Teoría de Juegos

Teoría de Juegos

Tema 2

Juegos estáticos (I)

Dominancia y racionalizabilidad

Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria
alvarezp@unican.es

Índice general

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.1 Introducción

En el tema anterior hemos visto que la forma de trabajar en la teoría de juegos es mediante la elaboración y manejo de un tipo especial de modelos denominados juegos. Presentamos la forma normal o estratégica y la forma extensiva como alternativas para representar un juego no cooperativo, e hicimos una primera aproximación a la naturaleza de la las funciones de pagos y su papel en ese proceso de modelización. En este tema vamos a entrar ya en el análisis de un tipo especial de situaciones de interdependencia estratégica, aquellas en las que los jugadores tienen que decidir de manera simultánea, en el sentido de que cada uno de ellos a la hora de elegir entre sus estrategias no conocerá la elección del otro. Los modelos relacionados con este tipo de situaciones se denominan juegos estáticos o simultáneos. Por oposición a ellos, en los denominados juegos dinámicos al menos un jugador dispondrá de información, en el momento de decidir, sobre el movimiento o movimientos previos de otros jugadores. Nos limitaremos, por el momento, a los denominados juegos estáticos con información completa, en los cuales se supone que la estructura del juego (las reglas y las funciones de ganancias) es conocimiento común.

▶ Ejercicio 2.1.1

¿El *juego de los chinos* es estático o dinámico? ¿Bajo que condiciones pasaría a ser estático?

En este tipo de juegos las estrategias de los jugadores son muy sencillas (constan de un solo movimiento o acción) por lo que resulta natural partir directamente de la representación en forma normal o estratégica. Como vimos en el tema anterior, dicha forma normal queda caracterizada, además de por el conjunto de jugadores, por los *espacios de estrategias* y las *funciones de ganancias* de cada uno de ellos:

$$\boxed{G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{U_i\}_{i=1}^{n} \rangle.} \tag{2.1}$$

El hecho de que los jugadores se enfrenten una sola vez, hace que al tomar sus decisiones no estén pendientes de las consecuencias futuras de sus acciones. Al decidir de forma simultánea, la preocupación fundamental de cada jugador será *la formación de unas expectativas correctas* sobre el comportamiento del resto de jugadores. Como ejemplos de este tipo de situaciones podemos considerar las subastas de sobre cerrado, determinados sistema de votación, ... Hemos de tener en cuenta, además, que las herramientas que desarrollemos en este marco nos serán útiles cuando consideremos situaciones estratégicas más ricas (en las que si se considere la influencia de la *sombra del futuro*, no exista simultaneidad en la toma de decisiones, la información sea incompleta,...).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Una vez tenemos representado un juego en su forma normal, el objetivo del modelo es tratar caracterizar el comportamiento de los jugadores en términos de su elección entre las estrategias de que disponen[1]. El punto de partida es el supuesto de que se comportan de manera *racional*, esto es, eligen entre sus estrategias de acuerdo con sus objetivos (recogidos en el modelo a través de las funciones de pagos) y la información de que disponen (por ser juegos de información completa la estructura del juego es conocimiento común). Comenzaremos viendo que en algunos casos el supuesto de racionalidad es suficiente para descartar la elección por parte de un jugador de determinadas estrategias: aquellas que no constituyan la *mejor respuesta* bajo ninguna de las expectativas posibles que se pueda formar el jugador sobre el comportamiento del resto. La estrecha interrelación entre la elección de un jugador y sus expectativas sobre lo que harán el resto de jugadores, hace que sean estás el centro de atención en la segunda parte del tema. Podríamos decir que el hilo conductor de este tema es tratar de descubrir *qué no harán* y *qué no creerán* los jugadores en el marco de un juego estático con información completa cuando la racionalidad de cada uno de ellos es conocimiento común.

[1]Cuando, de acuerdo con algún criterio, se propone una determinada combinación de estrategias como desarrollo de un juego, dicha combinación de estrategias se conoce como *solución del juego*.

2.2 Estrategias dominadas

2.2.1 Jugadores racionales no juegan estrategias dominadas

En el intento de caracterizar el comportamiento de los jugadores, vamos a comenzar por preguntarnos si existen algunas estrategias que podamos descartar como elecciones posibles de un jugador racional. En esta aproximación gradual al proceso de selección de estrategias, descartaremos inicialmente que un jugador elija una determinada estrategia si dispone de otra que le reporte mayores pagos con independencia de lo que hagan los otros jugadores. En términos más técnicos, diremos que los jugadores racionales no elegirán nunca estrategias que estén *estrictamente dominadas*.

	L	**C**	**D**
A	$7,5$	$3,4$	$2,6$
M	$8,7$	$6,2$	$5,1$
B	$9,4$	$1,2$	$4,5$

Figura 2.1. Un juego con estrategias dominadas

En el juego de la Figura 2.1 para el jugador I la estrategia A esta dominada por la estrategia M y para el jugador II la estrategia C esta dominada por la estrategia L. Parece lógico proponer, por tanto, que I nunca jugará A y que II nunca jugará C. Reducimos, por tanto, los desarrollos del juego posibles entre jugadores racionales a los cuatro que aparecen recogidos en la Figura 2.2.

	L	**D**
M	$8,7$	$5,1$
B	$9,4$	$4,5$

Figura 2.2. Versión reducida del juego de la Figura 2.1

Definición 2.2.1 (Estrategia estrictamente dominada) *Dado $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^{N}, \{U_i\}_{i=1}^{N} \rangle$, la estrategia $\bar{s}_i$ es una estrategia (estrictamente) dominada para el jugador i si y sólo si existe otra estrategia $\bar{\bar{s}}_i : U_i(\bar{\bar{s}}_i, s_{-i}) > U_i(\bar{s}_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$.*

2.2.2 Solución por dominancia estricta: el *dilema del prisionero*

La eliminación de las estrategias dominadas nos llevará normalmente a un juego más sencillo, en el que se habrá reducido el número de combinaciones de estrategias que son candidatas a solución del mismo. Cabe pensar en un caso extremo en el cuál una de las estrategias de un jugador le de mejores resultados que todas las demás a su alcance, con independencia de lo que hagan los demás jugadores. En este caso se dice que el jugador tiene una estrategia (estrictamente) *dominante*.

