Teoría de Juegos

Teoría de Juegos

Tema 1.-

Introducción

Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria
alvarezp@unican.es

Índice general

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1.1 ¿Qué es la teoría de juegos?

La *teoría de juegos* es una herramienta para el estudio de las situaciones de interdependencia estratégica. En esta pregunta se hace una primera aproximación a la materia. En primer lugar, se describe lo que se entiende por una situación de interdependencia estratégica y se ponen algunos ejemplos, prestando especial atención a la presencia de este tipo de situaciones en la economía. En segundo lugar, se presentan las características fundamentales de su método de trabajo y se explican las diferencias entre el enfoque cooperativo y el no cooperativo. Por último, se hace una breve referencia a su desarrollo histórico.

1.1.1 Objeto

La teoría de juegos tiene por objeto de estudio las situaciones de *interdependencia estratégica*. En este tipo de situaciones cada uno de los decisores de un grupo es consciente de que las consecuencias de su decisión dependen de las que tomen los demás. El nombre de teoría de juegos proviene precisamente del hecho de que muchas de las situaciones que denominamos juegos en el lenguaje común, son situaciones más o menos sencillas de interdependencia estratégica: cada jugador tiene que decidir que hacer sabiendo que dicha elección será «buena» o «mala» en función de lo que hagan los demás. En esa interacción entre los jugadores desempeñan un papel esencial las denominadas *reglas de juego*, que son las que determinan en última instancia las condiciones en que deciden los jugadores y las consecuencias de sus decisiones.

La vida social, en sus distintos ámbitos, esta llena de situaciones en las que se produce interdependencia entre las decisiones de distintos individuos u organizaciones en el marco de unas determinadas reglas más o menos explícitas. De como toman esos individuos u organizaciones sus decisiones, y de como influyen en las mismas las reglas en cuyo marco deciden, es precisamente de lo que se ocupa la teoría de juegos. Debemos considerarla, por tanto, como una herramienta capaz de ayudarnos a comprender que factores influyen en la forma en que se desarrollan dichas situaciones.

Si nos preguntamos por la utilidad de estudiar teoría de juegos, caben varias respuestas:

- para ser buenos estrategas, esto es, como instrumento que nos ayude a elegir la estrategia óptima en las distintas situaciones de interdependencia estratégica en que nos veamos involucrados;
- para comprender los determinantes del comportamiento de los decisores en las distintas situaciones de interdependencia estratégica y, a partir de ahí:
  - predecir su comportamiento bajo unas determinadas reglas;

- diseñar marcos de interacción (reglas) en el que las estrategias de los jugadores lleven a los resultados deseados (*diseño de mecanismos*).

Interdependencia estratégica y economía

En tanto que herramienta para el análisis de las situaciones de interdependencia estratégica, la teoría de juegos no sólo es utilizada en el campo de la economía, sino también en otros muchos como las ciencias políticas, la psicología, el derecho, la filosofía e incluso la biología evolutiva o la informática. Sin embargo, desde sus inicios ha sido en el ámbito de la economía donde ha presentado un mayor desarrollo. Aunque, como veremos posteriormente, presenta una mayor afinidad con la microeconomía, hoy en día constituye una herramienta imprescindible en las distintas ramas de la economía (macroeconomía, economía de la empresa, finanzas, economía laboral,. . .).

Entendida la economía como la ciencia que se ocupa de como canalizan las distintas sociedades las fuerzas que se derivan de la escasez de recursos, no puede sorprendernos el éxito que en ella ha tenido el uso de la teoría de juegos. Escasez implica *conflicto* por apropiarse de lo escaso, pero a la vez induce a la *cooperación* en la medida que ésta permite un mejor aprovechamiento de esos recursos. Precisamente para esto, para el estudio de la cooperación y del conflicto, es para lo que resulta útil la teoría de juegos.

La potencialidad del uso de la teoría de juegos en la economía se pondrá de manifiesto a medida que nos vayamos familiarizando con su método y a través de las distintas aplicaciones que iremos viendo a lo largo del curso. En cualquier caso, resulta inmediato asociarla con el estudio de los mercados oligopolistas, de las subastas, de la negociación colectiva, de las relaciones comerciales entre países, ... La interdependencia estratégica esta presente prácticamente en todos los ambitos de decisión de los agentes privados y de la intervención pública en la economía. En el Ejercicio 1.1.1 se pide una breve reflexión sobre ello.

► **Ejercicio 1.1.1**

Ponga algún ejemplo de situación de interdependencia estratégica relacionado con:

- los distintos ámbitos de decisión de las empresas (con sus clientes, con sus trabajadores, con sus competidores,. . .)
- los distintos ámbitos de decisión de los ciudadanos (como consumidores o usuarios, como trabajadores, como contribuyentes, como votantes,. . .)
- los distintos ámbitos de intervención pública en la economía (regulación, política fiscal, política monetaria, . . .)

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1.1.2 Método

La forma de trabajar en la teoría de juegos consiste básicamente en la elaboración y manejo de un tipo especial de modelos que se denomina genéricamente *juego*. Un juego es, por tanto, un *modelo* de una situación de interdependencia estratégica. Como ocurre con cualquier otro modelo, el objetivo es utilizar un proceso de *abstracción* que nos lleve de la situación real a un sistema de relaciones más sencillo, pero más claro y preciso, en cuyo marco se verá facilitado el *análisis deductivo*. Cuando trabajamos con nuestros modelos, esperamos que nos permitan descubrir alguna de las fuerzas subyacentes a la situación real de interdependencia estratégica que de otro modo podrían pasarnos desapercibidas. Evidentemente, los resultados derivados del modelo requieren de una interpretación para ser aplicados a la situación real que pretende representar, en la que siempre actuarán otras fuerzas que hemos pasado por alto en la construcción y manejo del modelo.

Aunque en estos apuntes se pone el énfasis en las aplicaciones de la teoría de juegos (en especial al ámbito de la economía), debemos señalar que la teoría de juegos es considerada como una rama de las matemáticas. El uso de las matemáticas nos obliga a la definición precisa de los conceptos y de los supuestos de partida, a la vez que nos facilita el proceso deductivo que nos lleva de esos supuestos a una serie de conclusiones consistentes con los mismos.

Aunque, como ya hemos señalado en el apartado anterior, hoy en día la teoría de juegos se utiliza prácticamente en todas la ramas de la economía, presenta una mayor afinidad con el análisis microeconómico . El principio del *individualismo metodológico*, tan característico de la microeconomía, esta implícito también en buena parte de la teoría de juegos. El supuesto de *racionalidad* en la toma de decisiones y el concepto de *equilibrio* están presentes en la mayor parte de los juegos que analizaremos, de la misma manera que lo estaban en los modelos microeconómicos ya vistos. El análisis del funcionamiento de las estructuras básicas de mercado constituye un buen ejemplo de ello. Los modelos básicos de competencia perfecta y monopolio tienen en común la ausencia de interdependencia estratégica; en el caso del monopolio por la presencia de un único oferente y en el de la competencia perfecta por el supuesto de *atomismo* de los agentes. El recurso a la teoría de juegos surge de manera natural al tratar de extender este tipo de modelos a una situación en con un número reducido de oferentes, cada uno de ellos consciente de que sus resultados dependen de lo que haga el resto.

