# Teoría de Juegos

Teoría de Juegos

## Tema 5

# Juegos dinámicos (II)

### Información imperfecta
### Juegos repetidos

*(Versión provisional)*

**Pedro Álvarez Causelo**
**Departamento de Economía**
**Universidad de Cantabria**
alvarezp@unican.es

# Índice general





Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

## 5.1 Introducción

En este tema seguimos ocupándonos de los juegos dinámicos. En la primera parte del mismo tomaremos como referencia lo visto en el tema anterior para los juegos dinámicos con información perfecta y lo extenderemos a los juegos con información imperfecta. En la segunda parte nos ocuparemos de un tipo especial de juegos dinámicos:los juegos repetidos.

En los juegos con información imperfecta alguno de los jugadores tiene que decidir sin conocer con exactitud la historia previa del juego (la posición en la que se encuentra), lo que hace necesario ampliar la definición de la forma extensiva y revisar el procedimiento utilizado para determinar las soluciones.

Comenzaremos, pues, revisando la definición de la forma extensiva dada en el tema anterior. El concepto de **conjunto de información**, introducido ya en el Tema 1, desempeñará un papel fundamental en dicha revisión. A continuación propondremos la extensión del uso del equilibrio perfecto en subjuegos como concepto de solución (y de la inducción hacia atrás como procedimiento para determinarla) para un tipo particular de juegos con información imperfecta. Dichos juegos se caracterizan por constar de dos o más *etapas*, en cada una de las cuales decide bien un jugador, bien dos o más de forma simultánea. Los juegos repetidos —objeto de estudio de la segunda parte del tema— son un tipo especial de esos juegos *multietápicos*, que presentan la particularidad de que en cada una de las etapas los jugadores se enfrentan a la misma situación de interdependencia estratégica recogida a través del denominado juego de etapa. Este tipo de modelos resulta apropiado para analizar situaciones de interdependencia estratégica en las que los jugadores son conscientes de pueden volver a «enfrentrarse» en el futuro a esa misma situación. Como consecuencia de ello, cada jugador a la hora de tomar una decisión tendrá en cuenta tanto las consecuencias inmediatas de la misma, como las futuras (en la medida en que consideré que repercutirá sobre el comportamiento del resto de jugadores cuando se vuelvan a encontrar). El análisis de este tipo de juegos depende de manera crucial de que supongamos que el número de etapas que durará el juego es conocimiento común o no, por lo que abordaremos por separado los juegos repetidos con horizonte finito (la duración del juego es conocimiento común) y los juegos repetidos con horizonte infinito (la duración del juego es indeterminada).



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

## 5.2 Forma extensiva para juegos con información imperfecta

Un juego es de información imperfecta si algún jugador tiene que tomar su decisión sin conocer con certeza cuál la posición en la que se encuentra (la historia previa del juego). Ya vimos en el Tema 1 cómo podemos utilizar el concepto de **conjunto de información** para representar esa *información imperfecta* que pueden tener los jugadores en algunas posiciones del juego. A modo de ejemplo, en el juego de la Figura 5.1 si el jugador $I$ elige $a$ el jugador $III$ tendrá que elegir entre $A$ o $B$ sin saber si está en la posición $(a, \alpha)$ o en la posición $(a, \beta)$.

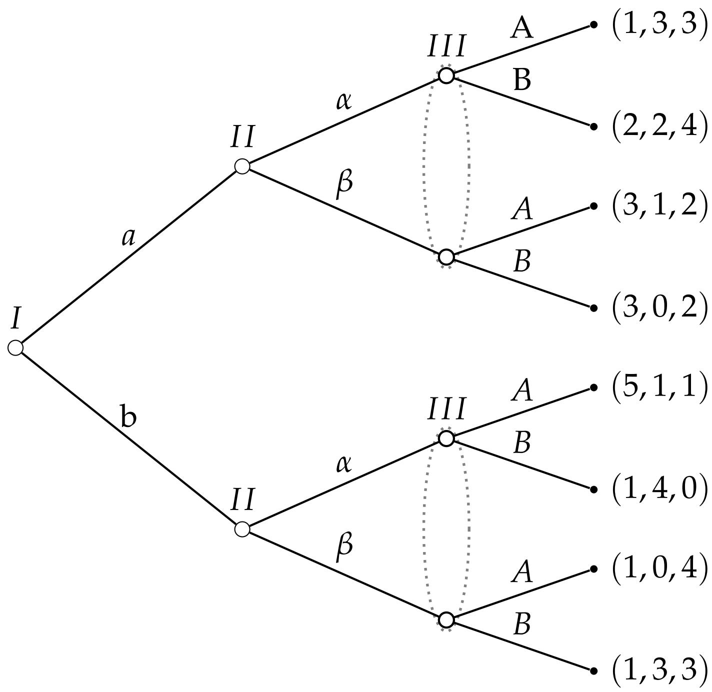


**Figura 5.1.** ***Un juego multietápico con información imperfecta***

Para que la descripción formalizada de la forma extensiva incluya los juegos con información imperfecta es necesario completar la definición de la misma que dábamos en el tema anterior recogiendo en la misma cuáles son los conjuntos de información de cada uno de los jugadores. La forma de hacerlo será a través de una partición de cada conjunto $\mathbf{X}_i$ de posiciones en las que podría tener que mover $i$ en subconjuntos o bloques $\mathbf{K}_i$. Cada uno de estos bloques constituye un conjunto de información: dos o más posiciones con la propiedad de que si el juego alcanza alguna de ellas el jugador al que pertenecen tendría que decidir sin saber en cual de ellas se encuentra.

**Definición 5.2.1 (Forma extensiva de un juego con información imperfecta)** *La forma extensiva de un juego con información imperfecta es una 5-tupla* $\Gamma = \langle J, Z, \mathcal{P}(\mathbf{X}), \{\mathcal{P}_i(\mathbf{X}_i)\}_{i=1}^{N}, \{U_i\}_{i=1}^{N} \rangle$, *donde:*

- $\mathbf{J} = \{1, \cdots, N\}$ *es el conjunto de jugadores.*



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

- **Z** *es el conjunto de secuencias que constituyen desarrollos posibles del juego. En tanto que conjunto de secuencias, Z nos informará implícitamente sobre:*
  - *El conjunto de posiciones o historias no terminales* **X**.
  - *Las alternativas disponibles por cada jugador en cada una de las posiciones* $\mathbf{A}(x)$.
- $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ *es una partición de las posiciones del juego en función del jugador al que le tocaría mover en cada una de ellas.*
- $\mathcal{P}_i(\mathbf{X}_i)$ *es una partición de las posiciones de i en conjuntos de información* $\mathbf{K}_i$.
- $U_i(z)$ *es una función de utilidad cardinal.*

En el juego de la Figura 5.1 los conjuntos de información de cada uno de los tres jugadores serían:

$$\begin{aligned} K^1_I &= \{\emptyset\}; \\ K^1_{II} &= \{a\}, \quad K^2_{II} = \{b\}; \\ K^1_{III} &= \{(a,\alpha),(a,\beta)\}, \quad K^2_{III} = \{(b,\alpha),(b,\beta)\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

### De la forma extensiva a la forma normal: el concepto de estrategia

La definición de estrategia como plan completo de acción se extiende a los juegos con información imperfecta. La única diferencia es que ahora dicho plan ha de asignar un movimiento en cada uno de los conjuntos de información $K^m_i$ del jugador $i$.