Definición 2.2.2 (Estrategia estrictamente dominante) *Dado $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \rangle$, la estrategia $\tilde{s}_i$ es unaestrategia (estrictamente) dominante para i si y sólo si:*

$U_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) > U_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i \in S_i, \; \forall s_{-i} \; \in S_i.$

Si cada jugador tiene una estrategia que le da mejores resultados que las otras, hagan lo que hagan el resto de jugadores, parece poco discutible proponer esa combinación de estrategias como solución del juego. En este caso, el supuesto de racionalidad de los jugadores es suficiente para proponer un primer concepto de solución.

Definición 2.2.3 (Solución por dominancia) *Dado un juego estático en forma normal G, si existe una estrategia estrictamente dominante $\tilde{s}_i$ para cada uno de los jugadores, la combinación de estrategias $\tilde{\mathbf{s}}$ constituye la solución por dominancia del juego.*

La solución por dominancia ni siquiera requiere que los jugadores tengan en cuentan las expectativas sobre lo que harán los otros, algo poco frecuente en las situaciones de interdependencia estratégica. Sin embargo, en este marco, tan poco estratégico, nos encontramos con uno de los modelos más conocidos y relevantes de la teoría de juegos: el *dilema del prisionero*.

El *dilema del prisionero*

El *dilema del prisionero* constituye, sin duda, el modelo más conocido de la teoría de juegos. El problema estratégico que representa fue analizado por primera vez en 1950 por los matemáticos Merrill Flood y Melvin Dresher, en el ámbito de la organización RAND. El nombre y la historia asociada al mismo fueron inventados por el también matemático Albert Tucker, consejero de esa misma organización, como forma de hacer el modelo más accesible a todo tipo de público. La historia que propuso es la siguiente:

> Dos individuos son detenidos como sospechosos de haber cometido un delito grave. No existen pruebas suficientes para condenarlos, pero la policía intenta que se inculpen mutuamente. Para ello, tras incomunicarlos poniéndolos en celdas separadas, les proponen que firmen un papel involucrando a su compañero. Los agentes le explican a cada preso su situación, la cual viene a ser la siguiente:

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

- si delata a su compañero y el otro no lo delata a él, será puesto en libertad, ya que no habrá pruebas que lo involucren y le premiarán por colaboración con la justicia;
- si delata a su compañero y éste también lo delata a él, ambos serán condenados por el delito grave, pero verán rebajada su condena por colaboración con la justicia;
- si no delata a su compañero, pero éste sí le delata a él, le caerá la pena máxima, sin que se vea reducida por colaboración con la justicia;
- si ninguno de los dos delata al otro, no habrá pruebas para condenarlos por el delito grave, pero si les podrán condenar por otros delitos menores para lo que si disponen de pruebas.

Cada jugador dispone, por tanto, de dos estrategias posibles, delatar (D) o no delatar ($\bar{D}$), y sus preferencias sobre los desarrollos posibles del juego son de la forma:

$$(D_i, \bar{D}_j) \succ_i (\bar{D}_i, \bar{D}_j) \succ_i (D_i, D_j) \succ_i (\bar{D}_i, D_j).$$

Para unos valores concretos de las funciones de pagos que mantengan esta ordenación de los desarrollos posibles del juego , podemos representar dicha situación mediante la siguiente matriz:

	$\bar{\mathbf{D}}$	**D**
$\bar{\mathbf{D}}$	$8, 8$	$0, 10$
D	$10, 0$	$2, 2$

Figura 2.3. Una posible matriz de pagos para el *dilema del prisionero*

¿Qué estrategia cabe esperar que adopten los jugadores en esta situación? Sea cual sea la expectativa de cada uno de ellos sobre el comportamiento del otro, la mejor alternativa que tiene es D [2]. La paradoja «social» radica en que cuando cada uno de ellos elige, racionalmente, su estrategia dominante D, ambos acaban en una situación peor que si eligiesen su estrategia dominada $\bar{D}$. La situación de fondo asociada a las situaciones tipo dilema del prisionero refleja la existencia de ventajas derivadas de la cooperación mutua, si bien cada uno de los agentes tiene un incentivo a desviarse (a no asumir el coste de la cooperación). Debido

[2] Bajo los supuestos de información completa y conocimiento común de la racionalidad, la expectativa sobre el comportamiento del rival debería ser que también elegirá D.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

a ello, también es habitual presentar la elección de los jugadores en términos de «cooperar» o «no cooperar», algo que haremos habitualmente a lo largo del curso.

▶ Ejercicio 2.2.1

Haga una representación de una situación tipo *dilema del prisionero* cambiando el nombre de las estrategias de los jugadores a C (cooperar) y $\bar{C}$ (no cooperar) y con unas funciones de pagos distintas. Explique a continuación que condición han de cumplir los pagos para que estemos ante una situación tipo *dilema del prisionero*.

La trascendencia de esta situación estratégica se deriva de que se observa con mucha frecuencia en distintos ámbitos de la realidad social (carrera de armamentos, relaciones comerciales entre países, política fiscal de las CCAA, acuerdos colusivos entre empresas, ...).

Es importante darse cuenta de que los propios jugadores tienen incentivos para crear mecanismos e instituciones que cambien la estructura del juego (las reglas o incluso las funciones de ganancias) de forma que se alcance la cooperación entre las partes [3]. Sin embargo, contrariamente a lo que ocurre desde el punto de vista de las partes implicadas, los resultados derivados de una situación tipo dilema del prisionero no tienen porque ser «malos» desde el punto de vista de terceras partes (el hecho de que las empresas no lleguen a acuerdos colusivos conduce a un mayor bienestar social, una empresa puede inducir una mayor productividad entre sus trabajadores haciendo que se enfrenten a situaciones de este tipo ...). En consecuencia, esas terceras partes tendrán incentivos para diseñar mecanismos e instituciones que las provoquen (la política de defensa de la competencia, el diseño de un *torneo* entre sus trabajadores por parte de una empresa, ...).

Ejemplo 2.2.1 ¿ A setas: hoy o mañana?