Dos enfoques distintos: juegos cooperativos frente a juegos no cooperativos

Los modelos de la teoría de juegos se agrupan en dos grandes grupos, cada uno de los cuales adopta un enfoque diferente a la hora de analizar las situaciones de interdependencia estratégica. Los denominados *juegos no cooperativos*, son modelos en los que se parte de una especificación detallada de las condiciones en las que deciden los jugadores (las reglas del juego) y el objetivo es analizar el comportamiento que cabe esperar por parte de cada uno de ellos. En los denominados *juegos cooperativos*, se parte de de la especificación de los resultados que obtendrían las posibles coaliciones de jugadores y el objetivo es tratar de analizar cuáles de ellas cabe esperar que se sostengan de acuerdo con determinados criterios. Podríamos decir que, mientras la teoría de los juegos no cooperativos se centra más en el procedimiento (en como deciden los jugadores), la teoría de los juegos cooperativos se centra más en los resultados, sin entrar en detalles sobre cómo se alcanzarán. La denominación utilizada puede llevar a confusión, ya que en la cooperación es objeto de estudio de los juegos no cooperativos, de la misma manera que la competencia entre los jugadores está presente en muchos juegos cooperativos. Lo importante es recordar que son dos maneras distintas de enfocar las situaciones de interdependencia estratégica. El Ejemplo 1.1.1 presenta un juego sencillo construido bajo el enfoque no cooperativo y el Ejemplo 1.1.2 uno construido bajo el enfoque cooperativo. La asignatura se centra en el estudio de los juegos no cooperativos y sus aplicaciones a la economía, si bien en el Tema 7 se hace una breve introducción al enfoque cooperativo.

Ejemplo 1.1.1 (Un juego no cooperativo: modelo de localización espacial de Hotelling)

El economista Harold Hotelling planteó en 1929 un modelo de localización espacial que ha alcanzado posteriormente una gran popularidad[a]. En dicho modelo, Hotelling planteaba una situación en la cual dos empresas que vendían un producto homogéneo a un precio dado tenían que decidir donde localizarse a lo largo de una ciudad lineal, cuya longitud puede normalizarse, sin pérdida de generalidad, a la unidad. Se supone también que los consumidores están uniformemente distribuidos a lo largo de la misma y tienen demandas unitarias (deciden a que empresa compran una única unidad del bien). Los consumidores incurren en un coste de transporte o de desplazamiento por lo que comprarán a la empresa que tengan más cerca. Si las dos empresas eligen la misma ubicación cada una de ellas abastecerá a la mitad de los consumidores.

Figura 1.1. ***Modelo de ciudad lineal de Hotelling con dos empresas.***

Bajo determinadas condiciones, no demasiado restrictivas, la idea de equilibrio, entendido como situación en la cual ambas empresas están satisfechas con su localización, es sufiente para «resolver» este juego. En efecto, sólo existe una localización posible en la que se cumpla que ninguna de ellas querrá moverse si la otra no lo hace: cuando ambas se sitúan en el centro de la ciudad. ¿Para que nos sirve este modelo? Para identificar una fuerza importante que influirá en situaciones parecidas a ésta y que se conoce como *principio de diferenciación mínima*. No se pretende en ningún caso que el modelo recoja perfectamente la situación real en toda su complejidad ni, por tanto, tampoco que la explique de manera perfecta. El proceso de abstracción implícito en la construcción del modelo y el proceso deductivo basado en el concepto de equilibrio, constituyen conjuntamente una herramienta útil en tanto nos permite descubrir fuerzas que operan en las situaciones reales y que de otra manera nos pasarían desapercibidas. Una vez identificadas esas fuerzas, queda la tarea de valorar su influencia en situaciones reales concretas. Si el modelo de localización de Hotelling ha tenido éxito, es porque de una manera muy sencilla pone de manifiesto una fuerza que esta presente en muchas situaciones reales (programas de partidos políticos, localización de las gasolineras a lo largo de una autopista, horarios de salida de distintos medios de transporte, programación cadenas de televisión,...).

[a] Hotelling, H. (1929). The stability of competition. *The Economic Journal*, *39*(153), 41-57.

Ejemplo 1.1.2 (Un juego cooperativo: modelo de emparejamientos estables de Gale-Shapley)

El premio nobel de Economía correspondiente al año 2012 se otorgó conjuntamente a los economistas matemáticos Alvin E. Roth y Lloyd S. Shapley *«for the theory of stable allocations and the practice of market design»*[a]. El ejemplo que proponemos aquí esta tomado de un artículo, publicado hace 50 años, del que Shapley es coautor y que es considerado como una de sus aportaciones más relevantes[b]. Los autores plantean una situación en la cual se desea formar parejas a partir de un conjunto de tres hombres α, β y γ y tres mujeres A, B y C, cuyas preferencias vienen recogidas en la siguiente matriz:

	A	B	C
α	1,3	2,2	3,1
β	3,1	1,3	2,2
γ	2,2	3,1	1,3

Figura 1.2. Matriz de preferencias del ejemplo de Gale-Shapley

De entre todas las posibles formas de emparejamiento, se plantean como objetivo la exis-

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

tencia e identificación de aquellas que sean *estables* y *óptimas* en un sentido que ellos mismos definen. Consideran un conjunto de emparejamientos *inestable* si, dadas las parejas formadas, existe al menos un hombre i y una mujer j que no están emparejados entre sí y, sin embargo, ambos preferirían al otro antes que a su actual pareja. Los autores demuestran en el artículo que siempre existe al menos una forma de emparejamientos que es estable y proponen un «*mecanismo de aceptación diferida*» que siempre permite seleccionar un conjunto de emparejamientos que que será estable. Este mecanismo se ha utilizado posteriormente para asignar médicos internos a hospitales, alumnos a colegios, deportistas a equipos, ... El mecanismo propuesto (fácilmente implementable en una aplicación informática) consistiría en proceder de la siguiente forma:

Paso 1: Cada hombre hace una petición de matrimonio a una mujer. Cada mujer acepta temporalmente la propuesta más preferida de entre todas las que le llegan.

Paso k: Cada hombre que no haya sido aceptado en la etapa anterior hace una propuesta a la mujer preferida de entre las que no lo hayan rechazado previamente.

Parada: El proceso finaliza cuando todos los hombres han visto aceptada una propuesta.

El mecanismo se puede aplicar de manera idéntica haciendo que sean las mujeres las que proponen primero. Los autores también demuestran que el emparejamiento seleccionado por su algoritmo será óptimo para la parte que realiza las propuestas, en el sentido de que cada uno de sus miembros estará al menos tan bien como lo estaría en cualquier otro emparejamiento estable. Se deja como ejercicio la determinación del conjunto de emparejamientos que sería seleccionado en cada caso para las preferencias recogidas en la Figura 1.2.

