Algebra Lineal y Geometría. Prueba final. 1-2-2012

Primera prueba

Nota: En todas las pruebas se exigirá todo razonado y justificado, no se calificara poner solo los resultados

1.a) Estudiar la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro a (1.5 p)

$$a^2x + a\,y + z = 1$$
$$x + a\,y + z = a$$
$$x + ay + a^2z = 1$$

b) Calcular por Gauss-Jordán la inversa de la matriz (1 p)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Calcular el valor del determinante utilizando las propiedades de los determinantes (1 p)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

2.a) Mediante operaciones elementales, determinar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro real a (1p)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4}+\boldsymbol{a} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \;,\; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

b) Calcular la matriz X en la ecuación matricial (1 p)

$A\,X\,B = C$ Siendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \;, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Factorizar en la forma LU la matriz (2 p)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

d) Dada la matriz $J = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{vmatrix}$. Calcular la forma escalonada reducida por filas y la matriz de paso P. Calcular el rango (2.5 p)

Segunda prueba

3. Sea S el subespacio vectorial generado por el sistema ⟨(1,0,2,1),(1,1,0,1)⟩.

a) Calcular las ecuaciones implícitas del subespacio S (1.5 p)

b) ¿ El vector (1,2,−2,0)∈S? (0.75 p)

c) Calcula una base del conjunto T={x∈ R^4 | x es ortogonal a todos los vectores de S}.(2 p)

d) Calcula una base ortonormal de S. (1.*25* p)

4. Sean en R^4 los subespacios V y W , $V = \{(a\,, b\,, a - b + c\,, c\}\;, a\,, b\,, c\;\in R\}$ $W = \{\,(x, y, z, t)\,\}\;\; x - 2y + z = 0, x - y = 0$ } .Calcular

a) Dimensión de V y una base (0.75 p)

b) Dimensión W y una base (0.75 p)

c) Dimensión (V+W) y una base (1 p)

d) Dimensión (V∪W), una base y sus ecuaciones implícitas (2 p)

Tercera prueba

5. Sea la aplicación lineal $f: R^3 \to R^2$ definida por $f(e_1) = (1\,,2\,,0), f(e_2) = (-3,0,0)\,,\; f(e_3) = (-2,1,0)$. Donde $\{e_1\,,\; e_2\,, e_3\,\}$es la base canonica de R^3. Calcular

a) La matriz A de f respecto a las bases canónicas (0.25 p)

b) Ecuaciones analíticas de la aplicación lineal (0.25 p)

c) Calcular las ecuaciones implícitas de Kerf, la dimensión y dar una base (1p)

d) Calcular las ecuaciones implícitas de Imagen f, la dimensión y dar una base (1 p)

e) De que tipo de aplicación se trata (0.5 p)

f) Calcular v si f(v) = (3,-3) (0.5 p)

g) Calcular las ecuaciones de la aplicación lineal respecto de la base B de R^3 y la base canónica de R^2 siendo la base B={(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)} (1.5 p)

6. Sea f un endomorfismo definido por

$$f: \; R^3 \xrightarrow{f} R^3$$

f(x ,y, z)=(-2x+4 y+5 z ,-3 x+5 y +5 z , z)

Calcular:

a) Matriz de la aplicación lineal respecto a las bases canónicas (la llamamos A) (0.25 p)

b) Valores propios y vectores propios de f (0.75 p)

c) Estudiar la Diagonalización de f, así como calcular la matriz de f respecto de eta base de vectores propios. (Llamarla D). Relación entre las matrices A y D (1.25 p)

d) Calcular las ecuaciones implícitas de los subespacios invariantes (1.25 p)

e) calcular A^{27}(0.75 p)

f) Comprobar que al sustituir la matriz A el polinomio característico se verifica se verifica P(A)=0 (0.75 p)

g) Calcular la traza de la matriz A