Las recientes lluvias han hecho que la primeras setas aparezcan en el bosque. Aunque cada uno de los «seteros» de una pequeña localidad sabe que lo ideal sería esperar un día más para que se desarrollasen plenamente, cada uno de ellos está con la cesta preparada al amanecer. Vamos a representar esta situación de interdependencia estratégica mediante un juego. Supongamos inicialmente que sólo hay dos jugadores, que las setas disponibles tienen un determinado valor, y que éste será mayor si esperan a mañana que si las recogen hoy. Suponemos también que cada jugador tiene que decidir si va hoy o si espera a mañana, sabiendo que si van los dos el mismo día cada uno se llevará la

[3] Los cambios en las reglas pueden lograrse haciendo que el futuro sea importante (una probabilidad alta de volverse a encontrar en la misma situación puede hacer que la estrategia óptima pase por cooperar en el presente), haciendo que sean posibles los acuerdos vinculantes recurriendo a una tercera parte, ... Los «pagos» de los jugadores pueden verse influidos incluso por los principios éticos o los valores religiosos de las distintas sociedades.)

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

mitad, mientras que si va uno sólo se las lleva él todas. Bajo estos supuestos, podemos representar esta situación de interdependencia estratégica mediante la siguiente matriz:

	H	M
H	10, 10	20, 0
M	0, 20	15, 15

Figura 2.4. A setas, ¿hoy o mañana?

Dado que la estrategia H es una estrategia dominante para cada uno de los jugadores, (H, H) constituye la solución del juego por dominancia estricta. Haga lo que haga el otro jugador, cada uno de ellos obtendrá un mejor resultado si va hoy que si decide esperar a mañana, por lo que cabe esperar que ambos decidan ir hoy, sin ni siquiera pararse a pensar que hará el otro. Sin embargo, resulta inmediato darse cuenta de que si ambos jugadores se pusiesen de acuerdo y decidiesen aplazar un día más la recolección, los dos acabarían mejor.

Incluso un modelo tan sencillo como éste nos permite poner de manifiesto un resultado enormemente trascendente: *en determinadas situaciones de interdependencia estratégica, si los jugadores se guían por sus intereses individuales, todos acaban peor que si tuviesen en cuenta el interés colectivo*. Si se pusiesen de acuerdo y eligiesen cada uno de ellos su estrategia dominada, los dos acabarían mejor que si eligen guiados únicamente por el interés individual.

¿Nos ayuda el modelo a explicar lo que ocurre en alguna situación real de interdependencia estratégica? ¿No parece razonable que los jugadores se pongan de acuerdo y elijan M? La respuesta a estas preguntas requiere tener presente que nuestro análisis se lleva a cabo en el marco de un modelo con unos supuestos concretos. En particular nuestras reglas del juego establecen que los jugadores se «enfrentan» a esa decisión una sóla vez y que ésto es conocimiento común. Lo que nos dice el modelo es que si dos individuos que no se conocen y saben con certeza que no se van a ver en el futuro tienen que decidir, el interés individual les llevará a coger la cesta inmediatamente. Si la situación del mundo real que pretendemos analizar no es esta (los individuos pueden ponerse de acuerdo de forma creíble, el Ayuntamiento puede fijar periodos de recolección,...) debemos esperar un poco más para utilizar modelos más complejos que permitan recoger situaciones de interdependencia estratégica más ricas. Evidentemente, existe esa fuerza que induce al acuerdo entre los jugadores, pero ésta no resulta sencilla de canalizar: ¿bastará con que hablen entre ellos?; ¿tendrán que vigilarse el uno al otro durante todo el día?; ¿será necesario (y posible) que firmen un contrato y los vigile un tercero?; ¿bastará con que el Ayuntamiento utilice su autoridad y fije cuando se puede ir?; ... Quizás poner en práctica cualquiera de estas alternativas tenga un coste demasiado alto en relación a las ganancias derivadas de conseguir retrasar un día más la recolección.

En resumen, el modelo nos permite sacar una doble conclusión:

1. En determinados marcos estratégicos la elección racional por parte de los jugadores lleva a situaciones que no son óptimos paretianos (todos podrían mejorar si se coordinasen y eligiesen una estrategia que no es óptima desde el punto de vista individual).

2. El hecho de que la situación de equilibrio no sea un óptimo paretiano hace que las propias partes tengan interés en cambiar las reglas del juego, pero dicho cambio puede ser costoso o imposible.

► Ejercicio 2.2.2 Provisión de bienes públicos a partir de contribuciones voluntarias: el problema del *free rider*

Se conoce como *problema del free rider* o *problema del polizón*, una situación en la cuál los individuos tienen una tentación individual a aprovecharse de la aportación de otros para sufragar el coste de bienes colectivos de cuyo disfrute no pueden ser excluidos (bienes públicos). En este ejercicio se propone un modelo sencillo que reproduce dicha situación.

Cuatro individuos disponen de 100 € cada uno de ellos, teniendo que decidir que cantidad asignar a un fondo privado y que cantidad a un fondo público. Las asignaciones a este último son anónimas y el total asignado se multiplicará por cuatro, dividiéndose a continuación a partes iguales entre todos los individuos. En cuanto al fondo privado, por cada euro que asigne su dueño recibirá dos euros. Se pide:

1. Haga la representación en forma normal.

2. Determine la solución por dominancia estricta de este juego.

3. Determine la combinación de estrategias *Pareto óptima*.

4. Proponga algún ejemplo de situaciones en las que se dé y sugiera posibles soluciones.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.3 Estrategias *mejor respuesta*

Ya hemos dado un primer paso hacia la caracterización del comportamiento racional en una situación de interdependencia estratégica: jugadores racionales no elegirán nunca estrategias dominadas. Pasamos ahora a considerar el proceso de selección por parte de un jugador entre sus estrategias no dominadas. Dado que los resultados asociados a la elección de una estrategia no dominada dependerán de lo que hagan los otros jugadores, la elección de un jugador dependerá de las expectativas que se forme sobre las estrategias que elegirán los otros jugadores.

Comenzamos esta pregunta proponiendo una forma de incorporar las expectativas en nuestros modelos. Veremos a continuación que, una vez incorporamos las expectativas, podemos ir un poco más allá de la eliminación de estrategias dominadas a la hora de caracterizar el comportamiento de jugadores racionales. En concreto, descartaremos que los jugadores elijan una determinada estrategia si ésta no es *mejor respuesta* bajo algún tipo de expectativas que se puedan formar. En otras palabras, descartaremos que jugadores racionales jueguen una determinada estrategia si disponen de otra que les da mejores resultados *crean lo que crean* acerca de las estrategias que elegirán el resto de jugadores. Aunque ciertamente una estrategia dominada no será nunca mejor respuesta, veremos que puede haber estrategias que, pese a no estar dominadas, no serían mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles.