[a] El siguiente enlace proporciona información adicional sobre las aportaciones por las que les ha sido concedido el galardón:
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2012/advanced-economicsciences2012.pdf .

[b] Gale, D. y Shapley, L. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematican Monthly*, *69*(1), 9-15.

1.1.3 Breve referencia histórica

Aunque detrás de muchos de los desarrollos actuales de la teoría de juegos se encuentran aportaciones que se remontan al siglo XVIII e incluso antes [1], el embrión de lo que es hoy en día la teoría de juegos comenzó a formarse en los años 20 del siglo pasado. De esta primera etapa destacan las contribuciones de los matemáticos Émile Borel (1871-1956) y John von Neumann (1903-57). Precisamente este autor, junto con el economista Oskar Morgens-

[1] Para una presentación esquemática puede consultar la página web *An Outline of the History of Game Theory*:http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm .

ter (1902-76), sentaron las bases para el posterior desarrollo de la disciplina con la publicación en 1944 de la obra *Theory of Games and Economic Behaviour*[2]. Poco después John F. Nash (1928-) realizó una serie de aportaciones que serían cruciales para el desarrollo posterior de la disciplina, en particular el concepto de equilibrio de Nash[3].

[2]Von Neumann y Morgenstern, 1944.

[3] Para ver la transcendencia del concepto de equilibrio de Nash en la historia de la teoría económica puede consultarse la siguiente referencia bibliográfica: Myerson, R. B. (1999). Nash equilibrium and the history of economic theory. *Journal of Economic Literature*, *37*(3), 1067-1082.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1.2 Juegos no cooperativos: estructura y formas de representación

1.2.1 Juegos no cooperativos: estructura y tipos

La formulación adecuada de un modelo en teoría de juegos bajo el enfoque no cooperativo requiere hacer explícitos los siguientes elementos:

1. **El conjunto de jugadores**. Supondremos que este conjunto es finito y que consta de n jugadores propiamente dichos y de un pseudojugador «0» al que nos referiremos como *la naturaleza*:

   $$J = \{0, 1, 2, \cdots, n\}.$$

   La inclusión de la naturaleza permite incorporar al modelo factores que influyen en el desarrollo del juego pero que no son controlables por ninguno de los jugadores. Un *movimiento* de la naturaleza consistirá en la realización de uno de los distintos *estados de la naturaleza posible*, cada uno de los cuales puede darse con una determinada probabilidad.

2. **Las reglas del juego**. Establecerán de manera precisa:

   - el orden en que ha de mover cada jugador, así como las acciones que estarán a su alcance y la información disponible cada vez que le toque mover.
   - la relación entre los posibles desarrollos del juego y los resultados obtenidos por cada jugador.

   La especificación adecuada de las reglas del juego constituye un elemento clave en la elaboración del modelo (del juego).

3. **Las preferencias de los jugadores en relación a los desarrollos posibles del juego**. Como se acaba desarrollando un juego depende de las decisiones del conjunto de jugadores (incluidos los *movimientos de la naturaleza*), por lo que indirectamente también supondrá la existencia de una relación de preferencias sobre las distintas combinaciones posibles de decisiones. Normalmente representaremos numéricamente dichas preferencias a través de una función que denominaremos *función de pagos*.

Tipos de juegos no cooperativos

La primera gran clasificación dentro de los juegos no cooperativos se hace a partir del tipo de información que tienen los jugadores sobre la estructura del juego (conjunto de jugadores, reglas del juego y preferencias de cada jugador). Se dice que un juego es de

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

información completa cuando la estructura del juego es **conocimiento común**[4]: todos los jugadores la conocen, todos saben que todos los jugadores la conocen, todos saben que todos saben que todos la conocen,. . . . Por oposición, se dice que un juego es de **información incompleta** cuando no se cumple alguna de las condiciones anteriores. La forma más habitual de incorporar la información incompleta es a partir de algún de tipo de imperfección que hace que las preferencias de los jugadores no sean conocimiento común (algún jugador no conoce la función de pagos del otro, algún jugador no sabe si los otros conocen su función de pagos,. . .).

Tomando de nuevo como referencia la información disponible por lo jugadores, pero en este caso en relación a los movimientos del resto de jugadores, se distingue entre juegos de **información perfecta** (cada jugador conoce perfectamente los movimientos previos de otros jugadores cada vez que le toca mover) y juegos de **información imperfecta** (algún jugador ha de realizar un movimiento sin conocer la elección de algún otro).

Como se verá en su momento, la denominada **transformación de Harsanyi** permite convertir los juegos de información incompleta en juegos de información imperfecta.

Además de las clasificaciones anteriores, asociadas a la información disponible por los jugadores, existen otras muchas entre las que cabe mencionar las siguientes:

- **Juegos de suma cero** (o estrictamente competitivos) frente a **juegos de suma no nula**. En los juegos de suma cero las ganancias de un agente son siempre a costa de las pérdidas del otro. Este tipo de juegos desempeño un papel fundamental en el desarrollo teórico inicial de la teoría de juegos, aunque poco a poco han ido perdiendo protagonismo debido a la mayor relevancia práctica de los juegos de suma no nula.

- **Juegos estáticos** frente a **juegos dinámicos**. En los juegos estáticos los jugadores eligen una sóla vez y de forma simultánea (constan de una sola etapa), por lo que se trata siempre de juegos con información imperfecta. Por el contrario, en los juegos dinámicos o multietápicos almenos un jugador acumula información sobre la decisión previa de otro u otros jugadores.

[4]Cuando determinada información es conocida por todas las partes se dice que es **conocimiento mutuo**. El conocimiento mutuo es una condición necesaria pero no suficiente para que se de el conocimiento común.

1.2.2 Formas de representación

De cara a facilitar el análisis teórico se recurre a dos formas de presentación de la información relativa a la estructura del juego (jugadores, reglas y funciones de pagos) conocidas respectivamente como *forma extensiva* y *forma normal* o *forma estratégica*.

La representación en forma extensiva

La representación en forma extensiva consiste en una descripción detallada de la estructura secuencial de la toma de decisiones por parte de los jugadores y se desarrolla a partir del concepto teórico conocido como *árbol del juego*[5]. En este tema nos limitamos a presentar de manera informal la representación en forma extensiva mediante algunos ejemplos, dejando para más adelante la definición formal de la misma.

Ejemplo 1.2.1 Votaciones estratégicas

Dos individuos I y II han de decidir cual de entre tres proyectos públicos, A, B ó C , se lleva a cabo. Las preferencias de los jugadores son: $A \succ_I B \succ_I C$; $\quad B \succ_{II} A \succ_{II} C$ y el procedimiento para la elección es el siguiente: cada individuo tiene el derecho a vetar uno de los proyectos, haciéndolo en primer lugar el I y a continuación el II.