**Definición 5.2.2 (Estrategia)** *Dada la forma extensiva de un juego* $\Gamma$, *una estrategia para el jugador i es una función* $s_i(K_i)$ *que asigna un movimiento* $a \in \mathbf{A}(K^m_i)$ *del jugador a cada una de sus conjuntos de información*[1] $K^m_i$.

La definición anterior es válida tanto para los juegos con información perfecta como para los juegos con información imperfecta; la única diferencia es que en los de información imperfecta las estrategias asignan el mismo movimiento a todas las posiciones de un conjunto de información. Al igual que en los juegos de información perfecta, el concepto de estrategia permite pasar cualquier juego en forma extensiva a su forma normal.

**▶ Ejercicio 5.2.1**

Represente en forma estratégica el juego de la Figura 5.1.

[1]El conjunto $\mathbf{A}(K^m_i)$ tiene como elementos todas las acciones o movimientos entre los que podría elegir el jugador $i$ en su conjunto de información $K^m_i$. Es importante tener en cuenta que dichas acciones o movimientos han de ser las mismas en todas los nodos o posiciones $x_i \in K^m_i$, ya que de hecho dicho jugador tiene que decidir sin saber en cual de esas posiciones está.


Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

### Subjuegos de un juego con información imperfecta

En los juegos con información perfecta cada posición del juego $x$ daba paso a un nuevo subjuego $\Gamma(x)$, el cual tenía como nodo raíz dicha posición e incluía todos los nodos que eran «sucesores» de ese nodo raíz. En un juego con información perfecta analizar de manera separada cada uno de sus subjuegos supone considerar cada una de las posiciones intermedias del juego y pensar como se desarrollaría la parte del juego pendiente si se alcanzase la misma. En un juego con información imperfecta cuando alcancemos un conjunto de información con más de un nodo, no sería correcto considerar lo que ocurriría si el juego llegase a una de las posiciones que forman del mismo como si el jugador al que pertenece supiese que está ella. En el juego de la Figura 5.1 no existe ningún subjuego que tenga como nodo raíz uno del jugador $III$, ya que no tiene sentido que nos preguntemos que haría en determinada posición cuando sabemos de antemano que el no conocerá si está o no en ella. Por tanto, el juego únicamente tendría dos subjuegos propios: los que tienen como nodo raíz cada una de las dos posiciones en las que le tocaría mover al jugador $II$ ($a$ y $b$).

Consideremos ahora el árbol del juego que aparece en la Figura 5.2.¿Sería corrector analizar lo que pasaría si el juego alcanzase la posición $a$ como si tratase de un juego *reducido* que tuviese ese nodo raíz e incluyese todos los nodos sucesores del mismo? Claramente no, el análisis de dicho juego *reducido* no se correspondería con la situación de interdependencia estratégica que recoge el juego original a partir de la posición $a$. En efecto, al separar dos nodos que pertenecen a un mismo conjunto de información, $(a, \beta)$ y $(b, \alpha)$, estaríamos considerando una situación distinta en cuanto a los condiciones de información que se dan realmente en esa posición del juego: cuando $II$ tiene que decidir en $a$ lo tiene que hacer sabiendo que si lleva el juego a la posición $(a, \beta)$ del jugador $III$, esté tendrá que decidir sin saber si está en ella o en $(b, \alpha)$. Por tanto, en este juego no existe ningún subjuego propio.

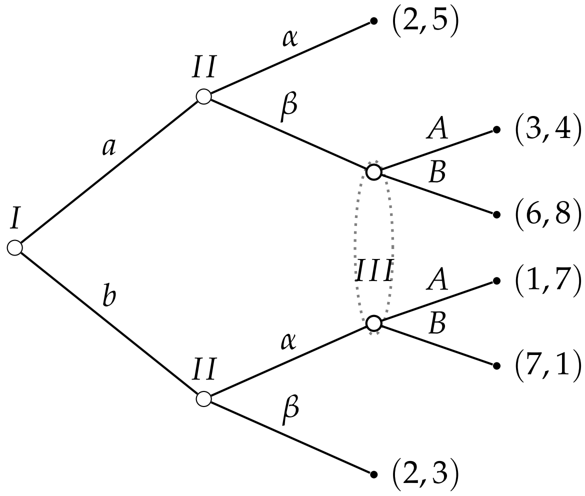


**Figura 5.2.** ***Un juego con información imperfecta sin ningún subjuego propio.***

Dejando de lado los detalles de una definición formal, podríamos resumir diciendo que para determinar los subjuegos de un juego con información imperfecta debemos tener en cuenta las siguientes dos condiciones:

1. Cada subjuego ha de tener como nodo raíz un conjunto de información con un único nodo.
2. Incluir los nodos sucesores de dicho nodo raíz no puede suponer separar parte de los nodos de un conjunto de información (al construir subjuegos no podemos separar los nodos de un mismo conjunto de información).

► **Ejercicio 5.2.2**

Considere un juego con 3 jugadores en el que cada uno de ellos dispone de dos movimientos posibles. Considere todas las situaciones posibles, en términos de información de que disponen los jugadores sobre las decisiones previas de los otros, y determine el número de subjuegos que habría en cada caso.


Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

## 5.3 Inducción hacia atrás y equilibrio perfecto en subjuegos en juegos *multietápicos*

El procedimiento de la inducción atrás que utilizábamos en los juegos con información perfecta puede ser extendido fácilmente para determinar los equilibrios perfectos en subjuegos de un tipo particular de juegos con información imperfecta que suelen denominarse *juegos multietápicos con acciones observadas* (o juegos con información «casi perfecta»). Este tipo de juegos, con un gran número de aplicaciones en el campo de la economía, se caracteriza por constar de dos o más *etapas*, en cada una de las cuales decide bien un jugador, bien dos o más de forma simultánea. La característica definitoria es que los jugadores mueven *por turnos* (en algún turno puede tocarle mover a dos o más jugadores de forma simultánea), pasando a ser conocimiento común después de cada turno las decisiones tomadas en esa etapa. En otras palabras, la única fuente de información imperfecta es la simultaneidad en la toma de decisiones en una o más etapas, ya que después de cada etapa la historia previa del juego es conocimiento común. Enfocado bajo esta perspectiva, el juego de la Figura 5.1 es un juego con dos etapas, en la segunda de las cuales los jugadores $II$ y $III$, conociendo la decisión previa del $I$, han de decidir de manera simultánea (sin conocer cada uno de ellos la decisión del otro).

Vamos a introducir la forma en que se puede extender el procedimiento de la inducción hacia atrás a este tipo de juegos explicando como se aplicaría a ese mismo juego de la Figura 5.1. Una vez lo hemos caracterizado como un juego con dos etapas, la inducción hacia atrás requiere empezar resolviendo los subjuegos de la última etapa, en este caso la segunda[2]. La única novedad es que cada uno de estos dos subjuegos es en realidad un juego simultáneo *entre* $II$ y $III$. En la Figura 5.3 aparecen dichos juegos representados en su forma normal. Si aplicamos los conceptos de solución vistos en los temas anteriores para los juegos simultáneos (los basados en la dominancia y el equilibrio de Nash) para «resolver» los subjuegos de esa segunda etapa, ya podremos proseguir de la forma habitual con el procedimiento de la inducción hacia atrás.

[2]Recordamos que la intuición que hay detrás es que el jugador $I$ antes de tomar su decisión (llevar el juego a $a$ o llevarlo a $b$) trata de anticipar como se desarrollaría el juego una vez llegase a cada una de esas posiciones.