2.3.1 Representación de las expectativas mediante distribuciones de probabilidad

Consideremos inicialmente el caso sencillo de un juego con dos jugadores como el que aparece recogido en la Figura 2.5. Dado que el jugador II sólo tiene dos estrategias, podemos recoger las expectativas del I sobre su comportamiento mediante un vector $(p, 1-p)$, donde convenimos que p es la probabilidad que asigna I a que II elija s_{II1} (por tanto, se cumplirá que $p \in [0,1]$). El caso en que I estuviese seguro de la elección del II se correspondería con una distribución de probabilidad degenerada, en la que toda la probabilidad se concentraría en la estrategia pura correspondiente. De manera similar podríamos recoger las expectativas del jugador II mediante un vector $(q, r, 1-q-r)$, cuyos componentes serán números reales no negativos con suma la unidad.

	s_{II1}	s_{II2}
s_{I1}	$10, 2$	$0, 4$
s_{I2}	$0, 1$	$10, 3$
s_{I3}	$4, 8$	$4, 0$

Figura 2.5. Mejor respuesta frente a dominancia estricta

Para un juego con dos únicos jugadores y espacios de estrategias finitos[4] utilizaremos la notación $\mu_i(s_j)$ para recoger unas determinadas expectativas de i respecto a la elección del j, siendo μ_i una función de la forma:

$$\begin{aligned} \mu_i : \quad & S_j \to [0,1] \\ & s_j \mapsto \mu_i(s_j). \end{aligned} \tag{2.2}$$

En tanto que distribución de probabilidad, dicha función deberá cumplir que $\Sigma_{s_j}\mu_i(s_j) = 1$.

En los juegos con más de dos jugadores, cada uno de ellos ha de formarse expectativas sobre la estrategia que elegirá cada uno de los otros. En este caso, sus expectativas serán sobre las combinaciones de estrategias del resto de jugadores. A modo de ejemplo, consideremos el juego representado en la Figura 2.6, en el cual aparecen en filas las estrategias del jugador I, en columnas las del jugador II, correspondiendo al jugador III la elección de entre la matriz A y la B. En dicho juego cada uno de los jugadores ha de formarse expectativas sobre las posibles combinaciones de estrategias de los otros dos. Por ejemplo, en el caso del jugador I sus expectativas vendrán dadas por una distribución de probabilidad sobre el conjunto $\mathbf{S}_{-I} = \{\alpha A, \alpha B, \beta A, \beta B\}$.

	a	b
α	$10, 0$	$0, 10$
β	$0, 10$	$10, 0$

A

	a	b
α	$10, 0$	$0, 10$
β	$0, 10$	$10, 0$

B

Figura 2.6. Un juego 3X2

[4]Aunque lo dejamos fuera de nuestro análisis por el momento, si el conjunto de estrategias del resto de jugadores fuese continuo podríamos considerarlo una variable aleatoria y recoger las expectativas del jugador i a través de una función de distribución.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Con carácter general, vamos a denotar por S_{-i} al conjunto de combinaciones posibles de estrategias de todos los jugadores menos el i y por $\mathbf{s}_{-i}$ a una cualquiera de esas combinaciones «reducidas» de estrategias. Las expectativas del jugador i vendrán dadas por una distribución de probabilidad sobre S_{-i}. Nos referiremos a una de esas distribuciones de probabilidad (a unas expectativas concretas) mediante la expresión $\mu_i(\mathbf{s}_{-i})$ y al conjunto de distribuciones posibles mediante[5] $\Delta(S_{-i})$. Podemos interpretar $\mu_i(\mathbf{s}_{-i})$ como una función que asigna una probabilidad a cada una de las combinaciones de estrategias reducidas de un jugador:

$$\begin{aligned} \mu_i : \quad & S_{-i} \to [0,1] \\ & \mathbf{s}_{-i} \mapsto \mu_i(\mathbf{s}_{-i}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por ser una distribución de probabilidad dicha función deberá cumplir que $\mu_i(\mathbf{s}_{-i}) \geq 0 \, \forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ y que $\Sigma_{\mathbf{s}_{-i}} \mu_i(\mathbf{s}_{-i}) = 1$.

Definición 2.3.1 (Expectativas de un jugador) *Las expectativas del jugador i sobre el comportamiento del resto de jugadores vienen dadas por una distribución de probabilidad que representamos mediante una función* $\mu_i(\mathbf{s}_{-i}) \in \Delta(S_{-i})$ *que cumplirá* $\mu_i(\mathbf{s}_{-i}) \geq 0 \, \forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$ *y que* $\Sigma_{\mathbf{s}_{-i}} \mu_i(\mathbf{s}_{-i}) = 1$.

▶ Ejercicio 2.3.1

Considere un juego con cuatro jugadores, cada uno de ellos con dos estrategias, y explique como sería la función $\mu_i(\mathbf{s}_{-\mathbf{i}})$ para cada uno de ellos.

2.3.2 Expectativas y elección racional

Consideremos un jugador i con unas expectativas dadas $\mu_i(\mathbf{s}_{-i})$ sobre el comportamiento del resto de jugadores. Dejando para más adelante el análisis del proceso de formación de esas expectativas, nos centramos en cómo elegiría entre sus estrategias. Su incertidumbre sobre lo que harán los otros hace que cada una de sus estrategias no lleve asociado un único desarrollo del juego, sino distintos desarrollos posibles, cada uno de ellos con una probabilidad asociada (la que asigna en sus expectativas a las combinaciones de estrategias de los otros que llevan, dada la suya, a ese desarrollo del juego). La elección entre sus estrategias la hemos de plantear, por tanto, como una elección entre *loterías*, entiendo por tal un conjunto de pagos o ganancias posibles, cada una de ellos con una determinada probabilidad asociada. A modo de ejemplo, en el juego de la Figura 2.2, bajo unas determinadas expectativas para el jugador I dadas por el vector $(p, 1-p)$, su elección entre las estrategias M y B la

[5] Dado un conjunto finito cualquiera A, en matemáticas es habitual recoger por $\Delta(A)$ el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre dicho conjunto.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

hemos de plantear como una elección entre las siguientes loterías:

$$l_M = (8, 5; p, 1-p);$$
$$l_B = (9, 4; p, 1-p).$$

Como ya explicamos anteriormente, en estos casos supondremos que el jugador elige aquella estrategia que la da una mayor ganancia esperada[6]. A modo de ejemplo, si el jugador I tiene unas expectativas dadas por $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, elegirá su estrategia M ya que $V(l_M) = \frac{23}{4} > \frac{21}{4} = V(l_B)$.