La representación en forma extensiva de este juego aparece recogida en la Figura 1.3. El árbol del juego permite recoger toda la información concerniente a la estructura del juego:

- Quienes son los *jugadores* (encima de cada nodo aparece el nombre del jugador al que le toca elegir entre las *ramas* que salen del mismo).
- El *orden en el que mueven* (el I en el nodo raíz y el II a continuación), las *alternativas de que disponen* cada vez que les toca mover (las ramas que salen del nodo correspondiente) y la *información de que disponen cada vez que les toca mover* (el II tendrá que decidir sabiendo que proyecto a vetado el I).
- Las *preferencias* de los jugadores, esto es, su valoración de los posibles desarrollos del juego. En este caso, a cada uno de los seis posibles desarrollos (trayectorias posibles desde el nodo raíz hasta los nodos terminales) le hemos asociado un vector con dos componentes. El primero de ellos representa la valoración del jugador I y el segundo la del jugador II. Para representar numéricamente las preferencias de ambos jugadores hemos adoptado el convenio de asignar un 2 al proyecto más

[5] En matemáticas el concepto de árbol hace referencia a un tipo especial de *grafo* (un conjunto de nodos y un conjunto de ramas que establecen relaciones entre dichos nodos) en el que no existen ciclos ni nodos inconexos.

preferido, un 1 al segundo más preferido y un 0 al menos preferido.

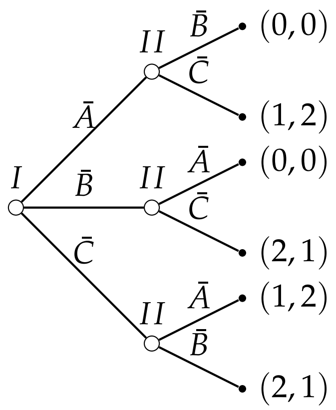

Figura 1.3. ***Votaciones estratégicas: el árbol del juego .***

Ejemplo 1.2.2

Dos individuos, I y II, se enfrentan al siguiente juego. Dada una baraja de 40 cartas, la mitad de las cuales son rojas y la otra mitad negra, el individuo I ha de elegir una de ellas al azar pudiendo mirar él su color pero no el jugador II. A continuación I tiene dos opciones:

1. Enseñar la carta. I recibirá 10 € de II si es roja, pero se los tendrá que pagar si es negra.
2. Hacer un *envite* doblando la apuesta. En este caso II tiene a su vez dos opciones:
   - Aceptar el envite, en cuyo I tendrá que darle 20 € si la carta es negra, pero será el quien tendrá que darle 20 € si es roja.
   - No aceptar el envite y pagar 10 € a I.

La representación en forma extensiva de este juego aparece recogida en la Figura 1.4. El juego empieza en el *nodo raíz* que en este caso es un *nodo de azar* ya que es la naturaleza la que elige entre dos estados posibles: color rojo o color negro. Cada uno de estos estados viene representado por una *rama* en la que se hace constar, además, la probabilidad del estado asociado. Al final de cada una de esas dos ramas aparece un *nodo de decisión* en el que es el jugador I el que decide si enseña la carta o hace un envite, opciones que aparecen representadas por las ramas L y $\bar{L}$. En el caso de que I elija L, sea cual sea el estado de la naturaleza, se acaba el juego. El *nodo terminal* asociado al desarrollo del juego RL recoge mediante un vector los pagos de los dos jugadores; el primer componente es el pago del jugador I y el segundo el del II. Lo mismo ocurre con el nodo terminal asociado al desarrollo NL aunque, lógicamente, los pagos son distintos. En el caso en

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

que uno decide hacer un envite, y sea cual sea de nuevo el movimiento de la naturaleza, aparece un nodo de decisión asociado al jugador II que ha de decidir si lo acepta o no. En cualquiera de los casos el juego termina y de nuevo aparecen los pagos asociados a los respectivos nodos terminales.

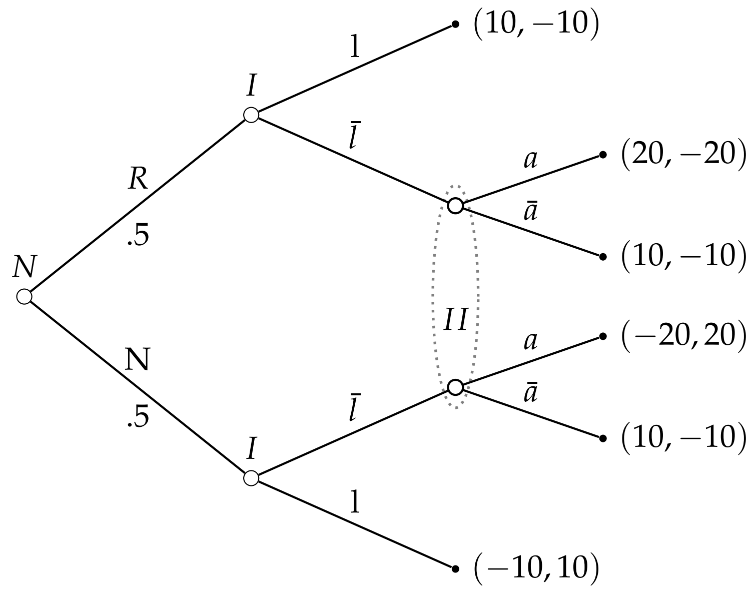

Figura 1.4. ***Árbol del juego para el Ejemplo 1.2.2 .***

Aunque pudiera parecer que ya esta descrita la estructura del juego, no es así ya que no se ha hecho explícita la información de que disponen los jugadores en el momento en que les toca mover. En concreto, el jugador II tendrá que tomar su decisión sin saber cual es el estado de la naturaleza. Para recoger esto se utiliza el concepto de *conjunto de información* que se corresponde con un conjunto de nodos con la propiedad de que el jugador al que pertenece dicho conjunto de información no sabe en cuál de ellos está. En la representación gráfica suele recogerse esa falta de información trazando una línea que englobe todos los nodos de un mismo conjunto de información. Los conjuntos de información de un jugador ofrecen una lista, desde el punto de vista del jugador a que corresponden, de todas las posibles situaciones o circunstancias en las que puede tener que tomar una decisión. En el ejemplo que estamos considerando el jugador II tiene un único conjunto de información que consta de dos nodos, lo que refleja la situación de que en el caso de que tenga que elegir no sabrá si la carta es roja o negra.

Definición 1.2.1 *Un juego es de* información perfecta *si todos los conjuntos de información constan de un único elemento. En caso contrario es de* información imperfecta.

La representación mediante el árbol del juego deja de ser práctica a medida que la estructura de los juegos se vuelve más compleja, aunque siempre resulta útil hacer un esbozo del mismo.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Ejemplo 1.2.3

A dos individuos se les ofrece la posibilidad de repartirse 10.000 *um* de acuerdo con el siguiente procedimiento. En primer lugar el individuo I hace una propuesta, si el II la acepta se lleva a cabo, en caso contrario se pierden 4.000 *um* y es el II el que hace una propuesta decidiendo el I si la acepta o no. Si la acepta se lleva a cabo y en caso contrario ninguno recibe nada.