**G**$(a)$

| | | III: $A$ | III: $B$ |
|---|---|---|---|
| II | $\alpha$ | $3,3$ | $2,4$ |
| | $\beta$ | $1,2$ | $0,2$ |

**G**$(b)$

| | | III: $A$ | III: $B$ |
|---|---|---|---|
| II | $\alpha$ | $1,1$ | $4,0$ |
| | $\beta$ | $0,4$ | $3,3$ |

**Figura 5.3.** ***Forma normal de cada uno de los dos subjuegos de la segunda etapa del juego de la Figura 5.1.***

Al resolver la segunda etapa nos encontramos que tanto $G(a)$ como $G(b)$ tienen un único equilibrio de Nash, el primero de ellos en $(\alpha, B)$ (también se alcanza por eliminación iterativa de estrategias dominadas) y el segundo en $(\alpha, A)$ (recoge en realidad una situación tipo dilema del prisionero). La resolución de la segunda etapa nos determina las expectativas a partir de las cuales tomará su decisión el jugador $I$, lo que a su vez llevará a que prefiera llevar el juego a la posición $b$. Por tanto, el resultado por inducción hacia atrás de este juego es $[b, (\alpha, A)]$. Además, al igual que ocurría en los juegos con información perfecta, la inducción hacia atrás también nos permite determinar los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos, en este caso únicamente $(b, \alpha\alpha, BA)$. Como ya hemos explicado anteriormente, la especificación de las estrategias de equilibrio contiene mucha más información que el resultado por inducción hacia atrás. En efecto, mientras que este último sólo recoge la trayectoria de equilibrio (lo que ocurrirá en cada etapa), el ENPS nos informa también sobre la forma en que se desarrollaría cualquier subjuego (y, por tanto, sobre las expectativas de los jugadores que mueven antes sobre cómo se desarrollaría el juego si se alcanzase dicha posición), aunque éste quede fuera de la trayectoria de equilibrio.



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

## 5.4 Juegos repetidos

### Juego de etapa y juego repetido

En muchas situaciones de interdependencia estratégica los jugadores son conscientes de que se van a volver a enfrentar a una situación idéntica o similar en el futuro. En este tipo de situaciones las decisiones de los jugadores en un momento dado dependerán no sólo del pago esperado en el futuro inmediato, sino también de las consecuencias de las mismas en el largo plazo. A modo de ejemplo, en un situación de oligopolio cada una de las empresas decidirá el precio que fija teniendo en cuenta no sólo la repercusión sobre los beneficios de «hoy», sino también como afectará a los beneficios futuros.

Los juegos repetidos constituyen la herramienta adecuada para analizar este tipo de situaciones. Un juego repetido es, en última instancia, un juego dinámico, con la particularidad de que en cada una de las etapas los jugadores se enfrentan a la misma situación de interdependencia estratégica, recogida a través del denominado **juego de etapa**. Dado un juego en forma estratégica $G$, denotaremos por $G(T)$ el juego dinámico consistente en $T$ repeticiones de $G$. Veremos también que resulta muy útil considerar modelos en los que el número de etapas es indeterminado (los jugadores no saben con certeza cuantas veces se enfrentarán en el futuro a esa situación), en cuyo caso nos referiremos a ellos mediante $G(\infty)$.

Para analizar los juegos repetidos recurriremos a las herramientas y conceptos ya vistos para los juegos dinámicos, en particular al procedimiento de la inducción hacia atrás y al concepto de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Las estrategias de los jugadores, en tanto que planes completos de acción, pueden recogerse en un juego repetido en términos de planes en los que el comportamiento en cada una de las etapas $t$ queda condicionado a la forma en que se ha desarrollado el juego en las etapas anteriores (a la historia previa del juego al llegar a dicha etapa)[3].

**► Ejercicio 5.4.1**

Considere una situación en la cual es conocimiento común que los jugadores se van a enfrentar durante dos periodos a una situación tipo dilema del prisionero como la recogida en la figura adjunta. Se pide:

- Haga un esbozo de la forma extensiva de este juego repetido $DP(2)$.
- Determine como serían las estrategias de cada jugador. Ponga dos ejemplos.

[3]Hay que recordar una vez más que, en tanto que planes completos de acción, las estrategias de los jugadores han de asignar un movimiento a cada posible historia no terminal en la que le toque mover, con independencia de que está se alcance o no si el jugador se atiene a dicha estrategia.

- Si en lugar de un $DP(2)$ considerásemos un $DP(T)$ con $T$ suficientemente grande, ¿cuántas historias posibles (posiciones) habría al acabar la tercera etapa? En general, ¿cuántas al acabar la etapa $t$?.

| | $C$ | $\bar{C}$ |
|---|---|---|
| $C$ | $10, 10$ | $0, 15$ |
| $\bar{C}$ | $15, 0$ | $5, 5$ |

**Las funciones de pagos en un juego repetido: el factor de descuento**

En muchas ocasiones querremos modelizar situaciones en las cuales las sucesivas situaciones de interdependencia estratégica a las que se enfrentan los jugadores (las etapas) están distanciadas en el tiempo. En este caso, hemos de incorporar en los modelos el hecho de que los jugadores suelen ser impacientes, en el sentido de que, dado un determinado pago, prefieren recibirlo cuanto antes mejor. Recogeremos el «grado de impaciencia» del jugador $i$ a través del **fáctor de descuento** $\delta_i$, el cual nos permitirá determinar de una manera sencilla el valor presente de un pago por un importe de $a$ $um$ recibido dentro de $t$ periodos mediante la fórmula $VP(a,t) = \delta_i^t a$. Aunque son muchos los factores que pueden influir en el valor de $\delta_i$ (en el grado de impaciencia de los jugadores), un marco sencillo para comprender su significado es aquel en el cual los jugadores descuentan sus ganancias debido únicamente a que si dispusieran del dinero ahora podrían invertirlo a un tipo fijo de interés $r$. Bajo este supuesto, el valor presente de una determinada cantidad $a$ recibida dentro de $t$ periodos debería cumplir la condición $VP(a,t)(1+r)^t = a$, de dónde se obtiene de manera inmediata que $VP(a,t) = \left(\frac{1}{1+r}\right)^t a$, expresión que nos permite apreciar que el factor de descuento vendría dado por $\delta = \frac{1}{1+r}$.

**► Ejercicio 5.4.2**

Suponga que los jugadores pueden prestar y pedir prestado a un tipo de interés fijo del 5 %; ¿cuál sería el valor presente que asignarían al derecho a recibir una cantidad de 10 000 euros dentro de 2 años?

Por tanto, los pagos de los jugadores en un juego repetido en el que los jugadores son impacientes vendrán dados por la suma de los pagos de cada etapa adecuadamente descontados. Si denotamos por $u_{it}$ el pago que obtendría el jugador $i$ en la etapa $t$ y por $\delta_i$ su factor de descuento, el pago asociado a un determinado desarrollo del juego repetido vendría dado


Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

por:

$$u_{i1} + \delta_i u_{i2} + \delta_i^2 u_{i3} + \cdots + \delta_i^{T-1} u_{iT} = \sum_{t=1}^{T} \delta_i^{t-1} u_{it}.$$

▶ **Ejercicio 5.4.3**

Determine como afectaría a las funciones de pagos del Ejercicio 5.4.1 el hecho de que ambos jugadores descontasen los pagos de la segunda etapa por el factor de descuento común $\delta = 0.8$.