▶ Ejercicio 2.3.2

Determine el conjunto de expectativas bajo las cuales el jugador I elegiría su estrategia B.

A partir de ahora asociaremos, por tanto, el comportamiento racional de los jugadores con la elección de estrategias que sean *mejor respuesta* a sus expectativas, en el sentido de que no exista ninguna otra estrategia a su alcance que tenga un mayor pago esperado (si puede haber otras que tengan el mismo pago esperado, esto es, la mejor respuesta a unas expectativas dadas no tiene porque ser única).

Definición 2.3.2 (Estrategia mejor respuesta) *Dado $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \rangle$ y dadas unas expectativas del jugador i, $\mu_i(\mathbf{s}_{-i})$, la estrategia $\dot{s}_i$ es mejor respuesta a dichas expectativas sí y solo sí $V_i\left(\dot{s}_i; \mu_i(\mathbf{s}_{-i})\right) \geq V_i\left(s_i; \mu_i(\mathbf{s}_{-i})\right)\ \forall s_i \in S_i$.*

Si alguna de las estrategias de S_i no constituye mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles, podemos descartar que sea elegida por un jugador racional (por definición tiene otra que le da un mayor pago esperado). En otras palabras, jugadores racionales no elegirán nunca aquellas estrategias para las que existe una estrategia mejor sean cuales sean sus expectativas sobre el comportamiento del resto. Es muy importante tener en cuenta que con este criterio de selección no estamos limitando en modo alguno el tipo de expectativas que se puede formar un jugador racional (salvo por el hecho de que deben ser tales que se pueden recoger a través de una distribución de probabilidad).

Una estrategia dominada no puede ser, por su propia definición, mejor respuesta sean cuales sean las expectativas del jugador. La pregunta importante, sin embargo, es si pueden existir

[6]Recordemos que si los pagos vienen dados en unidades monetarias estaríamos asumiendo agentes neutrales al riesgo. Un planteamiento más general, que incorporase el análisis del efecto del riesgo sobre el comportamiento de los agentes, requeriría que los pagos viniesen dados de tal forma que ya recogiesen las preferencias de los individuos en relación a las loterías. En este segundo caso, estaríamos suponiendo que los pagos vienen dados en valores de función de utilidad cardinal y que los jugadores eligen buscando maximizar su utilidad esperada.

estrategias que, sin estar dominadas, no constituyan mejor respuesta bajo ninguna de las posibles expectativas del jugador. Sólo en este caso estaríamos avanzando en la caracterización del comportamiento racional. Para tratar de responder a la misma, consideremos el juego de la Figura 2.5. Si nos ponemos en lugar del jugador I vemos que ninguna de sus tres estrategias esta dominada. Queremos determinar ahora si existen expectativas (distribuciones de probabilidad de la forma $(p, 1-p)$ sobre S_{II}) que sostengan a cada una de ellas como mejor respuesta. A primera vista apreciamos que s_{I1} sería la mejor respuesta cuando el jugador I estuviese seguro de que el II va a jugar s_{II1} $(p = 1)$ y, de la misma manera, s_{I2} sería la mejor respuesta cuando estuviese seguro de que el II va a jugar s_{II2} $(p = 0)$. Por tanto, la duda que nos queda es si existirá algún valor de p que haga que sea s_{I3} la estrategia con una mayor pago esperado, esto es, que sea mejor respuesta para I. Para un valor cualquiera de p, el pago esperado del jugador I asociada a cada una de sus estrategias sería:

$$
\begin{aligned}
V_I(s_{I1}; p) &= 10p \\
V_I(s_{I2}; p) &= 10(1-p) \\
V_I(s_{I3}; p) &= 4.
\end{aligned}
$$

En la Figura 2.7 aparecen recogidos los valores que toman estas tres funciones para todos los posibles valores de p. Como puede apreciarse en la misma, no existe ningún valor de p que haga que s_{I3} sea una mejor respuesta para el jugador I. Si cree más probable s_{II1} $(p > .5)$, su mejor respuesta es s_{I1}; si cree más probable s_{II2} $(p < .5)$, su mejor respuesta es s_{I2}; y si asigna la misma probabilidad a ambas $(p = .5)$, son mejores respuestas tanto s_{I1} como s_{I2}.

Ejercicio 2.3.3

Determine el conjunto de estrategias que pueden ser mejores respuestas bajo algunas de las expectativas posibles para cada uno de los jugadores en el siguiente juego:

	s_{II1}	s_{II2}
s_{I1}	$10, 2$	$0, 4$
s_{I2}	$0, 1$	$10, 3$
s_{I3}	$6, 8$	$6, 0$

Figura 2.8

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

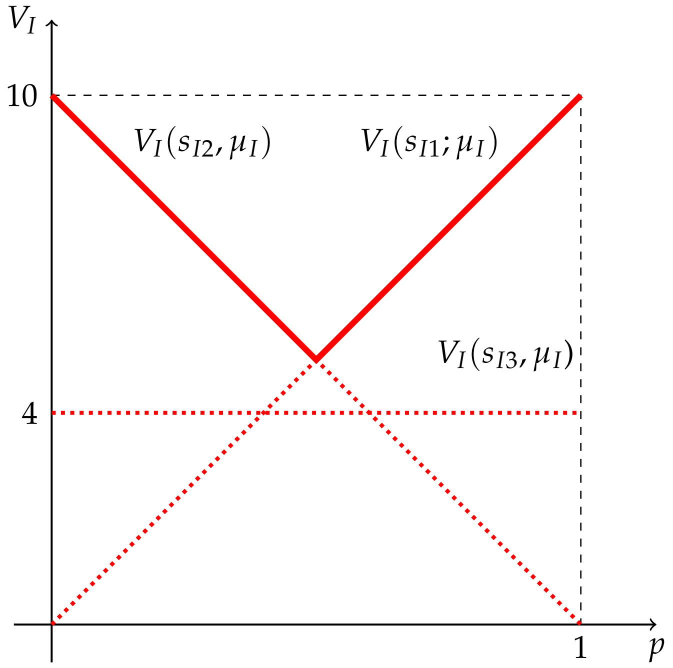

Figura 2.7. ***Pago esperado de las estrategias puras del jugador I en función de sus expectativas sobre el comportamiento del II.***

El ejemplo anterior pone de manifiesto que caracterizar el comportamiento racional en términos de la no elección de estrategias que no sean mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles, va más allá de hacerlo en términos de la no elección de estrategias estrictamente dominadas. En la práctica lo habitual será comenzar eliminando primero las estrategias de un jugador que estén estrictamente dominadas, pasando luego a considerar si existe alguna otra estrategia que no sea mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles[7].