La representación en forma normal o estratégica

Aunque la forma extensiva ofrece una descripción detallada de la situación de interdependencia estratégica, en muchas ocasiones resulta útil una descripción más compacta a partir de la denominada representación en forma normal o estratégica. La relación entre la forma extensiva y la forma estratégica queda establecida a partir del concepto de estrategia.

Definición 1.2.2 *Una* ***estrategia*** *para el jugador i es un plan de acción que le asigna un movimiento en cada una de las situaciones en las que le puede tocar mover, esto es, en cada uno de sus conjuntos de información.*

Dado este concepto de estrategia, un juego en forma extensiva admite una representación más compacta en la que únicamente es necesario hacer constar los siguientes elementos:

1. **El conjunto de jugadores**
2. **Los espacios de estrategias de cada uno de los jugadores**
3. **Las funciones de ganancias o pagos de cada jugador**

La representación en forma normal de un juego queda caracterizada por:

Esta representación se conoce como **forma normal o estrátegica** y nos referiremos a ella más formalmente como:

$$G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^{N}, \{U_i\}_{i=1}^{N} \rangle \tag{1.1}$$

donde S_i es el espacio de estrategias del jugador i, y donde las funciones de ganancias asocian a cada posible combinación de estrategias $\mathbf{s}$ el pago que recibe el jugador correspondiente:

$$\begin{aligned} U_i : \quad & \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R} \\ & \mathbf{s} \mapsto U_i(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

La representación en forma normal recoge en la complejidad de las estrategias la falta de detalle que supone respecto a la representación en forma extensiva (orden en que mueven

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

los jugadores, información de que disponen,. . .). Sin embargo, para los denominados juegos estáticos, en los que los jugadores eligen una sola vez y lo hacen de manera simultánea, son muy sencillas: sólo recogerán un movimiento u acción para cada jugador ya que ninguno de ellos tendrá información alguna sobre las decisiones de los otros cuando le toque *mover*.

► Ejercicio 1.2.1

Represente en forma normal los siguientes juegos: *Papel, piedra o tijeras*, *Pares o nones* y *el Dilema del prisionero*.

1.2.3 Relación entre la forma estratégica y la forma extensiva

El concepto de estrategia permite pasar cualquier juego en forma extensiva a su forma estratégica. En cambio, dado un juego en forma estratégica no siempre existe una representación única en forma extensiva. En cualquier caso, lo natural es partir de la forma extensiva (constituye la representación más detallada de la situación de interdependencia estratégica) a la forma normal.

► Ejercicio 1.2.2

Represente en forma extensiva el juego *Papel, piedra o tijeras*.

► Ejercicio 1.2.3

Dado el juego en forma extensiva que aparece en la figura adjunta, determine el conjunto de estrategias de cada uno de los jugadores y represéntelo en forma normal.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

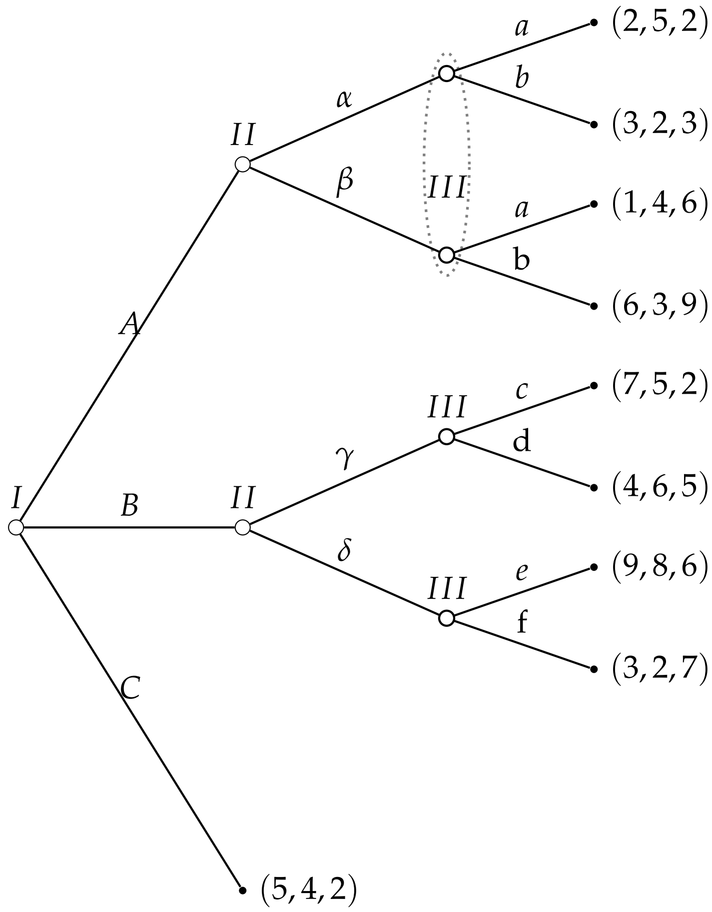

Figura 1.5. ***Juego en forma extensiva.***

1.3 De las preferencias a la elección: las funciones de pagos

Tanto en la en la representación en forma extensiva, como en la representación en forma estratégica, cada desarrollo posible del juego (cada combinación posible de estrategias) lleva asociado un vector de pagos. Hasta el momento nos hemos limitado a afirmar que dichos vectores recogen las preferencias de los jugadores en relación a los posibles desarrollos del juego, sin entrar en más detalles. Pasamos a preguntarnos ahora qué representan exactamente esos números y en qué medida es posible pasar de las preferencias de un jugador en relación a los posibles desarrollos del juego a sus preferencias en relación a sus estrategias disponibles (el objetivo último de un juego no cooperativo es la caracterización del comportamiento de los jugadores en términos de la selección de estrategias). Dado que un tratamiento general y detallado de estas cuestiones sobrepasa las posibilidades de este curso, hemos optado por abordarlas en el marco de un modelo sencillo con dos únicos jugadores, cada uno de ellos a su vez con dos únicas estrategias disponibles. Pensamos que ese marco es suficiente para poner de manifiesto la relevancia de los supuestos sobre las preferencias y sobre su representación a través de las funciones de pagos en el proceso de modelización de cualquier situación de interdependencia estratégica.

Un ejemplo sencillo

En la Figura 1.6 aparece representado un juego 2X2 (dos jugadores, cada uno de ellos con dos estrategias posibles). Dados los conjuntos de estrategias de los jugadores $S_I = \{a, b\}$ y $S_{II} = \{\alpha, \beta\}$, las posibles *combinaciones de estrategias* vendrán dadas por el producto cartesiano de los mismos:

$$S = S_I \times S_{II} = \{a\alpha, a\beta, b\alpha, b\beta\}.$$

Cada una de estas combinaciones de estrategias supone un desarrollo distinto del juego. Denominaremos D al conjunto de todos los desarrollos posibles del juego, el cual tendrá, por tanto, tantos elementos como combinaciones posibles de estrategias: $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$. La correspondencia entre los elementos de S y los de D queda clara a partir de la Figura 1.6 .