### 5.4.1 Juegos repetidos un número finito de veces

Comencemos por el caso más sencillo: aquel en el que los jugadores se enfrentan al $DP$ durante dos periodos, siendo esto conocimiento común. Vamos a suponer para simplificar $\delta = 1$ para ambos jugadores lo que, como veremos posteriormente, no afecta a la solución del juego. Las estrategias de los jugadores serán planes en los que se decide si cooperar o no en la primera etapa y se condiciona la decisión de cooperar o no en la segunda etapa a lo que haya ocurrido en la primera (constarán de cinco movimientos asociados a a cada uno de los conjuntos de información que aparecen en la forma extensiva).

En la medida que es un juego dinámico con información imperfecta, podemos buscar en primer lugar el resultado por inducción hacia atrás, como paso previo a la determinación de las combinaciones de estrategias que constituyen un $ENPS$. Para ello, debemos empezar buscando el equilibrio de Nash de cada uno de los cuatro subjuegos de la segunda etapa. Con independencia de lo que haya ocurrido en la primera etapa, los jugadores se enfrentarán en al segunda a una situación tipo $DP$ por lo que el único $EN$ de cada uno de dichos subjuegos es $(\bar{C}, \bar{C})$. Una vez sabemos lo que ocurrirá en la segunda etapa debemos resolver la primera. Cada uno de los jugadores anticipa que su decisión en la primera no va a afectar en absoluto a lo que ocurra en la segunda, por lo que su decisión será la misma que si la segunda etapa no existiese: no cooperar. Por tanto, en el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del dilema del prisionero repetido dos veces la estrategia de cada uno de los jugadores es: *no cooperar en la primera etapa, no cooperar en la segunda con independencia de como se haya desarrollado la primera etapa*.

El resultado anterior se puede generalizar fácilmente para un número finito cualquiera de etapas $T$. Aplicando la inducción hacia atrás al juego repetito $T$ veces, obtenemos un único $ENPS$ en el cuál las estrategias de los jugadores son de la forma: *no cooperar en la primera etapa, no cooperar en ninguna de las posteriores con independencia de la historia previa del juego*. En la última etapa no existe la preocupación por las consecuencias futuras de la decisión, por lo que la decisión óptima de cada jugador será siempre no colaborar con independencia de



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

lo que haya ocurrido antes. Anticipando esto, en la penúltima etapa los jugadores saben que no pueden influir en lo que va a ocurrir en esa última etapa, por lo que deciden en ella sin preocuparse por las consecuencias futuras porque no las habrá. Repitiendo recursivamente este razonamiento hasta la primera etapa se obtiene el único equilibrio perfecto en subjuegos mencionado anteriormente.

Sin detenernos en su demostración, vamos a establecer el siguiente resultado general:

**Resultado 5.4.1** *Si el juego de etapa $G$ tiene un único equilibrio de Nash (un único ENPS si el juego de etapa es dinámico), entonces para cualquier $T$ finito también el juego repetido $G(T)$ tendrá un único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en el cual en cada etapa se juega el EN de $G$ (el ENPS si $G$ es dinámico).*

**▶ Ejercicio 5.4.4**

Aplicar el resultado anterior a las siguientes situaciones

1. Modelo de Cournot repetido $T$ veces.
2. Modelo de Stackelberg repetido $T$ veces.

### Juego de etapa con más de un EN

¿Qué ocurre si el juego de etapa tiene más de un equilibrio de Nash? Consideremos a modo de ejemplo que el juego estático que aparece en la figura adjunta se repitiese dos veces.

| | $I$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $4,3$ | $0,0$ | $1,4$ |
| $B$ | $0,0$ | $2,1$ | $0,0$ |

El juego de etapa tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, $(A, D)$ y $(B, C)$. Lo que tratamos de determinar es qué combinaciones de estrategias del juego repetido $G(2)$ constituyen un $ENPS$.

Si comenzamos a analizar la segunda etapa veremos que cada uno de los subjuegos es equivalente al juego de etapa. Por tanto, en un $ENPS$ las estrategias deberán llevar a que en la segunda etapa el desarrollo del juego sea o bien $(A, D)$ o bien $(B, C)$, ya que en caso contrario no asignaría un $EN$ al subjuego correspondiente de la segunda etapa. A modo de ejemplo, el par de estrategias:



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

- Jugador $I$: *jugar A en la primera etapa, jugar B en la segunda pase lo que pase en la primera;*
- Jugador $II$: *jugar D en la primera etapa, jugar C en la segunda pase lo que pase en la primera,*

constituye un $ENPS$. En general podemos establecer el siguiente resultado:

**Resultado 5.4.2** *Si el juego de etapa G tiene más de un equilibrio de Nash (ENPS en los juegos dinámicos) todos las combinaciones de estrategias que asignen a cada etapa uno de esos equilibrios de Nash constituye un ENPS del juego repetido.*

Sin embargo, el principal punto de interés cuando el juego de etapa tiene más de un $EN$ radica en que en el juego repetido pueden existir $ENPS$ distintos de los recogidos en el resultado anterior. Consideremos, a modo de ejemplo, el siguiente par de estrategias $(\tilde{s}_I, \tilde{s}_{II})$:

- $\tilde{s}_I$: *jugar A en la primera etapa, jugar también A en la segunda si el resultado de la primera etapa ha sido $(A, I)$, en caso contrario jugar B.*
- $\tilde{s}_{II}$: *jugar I en la primera etapa, jugar D en la segunda si el resultado de la primera etapa ha sido $(A, I)$, en caso contrario jugar C.*

Dicha combinación de estrategias constituye un $ENPS$:

1. Es un equilibrio de Nash, ya que ningún jugador tiene incentivos a cambiar su estrategia dada la estrategia del otro. A pesar de que $II$ tiene un incentivo a desviarse en la primera etapa, la repercusión que esto tendría en el $EN$ que escogerían en la segunda hace que le interese renunciar al mismo: $U_{II}(\tilde{s}_I, s_{II}^D) = 5 < U_{II}(\tilde{s}_I, \tilde{s}_{II}) = 7$.
2. Es perfecto en subjuegos, ya que las estrategias asignan un EN a cada uno de los subjuegos de la segunda etapa.

Es importante darse cuenta que en este $ENPS$ las ganancias de ambos jugadores son elevadas en relación a las que podrían alcanzar en cualquiera de los $ENPS$ en los que se jugaba uno de los $EN$ del juego de etapa tanto en el primera como en la segunda etapa.

**Resultado 5.4.3** *Si el juego de etapa G tiene más de un EN (ENPS si el juego es dinámico) pueden existir ENPS del juego repetido G(T) en los que en alguna de las etapas no se juega ninguno de los EN de G. En particular, pueden constituir un ENPS combinaciones de estrategias que lleven asociadas ganancias medias por etapa que supongan mejoras paretianas respecto a las que se alcanzarían si sólo se jugasen en cada etapa las acciones asociadas a los EN del juego de etapa.*

En otras palabras, la existencia de incentivos a desviarse a corto plazo puede verse contrarrestada a través de la elección por cada jugador de estrategias que condicionan su comportamiento futuro al compartimiento actual de los otros jugadores. El hecho de que haya más de un equilibrio de Nash es una condición necesaria para que las amenazas o promesas que forman parte de dichas estrategias sean creíbles: si sólo existiese un equilibrio de Nash los jugadores anticiparían que ese va a ser el desarrollo futuro del juego con independencia de su comportamiento presente.