A modo de resumen, los resultados alcanzados hasta el momento en relación con el comportamiento de jugadores racionales en situaciones de interdependencia estratégica pueden resumirse en las siguientes dos proposiciones:

1. no elegirán nunca estrategias que no sean *mejor respuesta* bajo algunas de sus expectativas posibles;

2. una estrategia estrictamente dominada nunca será mejor respuesta, pero la afirmación contraria no es cierta.

[7] Plantearemos en términos más generales la relación entre dominancia y mejor respuesta en el Tema 4, una vez que hayamos ampliado el concepto de estrategia para incluir las denominadas *estrategias mixtas*.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.4 Dominancia iterada y estrategias racionalizables

2.4.1 Introducción

Hasta el momento nuestra caracterización del comportamiento de jugadores racionales se reduce a la afirmación de que nunca jugarán estrategias que no sean mejores respuestas bajo alguna de las expectativas posibles. Sin embargo, la esencia del comportamiento estratégico se encuentra precisamente en el proceso de formación de expectativas. En última instancia, un buen estratega lo será por su capacidad para anticipar el comportamiento de los demás. A la hora de abordar en nuestros modelos el problema de qué tipo de expectativas cabe esperar que tenga un jugador y cuales no, es útil distinguir entre dos posibles enfoques:

1. un enfoque *ex-ante* basado en la *introspección*: los jugadores utilizan la información de que disponen para «ponerse en los pies del otro» y tratar de anticipar que harán o que no harán los otros jugadores.

2. un enfoque *ex-post* basado en el *aprendizaje* o en la *evolución*: aunque en principio los jugadores pueden tener cualquier tipo de expectativas, estas irán cambiando y adaptándose a la información que reciban los jugadores procedente de su participación de manera repetida en situaciones similares, de la observación de los resultados que obtienen otros jugadores en función de las estrategias que eligen,. . . . Lo importante en este caso es el tipo de expectativas que se sostienen después de ese proceso.

En esta apartado vamos a utilizar el primero de los enfoques para tratar de avanzar en la caracterización del comportamiento de los jugadores en el marco de los juegos simultáneos con información completa. La primera pregunta que debemos hacernos es, por tanto, de qué información disponen los jugadores en este tipo de juegos y, a partir de la respuesta a la misma, en que medida es posible acotar el tipo de expectativas que se pueden formar. Evidentemente, el resultado final del proceso será que si conseguimos acotar las expectativas que cabe esperar que se formen los jugadores también podremos acotar el conjunto de estrategias entre las que elegirán.

Toda la información de la que dispone un jugador en el tipo de juegos que estamos estudiando se deriva del hecho de que **tanto la estructura del juego como la racionalidad de todos los jugadores son conocimiento común**. El conocimiento común de la estructura del juego supone que cada jugador conoce de manera perfecta las alternativas y las preferencias de cada uno de los otros, pudiendo ponerse en su lugar y considerar su problema de elección en las mismas condiciones que lo hace el jugador al que le corresponde decidir. Supone, también, que cada jugador sabe que cada uno de los otros dispone de información para plantearse igual que él mismo el problema de decisión al que se enfrenta, que cada jugador sabe que todos saben que cada uno de ellos puede ponerse en lugar de cada uno de los otros, . . . y

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

así *ad infinitum*. Por su parte, el conocimiento común de la racionalidad supone que cada jugador anticipa que cada uno de los otros sólo elegirá estrategias que sean mejor respuesta a sus expectativas, pero también que cada jugador sabrá que los otros anticipan que sólo jugará estrategias que sean mejor respuesta, ... y así indefinidamente.

El objetivo es determinar las expectativas que son consistentes con ese supuesto de que la racionalidad y la estructura del juego son conocimiento común y, partiendo de ahí, el conjunto de estrategias que son mejor respuesta a ese subconjunto de expectativas (que son *racionalizables*). Comenzaremos considerando situaciones en las que la racionalidad de los jugadores se manifiesta únicamente en términos de la no elección de estrategias que estén estrictamente dominadas por otras, dejando para el final el caso general en que la racionalidad se manifiesta en la no elección de estrategias que no sean mejor respuesta bajo ninguna de las expectativas posibles.

2.4.2 Dominancia iterada

Consideremos, a modo de ejemplo, el juego de la Figura 2.9. El jugador I no tiene ninguna estrategia dominante, esto es, su mejor estrategia depende de que lo que haga el II. En consecuencia, antes de elegir tratará de adivinar que estrategia elegirá el otro jugador. Dado que es un juego de información completa, I conoce la función de ganancias del jugador II y anticipa que elegirá su estrategia dominante s_{II1}. En otras palabras, las únicas expectativas consistentes con la información de que dispone el jugador I son por tanto aquellas que asigna probabilidad 1 a que II elija s_{II1}. Dadas esas expectativas, la elección racional del I es s_{I1}. Dado que la elección del II no depende en este caso de las expectativas que se forme, tenemos ya una propuesta concreta sobre la forma en que se desarrollará el juego: la combinación de estrategias (s_{I1}, s_{II1}).

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$4,4$	$2,3$
$\mathbf{s_{I2}}$	$2,2$	$5,1$

Figura 2.9. Un juego con solución por dominancia iterada

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

En la Figura 2.10 aparece un juego en forma normal que también tiene solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas, pero en este caso el número de iteraciones es mayor.