	α	β
a	d_1	d_2
b	d_3	d_4

Figura 1.6. Desarrollos posibles para un juego 2X2

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Nuestro objetivo último es analizar el comportamiento de los jugadores en términos de su decisión sobre la estrategia a escoger. Consideremos, por ejemplo, la situación del jugador I. Supongamos que nos dicen que inicialmente sólo conocemos sus preferencias en términos de la ordenación que hace de los cuatro posibles desarrollos del juego. En ese caso, al igual que hacíamos en la teoría del consumidor, podríamos recoger dichas preferencias mediante cualquier función $u_I(d)$ que asignase números que reflejasen dicha ordenación. De hecho, cualquier transformación monótona positiva de dicha función (cualquiera que ordene de la misma manera los cuatro desarrollos posibles del juego) también nos serviría para recoger esas mismas preferencias.

	α	β
a	$u_I(d_1)$	$u_I(d_2)$
b	$u_I(d_3)$	$u_I(d_4)$

Figura 1.7. Función de pagos del jugador I

¿Es posible determinar que estrategia elegirá I sólo a partir de esta información? La respuesta es que sólo bajo determinadas condiciones que podemos agrupar en dos grandes grupos:

Caso 1 Si una estrategia lleva a desarrollos del juego más preferidos que las otras estrategias con independencia de la estrategia del II. A modo de ejemplo, si I prefiere d_1 a d_3 y d_2 a d_4, su elección sería la estrategia a.

Caso 2 Si el jugador I «estuviese seguro» de la decisión del II. A modo de ejemplo, si I «esta seguro» de que II va a jugar α bastaría con saber si prefiere d_1 o d_3.

Si no se diesen ninguna de estas dos condiciones, conocer la ordenación que hace I de los desarrollos posibles del juego no es suficiente para determinar que estrategia elegirá. En efecto, a la hora de elegir I sabe que cada una de sus estrategias le lleva a un resultado distinto en función de la estrategia que elija II:

- Si elige a el juego se puede desarrollar conforme a d_1, si II elige α, o a d_2, si II elige β.
- Si elige b el juego se puede desarrollar conforme a d_3, si II elige α, o a d_4, si II elige β.

Dado que las consecuencias de sus decisiones dependen de lo que haga el otro, parece razonable considerar que además de la valoración que haga de los posibles desarrollos del juego, en su decisión influirán también **sus expectativas** sobre que estrategia elegirá el jugador II. Supongamos, sin entrar por el momento en su justificación, que podemos representar de manera general dichas expectativas mediante una distribución de probabilidad (una función que asigna probabilidades a cada una de las estrategias del jugador II). Al tener S_{II}

únicamente dos elementos, podemos representar dicha distribución de probabilidad mediante un vector $(p, 1-p)$, donde convenimos que p recoge la probabilidad que I asigna a que II elija α y, por tanto, $1-p$ la que asigna a que elija β. Por ser una distribución de probabilidad se ha de cumplir que $p \in [0,1]$, recogiendo los extremos del intervalo el caso en que I «esta seguro» de cual será la decisión del II.

Una vez aceptamos la posibilidad de representar en términos de probabilidad las expectativas del jugador I, podemos plantear su elección entre estrategias como una elección entre distribuciones de probabilidad con soporte el conjunto de desarrollos posibles del juego (cada estrategia lleva asociados dos desarrollos posibles del juego, a cada uno de los cuales se le asigna una determinada probabilidad) a las que, siguiendo la práctica habitual, vamos a denominar *loterías*:

$$l_a = (d_1, d_2; p, 1-p);$$
$$l_b = (d_3, d_4; p, 1-p).$$

Lo ideal sería poder asignar un valor numérico a cada lotería $V_I(l)$ de tal forma que pudiésemos plantear el problema de decisión de I en términos de la elección de la estrategia para la que $V_I(l)$ toma un valor más alto. Como pone claramente de manifiesto la propia naturaleza de las loterías, el valor que tome $V(l)$ debería tener en cuenta dos tipos de factores:

1. Las preferencias del jugador I en relación a los desarrollos posibles del juego D.

2. Las expectativas del jugador I en relación a la ocurrencia de cada uno de esos desarrollos.

¿Será posible encontrar una función $V_I(l)$ que desempeñe ese papel? La respuesta a esta pregunta nos la da la conocida como *teoría de la utilidad esperada*. El análisis en profundidad de los contenidos y fundamentos de dicha teoría sobrepasa los objetivos de este curso y nos remitimos al tratamiento de la misma en cursos superiores. A pesar de ello, es necesario dejar constancia de que está detrás del procedimiento que seguiremos a la hora de caracterizar la toma de la decisiones por parte de los jugadores en nuestros modelos. A efectos prácticos, dicha teoría sostiene que bajo determinados supuestos en relación a las preferencias del jugador i sobre el conjunto de loterías que constituye su conjunto de elección, existirá una función que vamos denominar $u_i(d)$, la cual asigna un valor numérico a cada posible desarrollo del juego, y tal que permite plantear el problema de decisión del jugador en términos de la elección de la estrategia que le proporciona un mayor pago esperado[6].

[6]La función $u_i(d)$ se suele conocer como función de utilidad Bernoulli en reconocimiento a Daniel Bernoulli. Este autor fue el primero en proponer su uso en 1738, en el marco del problema de elección conocido como *la paradoja de San Petersburgo*. Detrás de la propuesta de Bernuilli está la idea de que lo relevante para los individuos a la hora de elegir en condiciones de incertidumbre es la «utilidad» de las posibles pérdidas y ganancias y no simplemente el valor monetario de las mismas.

Volviendo a la pregunta concreta que nos acabamos de plantear, bajo determinados supuestos sobre las preferencias de I en relación a las loterías, si existe esa función $V_I(l)$ y, además, adoptará la siguiente forma para cada una de sus estrategias:

$$V(l_a) = pu_I(d_1) + (1-p)u_I(d_2);$$
$$V(l_b) = pu_I(d_3) + (1-p)u_I(d_4).$$

En este caso, por tanto, los números que asignan nuestras funciones de pagos, han de ser tales que nos permitan plantear la elección de un jugador entre sus estrategias en términos de la maximización del pago esperado (la esperanza matemática de los pagos a los que puede llevar dicha estrategia de acuerdo con las expectativas del jugador).

Resumiendo lo visto hasta ahora, la práctica habitual será que, tanto en la representación en forma extensiva como en la representación en forma estratégica, a cada desarrollo posible del juego le asignemos un vector de pagos, siendo el conjunto de dichos vectores los que recogen las preferencias de los jugadores. Sin embargo, los números que asocian las funciones de pagos a los desarrollos posibles del juego pueden tener una naturaleza muy diferente de unos modelos a otros. En algunos casos será suficiente con conocer la ordenación que hacen los jugadores de los posibles desarrollos del juego, en cuyo caso las funciones de pagos tendrán un carácter ordinal y los números asociados a cada desarrollo posible del juego debemos interpretarlos en esos términos. En otros, sin embargo, conocer la ordenación no será suficiente y supondremos que las preferencias de los jugadores son tales que podemos plantear su elección en términos de la maximización del pago esperado. En este segundo caso los números asignados a cada desarrollo posible del juego representan «algo más» que la mera ordenación de dichos desarrollos de acuerdo con las preferencias de los jugadores. Para entender que significa ese algo más, resulta útil considerar el caso en el que cada desarrollo posible del juego lleva asociada una valoración en términos monetarios por parte de cada jugador, algo habitual en el caso de las aplicaciones de la teoría de juegos a la economía.

Pagos en unidades monetarias y teoría de la utilidad esperada

Sin dejar aún nuestro ejemplo de referencia, consideremos la posibilidad de lo que conocemos es la valoración monetaria que hace cada jugador de cada uno de los posibles desarrollos del juego. Pensemos, por ejemplo, que nuestros jugadores son empresas y que conocemos cuales serán los beneficios de cada empresa en función de la estrategia que elija ella y la que elija su rival. Centrándonos de nuevo en el problema de decisión del jugador I, denominemos $w(d)$ a la función que asigna la valoración monetaria que hace el jugador de cada posible desarrollo del juego tal y como aparece recogido en la Figura 1.8.

	α	β
a	$w_I(d_1)$	$w_I(d_2)$
b	$w_I(d_3)$	$w_I(d_4))$

Figura 1.8. Función de pagos en unidades monetarias

Desde luego $w_I(d)$ ordena las preferencias de un agente racional en relación con los posibles desarrollos del juego (simplemente con que supongamos que prefiere ganar más a ganar menos). Sin embargo, esta información no es suficiente cuando cada estrategia no lleva asociada un pago cierto sino una lotería. Consideremos, a modo de ejemplo, la situación recogida en la Figura 1.9 bajo el supuesto de que los pagos vienen dados en euros.

	α	β
a	200	300
b	0	600

Figura 1.9. Pagos en unidades monetarias: un ejemplo

La elección de una de sus dos estrategias por parte del jugador I la podemos ver como un problema de elección entre las siguientes loterías:

$$l_a = (200, 300; p, 1-p);$$
$$l_b = (0, 600; p, 1-p).$$

La pregunta que nos hacemos es si podemos establecer como criterio de decisión que el jugador I elegirá la estrategia con una mayor ganancia monetaria esperada. En otras palabras, ¿podemos asociar el comportamiento racional de un jugador en condiciones de incertidumbre a la maximización de la ganancia monetaria esperada? Para llegar a la respuesta de esta pregunta puede servirnos de ayuda considerar unas expectativas concretas. Supongamos, por ejemplo, que $p = \frac{1}{2}$, debido a que sabe con certeza que el II

decidirá lanzando una moneda no trucada al aire. En este caso las loterías entre las que tiene que elegir I serían:

$$l_a = (200, 300; \frac{1}{2}, \frac{1}{2});$$
$$l_b = (0, 600; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Dado que el pago esperado de l_b es de 300 €, $[E_b(w) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}600 = 300]$ y la de l_a es de 250 €, $[E_a(w) = \frac{1}{2}200 + \frac{1}{2}300 = 250]$ la pregunta que nos estamos planteando es si deberíamos considerar irracional que I eligiese la estrategia a. Suponga, por ejemplo que a uno de sus compañeros de clase se le ofrece participar en este juego y que opta por la estrategia a haciendo el siguiente razonamiento: «Es cierto que b tiene un mayor ganancia esperada, pero también es verdad que mientras que con a me garantizo por lo menos 200 €, con b hay una probabilidad del 50 % de que no gane nada.» Ciertamente lo que esta planteando su compañero, es que cuando un agente tiene que decidir en condiciones de incertidumbre tiene en cuenta algo más que el pago esperado. En este caso podríamos decir que su compañero presenta *aversión al riesgo* e incluso plantearnos la medición del riesgo presente en cada una de las loterías a partir de la varianza de cada una ellas. El mayor riesgo que presenta la lotería b no se ve compensado por la mayor ganancia esperada y, por tanto, el jugador elige su estrategia a.

De nuevo la teoría de la utilidad esperada viene en nuestro auxilio: bajo determinados supuestos sobre las preferencias del individuo en relación a las loterías, existirá una función $u(w)$ tal que que podemos plantear el problema de decisión de un agente racional en términos de un problema de maximización de la utilidad esperada. En nuestro ejemplo, la función $u(w)$ asignará valores a las ganancias monetarias de tal forma que podremos determinar la estrategia preferida por I comparando el valor esperado para cada una de ellas:

$$V(l_a) = \frac{1}{2}u(200) + \frac{1}{2}u(300);$$
$$V(l_b) = \frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{2}u(600).$$

Se dice que un agente económico es neutral al riesgo cuando ordena las distintas loterías teniendo en cuenta únicamente la ganancia monetaria esperada de cada una de ellas. En este caso no habría ningún problema en que los números que aparecen en nuestros vectores de pagos fuesen directamente las ganancias monetarias de cada jugador. Sin embargo, las preferencias de los agentes en relación a las loterías dependen en muchas

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

ocasiones, no sólo de la ganancia esperada, sino también de otros factores como el riesgo. En este caso, los números que aparecen en nuestros vectores de pagos deben corresponderse con valores de una función $u(w)$ que nos permita utilizar el criterio de la utilidad esperada.

A modo de conclusión

El objetivo último de un juego no cooperativo es analizar el comportamiento de los jugadores en términos de la elección entre sus estrategias. Aunque en muchas ocasiones tomaremos los pagos que recogen las preferencias de los jugadores como un dato, una reflexión sobre la naturaleza de los mismos resulta imprescindible para la comprensión de cualquier modelo. En algunos juegos podremos abordar el comportamiento de los jugadores partiendo únicamente de la ordenación que éstos hacen de los posibles desarrollos del juego. En este caso, los números que asigna cada función de pagos contendrán únicamente información de carácter ordinal sobre las preferencias del jugador en relación con los posibles desarrollos del juego. Sin embargo, en muchos otros juegos cada estrategia de un jugador no irá asociada con un único desarrollo del juego, por lo que debemos plantear su problema de decisión en términos de la elección entre loterías (distribuciones de probabilidad con soporte los posibles desarrollos del juego). En este caso, debemos distinguir dos grandes grupos de determinantes de su elección:

1. sus preferencias en relación a los distintos desarrollos posibles del juego;
2. sus creencias o expectativas sobré lo que harán los otros jugadores.

La manera habitual de proceder en este segundo caso consiste en dar los siguientes pasos:

1. suponer que las expectativas de un jugador pueden representarse mediante una distribución de probabilidad;
2. suponer que sus preferencias en relación a las loterías asociadas a cada una de sus estrategias son tales que podemos plantear su problema de decisión en términos de la maximización del pago esperado (bien porque es neutral al riesgo y los pagos vienen dados en unidades monetarias, bien porque los pagos vienen dados directamente en valores de una función de utilidad tipo Bernoulli).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1.4 Ejercicios

► Ejercicio 1.4.1

Intente dar respuesta a cada una de las siguientes preguntas relacionadas con distintas situaciones de interdependencia estratégica:

1. ¿Qué razones pueden justificar que alguien «queme sus naves»?
2. ? Cómo afecta a la prima que cobran las compañías de seguro la franquicia que asume el cliente? ¿Por qué?
3. ¿Por qué cuando se hace una oferta en la que se dice que el precio es bajo suele ir acompañada de una explicación (por cierre, reforma,. . .)?
4. ¿Dónde esperarías encontrar un menú del día con una mejor relación calidad precio, en un bar de un polígono industrial o una estación de trenes o autobuses?¿Por qué?
5. ¿Se vota siempre la alternativa «más preferida»?

► Ejercicio 1.4.2

Considere la misma situación del Ejemplo 1.1.2 pero con cuatro mujeres y cuatro hombres y las preferencias recogidas en la tabla adjunta. Aaplique el algoritmo de «aceptación diferida» de Gale-Shapley para determinar el conjunto de emparejamientos estables en los siguientes casos:

1. cuando son los hombres los que proponen;
2. cuando son las mujeres las que proponen.

	A	B	C	D
α	1,3	2,3	3,2	4,3
β	1,4	4,1	3,3	2,2
γ	2,2	1,4	3,4	4,1
δ	4,1	2,2	3,1	1,4

► Ejercicio 1.4.3

Considere el modelo de localización espacial de Hotelling del Ejemplo 1.1.1. Suponga ahora que las empresas ya están localizadas en los dos extremos de la ciudad y que siguen vendiendo un producto homogéneo que requiere un transporte especializado que realizan ellas mismas. Si las empresas fijan un precio en destino; transporte incluído,

¿en qué parte de la ciudad será mayor la competencia entre las empresas? ¿Cómo cree que variarán los precios netos (descontado el coste del tranporte) a lo largo de la ciudad?

▶ Ejercicio 1.4.4

Dos individuos, I y II, se enfrentan al siguiente juego. Dada una baraja de 40 cartas, la mitad de las cuales son rojas y la otra mitad negra, a cada uno de los individuos se les da una carta elegida al azar pudiendo cada jugador ver únicamente el color de la suya. El individuo I tiene que decidir a continuación entre dos opciones:

1. *Cartas arriba*. En ese caso si un jugador tiene una carta de color rojo y el otro una de color negro, este último deberá pagarla 10 € al otro (rojo gana). En caso de que las dos sean del mismo color ninguno paga nada.
2. Hacer un *envite* doblando la apuesta. En este caso II tiene a su vez dos opciones:
   - Aceptar el envite, en cuyo caso si son de distinto color ganará la roja recibiendo el jugador correspondiente 20 € mientras que si son del mismo color ninguno recibe nada.
   - No aceptar el envite, en cuyo caso deberá pagar 10 € a I.

▶ Ejercicio 1.4.5

Represente en forma extensiva todas las posibles situaciones informativas que se pueden dar en un juego 3X2(tres jugadores cada uno de ellos con 2 estrategias posibles).

▶ Ejercicio 1.4.6

Un determinado mercado es abastecido por dos únicas empresas en las siguientes condiciones de demanda y de costes:

$$D: \quad p = 100 - X; \quad X = x_1 + x_2$$

$$C: \qquad CT_i(x_i) = 2x_i, \quad i = 1,2.$$

Suponga que cada una de las empresas ha de decidir la cantidad de producto que saca al mercado y haga un esbozo de la forma extensiva del juego para los siguientes marcos estratégicos:

1. La empresa 2 se comporta como seguidora en el sentido de que espera a conocer

cuanto saca al mercado la 1 (la líder) antes de decidir cuanto saca ella.

2. Ambas empresas han de decidir de manera simultánea cuanto sacan al mercado.

▶ Ejercicio 1.4.7

Haga la representación en forma normal del juego del Ejemplo 1.2.1 y del juego del Ejemplo 1.2.2.

▶ Ejercicio 1.4.8

Haga la representación en forma normal de los modelos de oligopolio de Cournot y Stackelberg.

▶ Ejercicio 1.4.9

Represente el *dilema del prisionero* en forma extensiva.

▶ Ejercicio 1.4.10 La paradoja de San Petersburgo

Suponga que le ofrecen participar en el siguiente juego. Se lanza una moneda al aire hasta que salga la primera cruz asignándole un premio de $2^n * 10$ € , donde n es el número de la tirada donde aparace la primera cruz.

1. ¿Cuál es la esperanza matemática o ganancia esperada de participar en este juego?

2. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por participar en este juego?

▶ Ejercicio 1.4.11

Considere el juego representado en la Figura 1.10 y plantee la decisión de cada uno de los jugadores como un problema de elección entre loterías.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

	s_{II1}	s_{II2}
s_{I1}	$20,7$	$10,5$
s_{I2}	$-10,5$	$40,9$

Figura 1.10

▶ Ejercicio 1.4.12

Se lanza una moneda al aire, si sale cara se le pagan 100 €, pero si sale cruz es usted quien tiene que pagar 80 €.

1. ¿Cual es la esperanza matemática de este juego?
2. ¿Participaría en el mismo si le ofreciesen esa posibilidad?
3. Si un casino ofreciese la participación en este juego tantas veces como se quiera, ¿tendría clientes para dicho juego?
4. Valore globalmente la respuesta a los apartados anteriores

▶ Ejercicio 1.4.13

Considere el problema de elección del jugador *I* recogido en la figura adjunta y explique bajo que supuestos podríamos determinar la elección de dicho jugador a partir del pago esperado para cada una de sus estrategias.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

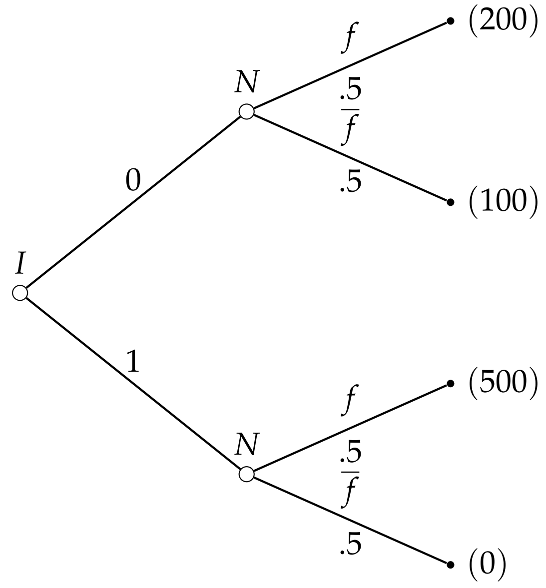

Figura 1.11. ***Decisión con incertidumbre.***

Bibliografía

Gale, D. & Shapley, L. (1962). College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematican Monthly*, *69*(1), 9-15.

Hotelling, H. (1929). The stability of competition. *The Economic Journal*, *39*(153), 41-57.

Myerson, R. B. (1999). Nash equilibrium and the history of economic theory. *Journal of Economic Literature*, *37*(3), 1067-1082.

Von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior*. New York:Wiley.