### 5.4.2 Juegos repetidos infinitamente

Consideremos ahora una situación en la cual los jugadores no conocen de antemano durante cuantas etapas se enfrentarán a la situación de interdependencia estratégica recogida por el juego de etapa. Supongamos que es conocimiento común que el juego se puede acabar después de una etapa cualquiera con una probabilidad $p$ (en otras palabras, $p$ es la probabilidad que asignan los jugadores a que la etapa en la están sea la última). Bajo este supuesto la duración del juego es indeterminada: los jugadores únicamente están seguros de que se enfrentarán en la primera etapa, asignan una probabilidad $(1-p)$ a que sólo tenga 2 etapas, $(1-p)^2$ a que sólo tenga 3 etapas y, en general, $(1-p)^{t-1}$ a que dure exactamente $t$ etapas. Aunque con probabilidades muy bajas, el juego puede alcanzar cualquier número de etapas por grande que este sea, de ahí que se denominen juegos infinitos. Denotaremos un juego repetido en el que el juego de etapa $G$ se repite durante un número indeterminado de veces por $G(\infty)$.

#### Un ejemplo: el dilema del prisionero repetido infinitamente

Supongamos que el juego de etapa es el dilema del prisionero con los pagos recogidos en la Figura 5.4.1 y analicemos el juego repetido $DP(\infty)$.

**Estrategias y preferencias**

En primer lugar, debemos plantearnos como son las estrategias de los jugadores. La forma de describir una estrategia para $DP(\infty)$ consiste en especificar una acción para la primera etapa y una a continuación de cada posible historia previa para el resto de las etapas. Aunque podemos pensar en estrategias muy complicadas, normalmente es suficiente con considerar estrategias sencillas. A modo de ejemplo, las siguientes son dos estrategias que utilizaremos posteriormente:

- Estrategia «del disparador» o «gatillo» (*Trigger strategy*): Comenzar cooperando en la primera etapa; seguir cooperando en todas las demás si el resultado de las anteriores ha sido la cooperación mutua, en caso contrario no cooperar nunca más.
- Estrategia «ojo por ojo» (*Tit for tat*): Cooperar en la primera etapa; en las siguientes jugar de la misma manera que lo haya el otro jugador en la etapa anterior.

En segundo lugar, necesitamos especificar las preferencias de los jugadores en relación a cada posible combinación de estrategias. Cada una de estas combinaciones determinará una secuencia de ganancias potenciales para cada jugador, esto es, una ganancia en cada etapa condicionada a que se alcance dicha etapa. ¿Cómo valora un jugador esa secuencia de ga-


Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

nancias con sus probabilidades asociadas? Consideremos, a modo de ejemplo, que ambos jugadores eligiesen la estrategia *cooperar en todas las etapas independientemente de la historia previa*. En ese caso cada uno de los jugadores recibiría 10 *um* en cada etapa. Podríamos recoger la valoración que hace un jugador de ese desarrollo del juego por el valor presente del flujo de ganancias esperado. Si el flujo de ganancias se recibiese con certeza y el factor de descuento de cada jugador fuese $\tilde{\delta}_i$ dicho valor presente sería:

$$V_i(s_I^C, s_{II}^C) = 10 + 10\tilde{\delta}_i + 10\tilde{\delta}_i^2 + \cdots$$

Pero el flujo de ganancias no se recibe con certeza, por lo que a la hora de calcular el pago esperado tendremos:

$$V_i(s_I^C, s_{II}^C) = 10 + 10\tilde{\delta}_i(1-p) + 10\tilde{\delta}_i^2(1-p)^2 + \cdots$$

Denominando $\delta_i = \tilde{\delta}_i(1-p)$ y realizando la suma de la progresión geométrica de infinitos términos:

$$V_i(s_I^C, s_{II}^C) = 10\frac{1}{1-\delta_i}.$$

En definitiva, en los juegos repetidos infinitamente podemos interpretar $\delta_i$ como un factor de descuento generalizado para el jugador $i$, cuyo valor viene determinado por:

1. el grado de impaciencia de dicho jugador en relación con las ganancias futuras (reflejado a través del valor de $\tilde{\delta}_i$);
2. la probabilidad de que se alcancen dichas ganancias (reflejado a través del valor de $p$).

**▶ Ejercicio 5.4.5**

Determine la valoración que haría el jugador $I$ de una combinación de estrategias $(s_I^a, s_{II}^a)$ tal que se van alternando $(C, C)$ y $(\bar{C}, \bar{C})$ como desarrollo en cada etapa.

### Algunos ENPS del $DP(\infty)$

A difirencia del $DP(T)$, en $DP(\infty)$ no existe una última etapa (no se conoce el final del juego), por lo que siempre existe la posibilidad de que un jugador pueda ser castigado si se desvía del comportamiento cooperativo. La pregunta que surge de manera natural es si, mediante estrategias que incluyan castigos a las desviaciones, puede sostenerse la cooperación como resultado de equilibrio (si existen ENPS que supongan la cooperación mutua en cada etapa).

Consideremos, a modo de ejemplo, que cada uno de los jugadores adopta la estrategia que de-



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

nominábamos «del disparador» y denotemos a dicha combinación de estrategias por $(s_I^T, s_{II}^T)$. Si cada uno de los jugadores sigue $s_i^T$ el resultado será que la cooperación se sostiene a lo largo del tiempo y cada jugador obtendrá una ganancia de 10 *um* en cada etapa. La pregunta que nos hemos de hacer es si esa combinación de estrategias es un EN (ninguno de los jugadores tiene incentivos a desviarse de la estrategia elegida) y si, además, es un ENPS (no se trata de un EN basado en promesas o amenazas no creíbles).

Comencemos por analizar si se trata o no de un EN. Para ello consideremos que uno de los jugadores, por ejemplo el $II$, esta adoptando la estrategia del disparador y analicemos si adoptar ese mismo tipo de estrategia constituye una mejor respuesta por parte del jugador $I$ o no. Para ello resulta útil considerar la estrategia del disparador como si estuviera formada por dos partes: una primera que constituye un plan para la etapa inicial y todas las historias con cooperación previa, y una segunda que constituye una respuesta para el caso en que se rompa en algún momento la cooperación. Si tenemos en cuenta esta segunda parte («dejar de cooperar para siempre en el momento que observemos que el resultado de la etapa anterior no ha sido la cooperación mutua»), está claro que constituye la mejor respuesta una vez que se observa la ruptura de la cooperación, ya que la estrategia del otro jugador también tiene como respuesta el no cooperar nunca más. La pregunta que nos queda por resolver es por tanto la siguiente: ¿constituye la mejor respuesta cooperar en la primera etapa y en todas aquellas con historia previa de cooperación mutua? Para responder a esta pregunta es necesario comparar las ganancias que obtendría $I$ si se atiene a $s_I^T$ con las que obtendría si decidiese no cooperar en la primera etapa (o en cualquier otra con historia previa de cooperación mutua permanente). Denotemos por $s_I^D$ la estrategia en la que $I$ no coopera en la primera etapa y tampoco en ninguna de las posteriores (es lo mejor que puede hacer a partir de la segunda, ya que su no cooperación en la primera desencadena la no cooperación permanente por parte del $II$).

$$V_I(s_I^T, s_{II}^T) = 10 + 10\delta + 10\delta^2 + \cdots = 10(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots = 10\frac{1}{1-\delta}$$
$$V_I(s_I^D, s_{II}^T) = 15 + 5(\delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots) = 15 + 5\frac{\delta}{1-\delta}.$$

La condición para que comenzar cooperando sea la mejor respuesta será por tanto:

$$V_I(s_I^T, s_{II}^T) \geq V_I(s_I^D, s_{II}^T) \Leftrightarrow 10\frac{1}{1-\delta} \geq 15 + 5\frac{\delta}{1-\delta} \Leftrightarrow \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Por tanto, si se cumple esta condición adoptar la estrategia del disparador por parte del jugador $I$ si constituye una mejor respuesta a la adopción de la estrategia del disparador por parte del jugador $II$. Evidentemente el mismo análisis vale para el jugador $II$, por lo que podemos concluir que **la combinación de estrategias $(s_I^T, s_{II}^T)$ constituye un EN de $DP(\infty)$ siempre**


Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

**que se cumpla que** $\delta \geq \frac{1}{2}$. Es importante recordar que el valor de $\delta$ depende del grado de impaciencia de los jugadores y de la probabilidad que estos asignan a que la situación de interdependencia estratégica se mantenga en el futuro. La exigencia de un valor de $\delta$ elevado hay que interpretarla en términos de que los jugadores han de valorar suficientemente el futuro (no ocurriría así en un país en guerra, una empresa al borde de la suspensión de pagos,...) y de que los jugadores han de asignar una probabilidad alta a que se vuelvan a enfrentar a esa situación en el futuro.