	L	C	D
A	4, 3	5, 1	6, 2
M	2, 1	8, 4	3, 6
C	3, 0	9, 6	2, 8

Figura 2.10. Un juego con solución por dominancia iterada

Únicamente existe una estrategia dominada, la C para el jugador II. A la hora de elegir entre las estrategias restantes, cada jugador necesariamente ha de formarse unas expectativas sobre lo que hará el otro. Vamos a ponernos en lugar de cada uno de ellos, tratando de analizar su elección:

- Jugador I
  1. La mejor alternativa para mí depende de lo que haga II. Dado que conozco sus ganancias (es un juego de información completa), sé que el conoce las mías, sé que el sabe que yo conozco las suyas, ... voy a intentar tratar de anticipar cual puede ser su decisión.
  2. II no jugará C, ya que, cualesquiera que sean sus expectativas sobre lo que yo voy a hacer, le da una mayor ganancia D que C. Para elegir entre L y D, tratará de anticipar que estrategia elegiré yo. Como conoce mis ganancias, verá que mi elección dependerá de las expectativas que me forme sobre como elegirá él. Anticipará que yo creo que no va a jugar nunca C y, en consecuencia, que voy a elegir A, por lo que a él le interesa L.
- Jugador II
  1. No me interesa jugar C, ya que decida lo que decida I, es mejor para mí D.
  2. Para decidirme entre L y D, necesito conocer cual será la decisión de I. Dado que conozco sus ganancias, sé que el conoce las mías, sé que el sabe que yo conozco las suyas, ... voy a intentar tratar de anticipar cual puede ser su decisión.

3. I anticipará que yo no voy a elegir nunca C, por lo que elegirá A. Por tanto, me interesa elegir L.

La combinación de estrategias (A, L) constituye, por tanto, la solución por dominancia iterada de este juego.

En general, el procedimiento a seguir para buscar la solución consiste en identificar primero las estrategias dominadas de alguno de los jugadores y eliminarlas. Dado que se trata de juegos de información completa, todos los jugadores conocen las estrategias dominadas de los otros y anticipan que no las elegirán. Una vez que los jugadores asignan probabilidad cero a la elección de determinadas estrategias por parte de otros jugadores, pueden aparecer nuevas estrategias dominadas, procediendo a una segunda ronda de eliminación. Si este proceso nos deja con una única estrategia para cada jugador, dicha combinación de estrategias será la solución del juego por eliminación iterativa de estrategias dominadas.

Definición 2.4.1 (Solución por dominancia iterada) *Dado un juego estático en forma normal G, si la eliminación iterativa de estrategias dominadas nos conduce a una única estrategia para cada jugador, dicha combinación de estrategias constituye la solución por dominancia iterada del juego.*

► Ejercicio 2.4.1

Determine la solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas del siguiente juego:

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$	$\mathbf{s_{II3}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$8, 3$	$0, 4$	$4, 4$
$\mathbf{s_{I2}}$	$4, 2$	$1, 5$	$5, 3$
$\mathbf{s_{I3}}$	$3, 7$	$0, 1$	$2, 0$

Figura 2.11. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.4.1

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.4.3 Racionalizabilidad

En el proceso de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas, la racionalidad de los jugadores se asocia a la no elección de estrategias que estén estrictamente dominadas. Sin embargo, hemos visto anteriormente que la racionalidad de los jugadores la hemos de interpretar en el sentido más general de que no elegirán nunca estrategias que no sean mejor respuesta bajo alguna de las expectativas posibles sobre el comportamiento del resto. Si partimos de que lo que es conocimiento común es precisamente que los jugadores no elegirán estrategias que no sean mejores respuesta a alguna de las expectativas posibles (en lugar de que no jugarán estrategias dominadas) estaremos aplicando también un criterio de selección de estrategias más general que el de la dominancia iterada y que se conoce como *racionalizabilidad*. A modo de ejemplo, el juego de la Figura 2.5 no tiene solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas, pero solamente es racionalizable la combinación de estrategias (s_{I1}, s_{II1}). En cualquier caso, el análisis detallado de la relación entre dominancia iterada y racionalizabilidad lo aplazamos hasta que se introduzca el concepto de estrategias mixtas en los próximos temas.

2.5 Dominancia débil

Hasta el momento hemos venido utilizando el concepto de dominancia estricta, esto es, hemos considerado situaciones en las que unas determinadas estrategias son peores que otras hagan lo que hagan los otros jugadores. Sin embargo, en algunos casos puede ocurrir que una determinada estrategia lleve asociados resultados que nunca serán peores que los de otra, pero para determinadas casos serán iguales. Las definiciones que hemos dado anteriormente de estrategia (estrictamente) dominada y estrategia (estrictamente) dominante se extienden de manera automática a su versión *débil*:

Definición 2.5.1 (Estrategia débilmente dominante) *Dado* $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \rangle$*, la estrategia* $\tilde{s}_i$ *es una estrategia (débilmente) dominante para el jugador i si y sólo si:* $U_i(\tilde{s}_i, s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_i$ *y existe al menos una combinación de estrategias del resto de jugadores* $\check{\mathbf{s}}_{-i}$ *tal que* $U_i(\tilde{s}_i, \check{\mathbf{s}}_{-i}) > U_i(s_i, \check{\mathbf{s}}_{-i}) \forall s_i \in S_i$.

▶ Ejercicio 2.5.1

Defina **estrategia débilmente dominada**.

La pregunta que debemos hacernos ahora es si la busqueda de soluciones aplicando el criterio de dominancia estricta puede extenderse al de dominancia débil. Consideremos, a modo de ejemplo, que el modelo de la recolección de setas los pagos de los jugadores fuesen los que se recogen en la Figura 2.12.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

	H	M
H	$10, 10$	$20, 0$
M	$0, 20$	$20, 20$

Figura 2.12. A setas, ¿hoy o mañana?(b)

Con los nuevos pagos la estrategia H sigue dominando a la M para ambos jugadores, pero ahora lo hace débilmente (conduce a un mayor pago si el otro coge H pero daría el mismo pago si el otro coge M). ¿Existen las mismas razones para proponer (H, H) como solución que si la dominancia es estricta? La elección de una estrategia débilmente dominada puede conducir al mismo resultado que la estrategia que la domina, algo que no ocurre si lo que elige el jugador es una estrategia estrictamente dominada. En la medida que para unas determinadas circunstancias es uno de los mejores cursos de acción posibles, no podemos tildar dicha elección de irracional, en especial en marcos en los que existan razones para que los jugadores crean muy probable que se van a dar esas circunstancias (que los otros jugadores van a elegir la combinación de estrategias para los que la estrategia débilmente dominada es una de las mejores respuestas). En el caso de nuestro ejemplo, podrían existir características de la situación de interdependencia estratégica que no hemos incorporado a nuestro modelo que hiciesen que cada jugador confiase en que el otro esperará a mañana. En ese caso (M, M) no sería descartable como solución del juego; aún más se trata de una solución estable en un sentido que analizaremos en el próximo tema.

De la misma manera, podríamos recurrir a la eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas como criterio de selección. Dicho criterio descansaría en el supuesto de que es conocimiento común que los jugadores no eligen estrategias débilmente dominadas, por lo que presentaría el mismo inconveniente que acabamos de señalar. Dado que una estrategia débilmente dominada si es mejor respuesta (aunque haya otras que también lo son) para unas determinadas expectativas, puede ser racionalizable.

En definitiva, cuando recurramos a la eliminación de estrategias débilmente dominadas debemos ser especialmente cuidadosos, ya que su aplicación no tiene una base sólida en la racionalidad (y el hecho de que la misma sea conocimiento común), algo que si ocurría en el caso de la dominancia estricta.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

2.6 Ejercicios

▶ Ejercicio 2.6.1

Ponga algún ejemplo de situaciones tipo *dilema del prisionero*.

▶ Ejercicio 2.6.2 *Amigo o enemigo*

En un concurso de televisión dos participantes elegidos al azar trabajan en equipo para conseguir la mayor cantidad de dinero posible[a]. A continuación han de decidir de manera simultánea entre dos opciones, *amigo* o *enemigo*, determinándose el premio de cada uno de ellos de la siguiente manera:

- si los dos eligen *amigo*, se reparten la cantidad acumulada x a partes iguales;
- si uno elige *amigo* y el otro *enemigo*, éste último se lleva todo;
- si ambos eligen *enemigo*, ninguno de los dos se lleva nada.

Se pide:

1. Haga la representación en forma normal de esta situación de interdependencia estratégica.
2. ¿Se corresponde con una situación tipo Dilema del Prisionero? Explique su respuesta.
3. Comente los factores que considere que pueden influir en la decisión de los concursantes.

[a] La situación de interdependencia estratégica que se recoge en este ejercicio se corresponde con la planteada en el concurso *Friend or Foe* emitido por el canal americano Game Show Channel por primera vez en el año 2002. En You Tube pueden encontrarse muchos videos con programas grabados. Otro video interesante relacionado con un concurso similar puede verse aquí.

▶ Ejercicio 2.6.3

Para el juego de la figura adjunta:

1. Exprese mediante un vector el conjunto de posibles expectativas de cada uno de los jugadores.
2. A partir de dichos vectores, exprese las loterías asociadas a cada estrategia del jugador II.
3. Determine la estrategia óptima del jugador II bajo el supuesto de que asigna la misma probabilidad a cada una de las estrategias del jugador I.

4. Ponga algún ejemplo de expectativas que llevaría al jugador I a elegir su estrategia s_{I1}.

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$	$\mathbf{s_{II3}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$2, 2$	$4, 2$	$3, 4$
$\mathbf{s_{I2}}$	$4, -2$	$1, 3$	$2, 1$
$\mathbf{s_{I3}}$	$3, 3$	$1, 1$	$5, -1$

Figura 2.13. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.6.3

▶ Ejercicio 2.6.4

Dado el juego de la figura adjunta, determine para cada jugador el conjunto de estrategias que serían mejor respuesta bajo alguna de las expectativas posibles.

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$	$\mathbf{s_{II3}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$0, 3$	$6, 4$	$3, 1$
$\mathbf{s_{I2}}$	$5, 1$	$2, 2$	$2, 0$
$\mathbf{s_{I3}}$	$2, 2$	$3, 0$	$0, 1$

Figura 2.14. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.6.4

▶ Ejercicio 2.6.5

Determine la solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas del juego cuya matriz de pagos aparece en la Figura 2.16.

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	$8,5$	$14,9$	$1,12$
s_{I2}	$6,1$	$24,3$	$3,0$
s_{I3}	$5,7$	$16,1$	$2,9$

Figura 2.15. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.6.5

▶ Ejercicio 2.6.6

Determine las combinaciones de estrategias racionalizables para el siguiente juego:

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	$2,4$	$12,0$	$-4,-4$
s_{I3}	$3,-4$	$2,0$	$2,8$

Figura 2.16. Matriz de pagos para el Ejercicio 2.6.6

▶ Ejercicio 2.6.7

Adivinando la media. Cada uno de los individuos de un grupo ha de elegir de forma simultánea un número entre el 1 y el 100, ambos inclusive. A partir de todos los números elegidos se calcula la media y el individuo cuyo número esté más próximo a las $\frac{2}{3}$ partes de la misma se le ofrece un determinado premio. Determine la solución por eliminación iterativa de estrategias dominadas de este juego.

▶ Ejercicio 2.6.8

Considere una situación conocida como **la paradoja del presidente**. Tres individuos,I, II, y III tienen que elegir por votación entre tres alternativas A,B y C. Las reglas de la votación establecen que se llevará a cabo aquella alternativa que obtenga más votos, y que en caso de empate decidirá el voto del presidente. Las preferencias de cada individuo vienen dadas por:

$$A \succ_I B \succ_I C; \quad B \succ_{II} C \succ_{II} A; \quad C \succ_{II} A \succ_{III} B$$

Busque la solución por eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas y explique a continuación porque se habla de paradoja.

▶ Ejercicio 2.6.9

Una subasta de segundo precio es aquella cuyas reglas establecen que el mejor postor se adjudicará el objeto de la subasta pero pagando únicamente el importe de la segunda mejor puja (está implícito por ejemplo en las subastas de Ebay). Discuta de manera informal la influencia sobre el comportamiento de los participantes en una subasta de este tipo de regla en relación con la alternativa de que el ganador tenga que pagar el importe de su puja (subasta de primer precio).

Represente esta situación como un juego en forma estratégica y demuestre que en la subasta de segundo precio existe una solución por dominancia débil consistente en que cada jugador hace una puja igual a su precio de reserva .

▶ Ejercicio 2.6.10

Considere la situación de interdependencia estratégica asociada a la elección por los alumnos de una determinada clase de un delegado mediante votaciones a sobre cerrado.

1. Considere inicialmente que se presentan dos candidatos A y B y responda a las siguientes cuestiones.

   a) Represente esta situación como un juego en forma normal.

   b) Considere un estudiante que prefiere como delegado al candidato A y demuestre que la estrategia votar A es para él una estrategia débilmente dominante.

2. Considere ahora que se presentan tres candidatos, A, B y C.

   a) Represente al situación como un juego en forma normal.

   b) Considere un estudiante que prefiere como delegado al candidato A y determine si tiene alguna estrategia débilmente dominante. Compruebe a continuación si alguna de las estrategias está débilmente dominada.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria