es $M = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Sol. E-8) D será la diagonal de los valores propios 0 y 3 : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

La matriz de paso P tiene en sus columnas los vectores propios: $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces, $A = P D P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(Puede comprobarse que efectivamente A tiene los valores y vectores propios del enunciado).

Sol. E-9) El valor es **8** y el vector es **(0.50, 1)**. Para dos cifras significativas converge en unas 10 iteraciones, según el vector inicial que se tome.