**▶ Ejercicio 5.4.6**

Determine la ganancia media por etapa para el jugador $I$ asociada a las siguientes combinaciones de estrategias:

1. $(s_I^T, s_{II}^T)$
2. $(s_I^D, s_{II}^T)$
3. $(s_I^D, s_{II}^D)$

**Solución 5.4.1** *En general, dado el valor presente asignado por un jugador al flujo de ganancias derivado de una determinada combinación de estrategias, $V_i(s_i, s_j)$, denominamos ganancia media por etapa a una cantidad $\bar{u}_i$ tal que si la recibiera en cada uno de los periodos daría lugar al mismo valor presente. Resulta sencillo demostrar que para determinar la ganancia media por etapa será suficiente con multiplicar el valor presente del flujo de ganancias correspondiente por $1 - \delta_i$:*

$$\bar{u}_i(1 + \delta_i + \delta_i^2 + \delta_i^3 + \cdots) = V_i(s_i, s_j) \Leftrightarrow \bar{u}_i \frac{1}{1 - \delta_i} = V_i(s_i, s_j) \Leftrightarrow \bar{u}_i = (1 - \delta_i)V_i(s_i, s_j).$$

*Este resultado es útil porque nos permite comparar la situación de los jugadores ante la elección de distintas combinaciones de estrategias en términos de ganancias medias por etapa.*

*Para las tres combinaciones de estrategias del ejercicio tendríamos:*

1. $\bar{u}_I = \bar{u}_{II} = 10.$
2. $\bar{u}_I = 15 - 10\delta;\ \bar{u}_{II} = 5\delta.$
3. $\bar{u}_I = \bar{u}_{II} = 5\delta.$

Hemos comprobado, por tanto, que, bajo determinadas condiciones, el par de estrategias $(s_I^T, s_{II}^T)$ constituye un EN de $DP(\infty)$. Nos queda por comprobar si constituye un ENPS o no.

En primer lugar hemos de darnos cuenta de que los subjuegos del $DP(\infty)$ son exactamente iguales que el juego completo. Además, si los jugadores están adoptando la estrategia del disparador podemos dividir los subjuegos en dos tipos en función de las combinaciones de estrategias (parciales) que les asigna $(s_I^T, s_{II}^T)$:



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1. Aquellos subjuegos que tienen una historia de cooperación previa continuada: a estos subjuegos se les asigna la estrategia del disparador, la cual ya hemos visto que es un EN siempre que $\delta$ sea suficientemente grande.

2. Aquellos subjuegos que siguen a historias que contienen la no cooperación en algún momento: a estos subjuegos $(s_I^T, s_{II}^T)$ les asigna una estrategia por parte de cada jugador consistente en no cooperar en ninguna de las etapas con independencia de lo que haga el otro jugador. Es inmediato comprobar que este par de estrategias también es un EN para estos subjuegos.

Por tanto, $(s_I^T, s_{II}^T)$ asigna un EN a cada uno de los subjuegos lo que nos permite concluir que también es un ENPS.

Resumiendo: **Si $\delta$ es suficientemente grande la adopción de estrategias del disparador por parte de ambos jugadores lleva a que la cooperación mutua en cada una de las etapas se sostenga como un ENPS de $DP(\infty)$.**

### El teorema *Folk*

Hemos visto que la adopción por parte de cada uno de los jugadores de la estrategia del disparador consituye un ENPS. De la misma manera si los dos jugadores adoptasen una estrategia consistente en no cooperar nunca, también podríamos demostrar que constituye un ENPS de $DP(\infty)$. Parece lógico que nos preguntemos que otras combinaciones de estrategias se sostendrían como ENPS para $DP(\infty)$ y bajo que condiciones.

**► Ejercicio 5.4.7**

Determine las condiciones que han de darse para que la adopción de la estrategia *ojo por ojo*, $(s_I^o, s_{II}^o)$, por parte de cada uno de los jugadores constituya un EN para el dilema del prisionero generalizado del Ejercicio 5.5.

Podríamos analizar otras muchas combinaciones de estrategias y demostrar que con $\delta$ suficientemente grande constituyen no sólo EN, sino también ENPS. Estamos, por tanto, ante una situación de multiplicidad de equilibrios ante la cual parece relevante que intentemos responder a la siguiente pregunta, ¿qué ganancias medias por etapa cabe esperar que puedan alcanzar los jugadores cuando juegan un ENPS en el $DP(\infty)$?

La respuesta sería que, para $\delta$ suficientemente cercano a 1, cualquier vector con ganancias medias por etapa mayores que 5 para cada jugador (mayores que las ganancias del EN del juego de etapa) y que sea *factible* se puede sostener como un ENPS.

El resultado anterior no se cumple sólo en el caso del $DP(\infty)$ sino que se puede generalizar a cualquier juego repetido infinitamente, $G(\infty)$:

**Resultado 5.4.4 (Teorema Folk)** *Considere un juego repetido infinitamente cualquiera $G(\infty)$. Si existe una combinación de estrategias para el juego de etapa que sea EN y tenga una ganancia asociada para cada jugador $w_i$, entonces cualquier vector de ganancias factibles, $\mathbf{v}$, con $v_i > w_i$ $\forall i$ puede sostenerse como un ENPS siempre que $\delta$ tome un valor suficientemente próximo a 1.*

El resultado anterior utiliza el concepto de ganancias factibles, el cual aún no hemos definido. En general, dado el juego de etapa $G$, llamamos factibles a una combinación de ganancias $(v_1, \ldots, v_n)$ si constituye una combinación convexa (es decir, una media ponderada donde las ponderaciones son no-negativas y suman la unidad) de las ganancias correspondientes a las combinaciones de estrategias puras de $G$. Por ejemplo, dados los pagos que venimos utilizando en el DP las ganancias factibles serían las recogidas en la Figura[GF]:

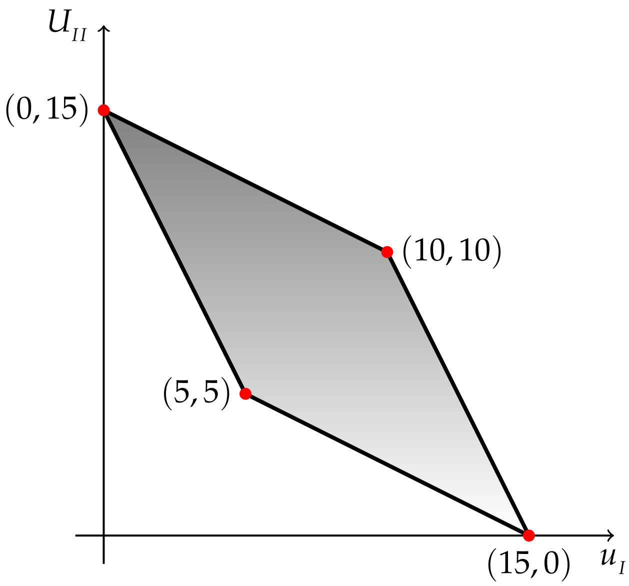


**Figura 5.4.** ***Conjunto de ganancias factibles para el DP(2) de la Figura 5.4.1.***

Por tanto, el teorema Folk lo que nos dice es que de ese conjunto de ganancias factibles todas las que suponen mejoras paretianas respecto a las ganacias del EN del juego de etapa son sostenibles como ENPS siempre que $\delta$ sea suficientemente grande:

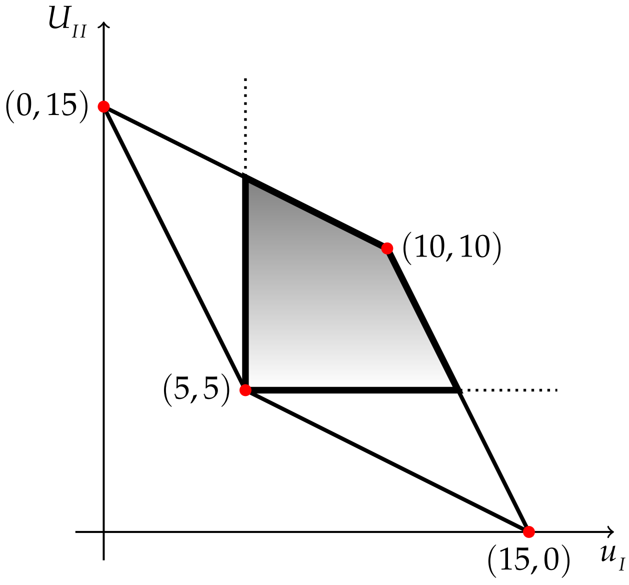


**Figura 5.5.** ***El teorema Folk para el DP(2): ganancias medias por etapa que son sostenibles como ENPS para $\delta$ suficientemente grande.***

## 5.5 Ejercicios

### ▶ Ejercicio 5.5.1

Dos individuos están implicados en la disputa de una posesión a la cuál atribuyen los dos el mismo valor de 100 *um*. Es conocimiento común que ambos jugadores tienen que decidir si renuncian o no a dicha posesión y el momento en que lo hacen. En concreto los jugadores comienzan decidiendo de manera simultánea si renuncian inmediatamente o no lo hacen. Si el jugador $i$ renuncia y el $j$ no la posesión pasa enteramente a manos de $j$ y si los dos renuncian se les entrega la mitad a cada uno. En caso de que ninguno de los dos renuncie, cada uno de ellos tiene que pagar 40 *um* y se repite el proceso anterior, con la única diferencia de que si ninguna de los dos ha renunciado cada uno de ellos recibe 50 *um* y se acaba el juego. Se pide:

1. Haga un esbozo de la forma extensiva del juego.
2. Represente el juego en su forma normal o estratégica
3. Determine el resultado por inducción hacia atrás.

### ▶ Ejercicio 5.5.2

Determine el resultado por inducción hacia atrás y el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del modelo de Stackelberg con dos seguidoras. Suponga que se dan las mismas condiciones de demanda y de costes vistas anteriormente y que las dos seguidoras han de decidir de manera simultánea la cantidad que sacan al mercado una vez observan la cantidad que ha sacado la líder. Generalice a continuación los resultados para el caso de $n$ seguidoras.

### ▶ Ejercicio 5.5.3

Una determinada empresa tiene el monopolio de producción del bien $X$, pudiendo producir la cantidad que desee a un coste unitario de $c$ *um*, esto es, su función de costes totales es de la forma:

$$CT^P(x) = cx,$$

donde $x$ es la cantidad total producida.

Dicha empresa no vende directamente a los consumidores, sino que suministra su producto a un determinado precio, $P_M$, a otras empresas distribuidoras(minoristas) que se encargan de su venta al público. Cada minorista incurre además en un coste de distribu-



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

ción de $d$ u.m. por unidad de $X$ vendida:

$$CT_i^D(x_i^D) = (P_M + d)x_i^D.$$

La demanda final del producto por parte de los consumidores viene dada por la expresión:

$$P = a - X^D,$$

donde $x^D$ es la cantidad total sacada al mercado por los minoristas (suponga que sacan al mercado todo lo que le compran al productor).

**I.** Considere inicialmente que existen dos distribuidores del producto que compiten entre sí *à la Cournot* (hacen sus pedidos al productor de manera simultánea) y responda a cada uno de los siguientes apartados:

- **a.** Realice un esbozo del juego.
- **b.** Determine el resultado por inducción hacia atrás.
- **c.** Determine el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

**II.** Generalice los resultados del apartado anterior al caso en que hay $n$ distribuidores.

### ▶ Ejercicio 5.5.4

Considere un mercado abastecido por dos únicas empresas, $A$ y $B$, en el que se dan las siguientes condiciones de demanda y de costes:

$$\begin{aligned} D: \quad & p = && 100 - X \\ C: \quad & CT_I(x_I) = && 10x_I, \quad i = A, B. \end{aligned}$$

La empresa $A$ esta considerando la posibilidad de instalar una nueva tecnología $T_x$, lo que le permitiría reducir sus costes unitarios de 10 *um* a 7 *um* , con la contrapartida del coste fijo de instalación de $F_x$ *um*.

**a.** Modelice como un juego la situación anterior, sabiendo que las empresas compiten en cantidades *à la Cournot*.

- **a.1.** Realice un esbozo de la forma extensiva del juego.
- **a.2.** Determine el/los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en función del valor que tome el parámetro $F_x$.



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

### ▶ Ejercicio 5.5.5

Una determinada empresa, $A$, esta considerando la posibilidad de entrar en un mercado que esta siendo abastecido en condiciones de monopolio por otra empresa $B$. La empresa $A$ conoce tanto la demanda de mercado como las condiciones de coste de $B$:

$$\begin{aligned} P &= 10 - X \\ CT_B(x_B) &= 3x_B. \end{aligned}$$

Por su parte la empresa $A$ sabe que puede producir la cantidad que desee a un coste unitario de 2 $um$ ($CT_A(x_A) = 2x_A$) y, además, la entrada en el sector le supone un coste fijo de $F$ $um$. En el caso de que la empresa $A$ decida entrar en el mercado ambas empresas competirán en el mercado *à la Cournot* (eligen la cantidad que sacan al mercado de forma simultánea). Se pide:

**a.** Realice un esbozo de la forma extensiva del juego

**b.** Determine el resultado por inducción hacia atrás y el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en función del valor de $F$.

**Solución.**

Se trata de unjuego dinámico con dos etapas e información imperfecta. En la primera etapa la empresa $A$ tiene que decidir si entrar ($e$) o no entrar ($\bar{e}$); en el caso en que decida entrar, en la segunda etapa las dos empresas competirían *à la Cournot*. Podemos resolverlo mediante la inducción hacia atrás.

Se resuelve primero el juego simultáneo de la segunda etapa que recoge la competencia a la Cournot si entra $A$. Por la solución vista en clase para el modelo de Cournot con costes asimétricos ($\hat{x}_i = \dfrac{a - 2c_i + c_j}{3b}$), sabemos que las cantidades de equilibrio serían $\hat{x}_A = 3$ y $\hat{x}_B = 2$. A partir de ahí se calculan los beneficios que obtendría $A$ en esta segunda etapa si decidiese entrar, los cuales serían de $9 - F$ $um$.

Con esta información ya estamos en condiciones de resolver la primera etapa: $A$ entrará si $F \leq 9$, no haciéndolo en caso contrario.

Por tanto, si $F \leq 9$ el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos vendrá dado por el par de estrategias $(\hat{s}_A, \hat{s}_B) = [(e, 2), 3]$, mientras que si $F > 9$ vendrá dado por $(\hat{s}_A, \hat{s}_B) = [(\bar{e}, 2), 3]$.

### ▶ Ejercicio 5.5.6

A tres individuos, $I$, $II$ y $III$ se les ofrece la posibilidad de repartirse 1 000 $um$ de acuerdo con el siguiente procedimiento. El individuo $I$ ha de hacer una propuesta de reparto. A continuación los individuos $II$ y $III$ han de decidir de manera simultánea si la aceptan o no, dando lugar a las siguientes consecuencias:

- Si los dos aceptan se lleva a cabo la propuesta del $I$ .
- Si ninguno de los dos la acepta, el $II$ recibe 300 $um$ y el $III$ 700 $um$, no recibiendo cantidad alguna el jugador $I$.
- Si uno de los jugadores la acepta pero el otro no, el jugador $I$ y el que ha aceptado reciben lo recogido en la propuesta del $I$, mientras que el que no la ha aceptado recibe 100 $um$.

1. Represente esta situación de interdependencia estratégica como un juego en forma extensiva.
2. Explique como obtendría la representación en forma normal a partir de la representación en forma extensiva.
3. Determine un resultado por inducción hacia atrás.
4. Determine un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

**Solución.**

Sea $\mathbf{r} \equiv (r_I, r_{II}, r_{III})$ la propuesta del jugador $I$, teniendo que cumplirse que $r_I + r_{II} + r_{III} = 1000$. Para cada $\mathbf{r}$ nos encontraremos con un juego simultáneo entre $II$ y $III$ cuya forma estratégica sería de la forma:

| | $a$ | $\bar{a}$ |
|---|---|---|
| $a$ | $r_{II}, r_{III}$ | $r_{II}, 100$ |
| $\bar{a}$ | $100, r_{III}$ | $300, 700$ |

Se trata, por tanto, de un juego dinámico con información imperfecta que podemos resolver aplicando la inducción hacia atrás. La intuición que hay detrás de este procedimiento es que el jugador $I$ antes de decidir tratará de anticipar como responderán los otros dos a cada posible propuesta. Como $II$ y $III$ deciden de forma simultánea, lo lógico es que sus expectativas sean que la segunda etapa se desarrollará conforme a un equilibrio de Nash. Además, al jugador $I$ le interesa que en el equilibrio de esa segunda etapa al menos uno de los otros



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

acepte su propuesta. Teniendo todo esto en cuenta, se puede comprobar que el resultado por inducción hacia atrás más interesante[4] vendría dado por $[(700-\epsilon, 300+\epsilon, 0), (a, \bar{a})]$. Es decir, en la primera etapa el $I$ le ofrece al $II$ un poco más de 300 $um$, para que domine para él aceptar la propuesta, y no le ofrece nada al jugador $III$.

El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos asociado a dicho resultado por inducción hacia atrás viene dado por una combinación de estrategias $(\hat{s}_I, \hat{s}_{II}, \hat{s}_{III})$ donde:

- $\hat{s}_I = (700, 300, 0)$
- $\hat{s}_{II} = a$ si $r_{II} > 300$, $\bar{a}$ en caso contrario.
- $\hat{s}_{III} = a$ si $r_{III} > 700$, $\bar{a}$ en caso contrario.

**▶ Ejercicio 5.5.7**

Dado el juego adjunto $G$ busque una combinación de estrategias para $G(2)$ que sea $ENPS$ y en la cual los jugadores eligen $(A, I)$ en el primer periodo.

| | $I$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $8,8$ | $0,9$ | $0,0$ |
| $M$ | $9,0$ | $0,0$ | $3,1$ |
| $B$ | $0,0$ | $1,3$ | $3,3$ |

**▶ Ejercicio 5.5.8**

Suponga para el ejercicio anterior que ambos jugadores descuentan las ganancias de la segunda etapa por un mismo factor de descuento $\delta$ y determine para que valores del mismo la combinación de estrategias propuesta seguiría siendo un ENPS.

**▶ Ejercicio 5.5.9**

Determine la condición que ha de cumplir $\delta$ para que la combinación de estrategias

[4] Si en la propuesta del $I$ se cumple que $r_{II} \in [100, 300]$ y $r_{III} \in [100, 700]$ el juego de la segunda etapa tendría dos equilibrios de Nash, $(a, a)$ y $(\bar{a}, \bar{a})$. Sin embargo, al ser este segundo equilibrio Pareto dominante, hace poco atractivas para $I$ este tipo de propuestas, ya que supondría para él correr el riesgo de que no aceptase ninguno.

$(s_I^T, s_{II}^T)$ constituya un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de $DP(\infty)$ cuando el juego de etapa viene dado por la matriz:

| | $C$ | $\bar{C}$ |
|---|---|---|
| $C$ | $x, x$ | $0, y$ |
| $\bar{C}$ | $0, y$ | $z, z$ |

donde, $y > x > z > 0$ (Bajo esta condición, se trata de un *dilema del prisionero generalizado*, en la medida que los pagos están parametrizados).

**Solución.**

Para resolver este ejercicio hay que seguir los mismos pasos que hemos dado en clase con el juego del Ejercicio 5.4.1, esto es, comprobar primero las condiciones para que sea un equilibrio de Nash y explicar a continuación que esas mismas condiciones implican que será perfecto en subjuegos. La única diferencia será que al obtener el valor del factor de descuento generalizado nos quedará en función del valor de los parámetros $\delta \geq \dfrac{y-x}{y-z} \equiv \bar{\delta}$. Siempre que el factor de descuento tome un valor mayor que $\bar{\delta}$ la combinación de estrategias $(s_I^T, s_{II}^T)$ constituirá un ENPS.

Cuanto mayor sea el valor crítico del factor de descuento, $\bar{\delta}$, más difícil es de sostener la cooperación. En este caso vemos que será necesario un factor de descuento más elevado cuanto mayor sea la «tentación» a desviarse a corto plazo (viene determinada por $y - x$) y cuanto menor sea el coste de la ruptura de la cooperación (lo recoge indirectamente $y - z$).

**▶ Ejercicio 5.5.10**

Considere el juego repetido infinitamente en el que el juego de etapa es el modelo de duopolio de Cournot con las siguientes condiciones de mercado:

$$p = a - X; \qquad CT_i(x_i) = cx_1,\ i = 1, 2.$$

Suponga que cada una de las empresas adoptase una estrategia *trigger* del siguiente tipo: «en la primera etapa sacar la mitad de la cantidad de monopolio; en la t-ésima seguir sacando esta cantidad si la historia previa es de cooperación mutua, en caso de que se



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

rompa la ccoperación pasar a sacar la cantidad de Cournot para siempre». Determine las condiciones para que una combinación de estrategias de este tipo constituya un ENPS. Comente detenidamente los resultados.

**Solución.**

Ver páginas 102-103 del libro de R. Gibbons.



Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria