Teoría de Juegos

Tema 3

Juegos estáticos (II)

Equilibrio de Nash. Estrategias mixtas.

Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria
alvarezp@unican.es

Índice general

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.1 Introducción

En el tema anterior hemos abordado el proceso de formación de expectativas a partir del supuesto de que tanto la estructura del juego, como la racionalidad, eran conocimiento común. A partir de ese supuesto, descartábamos determinados tipos de expectativas y, como consecuencia, la elección de determinadas estrategias. El resultado era la selección de un conjunto más reducido de combinaciones posibles de estrategias que cumplían la propiedad de ser racionalizables.

Frente a este enfoque *ex-ante*, en el que los jugadores *se ponen en los pies de los otros* para intentar anticipar su comportamiento, cabe adoptar un enfoque *ex-post*, en el que los jugadores se forman sus expectativas a partir de la experiencia derivada de la participación de manera repetida en el mismo tipo situaciones de interdependencia estratégica. Desde este punto de vista, la idea de equilibrio conduce de manera natural a proponer como condición que debe cumplir una combinación de estrategias para ser solución de un juego que en la misma cada jugador este adoptando una estrategia que sea la mejor respuesta a las estrategias del resto de jugadores. Si esto se cumple, estaríamos ante un estado estacionario en el que los jugadores verían *ex-post* que la estrategia elegida les ha llevado a los mejores resultados posibles. Esa propiedad de que una combinación de estrategias de ser simultáneamente mejor respuesta para todos los jugadores, es precisamente la característica del concepto de solución más conocido en la teoría de juegos, el de equilibrio de Nash. En la primera parte del tema se define este concepto y se explica la forma habitual de determinar las combinaciones de estrategias que son equilibrio de Nash a partir de las *funciones de mejor repuesta*.

En la segunda parte del tema se aborda la ampliación del espacio de elección de los jugadores, permitiendo ahora que puedan elegir *estrategias mixtas*. Cada jugador en lugar de poder elegir únicamente entre sus *estrategias puras*, podrá ahora escoger una *regla* para seleccionar de manera aleatoria entre ellas. Una vez definidas las estrategias mixtas, abordaremos de nuevo la caracterización del comportamiento de los jugadores en este marco ampliado. Extenderemos el concepto de equilibrio de Nash al caso de estrategias mixtas y veremos como afecta al análisis en términos de dominancia y racionalizabilidad que hemos realizado en el Tema 2. Para concluir el tema, se presenta una discusión muy general sobre el concepto de equilibrio de Nash, a la vez que se aborda el problema de la existencia, la unicidad y, en su caso, la selección de uno de los equilibrios de un juego como solución del mismo.

3.2 Equilibrio de Nash

3.2.1 Concepto

Consideremos el juego de la Figura 3.4 y supongamos que existe una población de individuos que se enfrentan de forma repetida, pero anónima[1], a este tipo de situación de interdependencia estratégica. Cada jugador se enfrenta, por tanto, muchas veces a ese tipo de situación, pero cada una de ellas con *rivales* distintos. Bajo esta perspectiva, resulta lógico preguntarnos si cabe esperar que surja una manera *estable* de desarrollarse el juego, esto es, que siempre que los jugadores se enfrenten a una situación de este tipo *jueguen* de la misma manera. Si así fuese, la combinación de estrategias propuesta como forma estable de desarrollarse el juego debería servir de base para la formación de expectativas de los jugadores y, además, debería ser *racional*, en el sentido de que cada jugador esté eligiendo una estrategia óptima dadas esas expectativas. En otras palabras, si un juego tiene una forma estable de jugarse, entonces:

- las expectativas de cada jugador cada vez que se enfrente a una situación de ese tipo deberían ser que el otro se comportará *como lo hacen siempre jugadores de ese tipo en estas situaciones*;
- cada jugador debería estar adoptando una estrategia que fuese la mejor respuesta a esas expectativas.

Consideremos la combinación de estrategias (s_{I2}, s_{II3}) y veamos si cumple estas condiciones. Si el jugador I creyese, en base a su experiencia previa, que los de tipo II siempre eligen la estrategia s_{II3} ciertamente su elección sería s_{I2}. Sin embargo, si el jugador II creyese que los jugadores de tipo I siempre eligen s_{I2}, su mejor respuesta no sería s_{II3}, sino s_{II2}. En definitiva, los jugadores de tipo II jugarían de otra manera, las expectativas de los de tipo I también serían otras, lo que les llevaría a su vez a jugar de otra manera,. . . .

Si analizásemos, una por una, todas las combinaciones de estrategias del juego, veríamos que sólo en una de ellas, la (s_{I1}, s_{II1}), se dan esas condiciones de consistencia para proponerla como forma de jugar estable. En efecto, si cada jugador se comportase de acuerdo con ella siempre que se enfrentase a una situación de este tipo, vería a posteriori que su elección ha sido la mejor posible dado lo que ha hecho el otro. Cada vez que se enfrentase a una situación como ésta no tendría razones para cambiar sus expectativas y, por tanto, tampoco su comportamiento. Lo que distingue en última instancia a la combinación (s_{I1}, s_{II1}) del resto es que ambas estrategias son simultáneamente mejor respuesta la una a la otra. Un **equi-**

[1] En el caso de que los jugadores asignasen una probabilidad positiva a volver a enfrentarse con el otro deberíamos modelizarlo como un juego dinámico, ya que en este caso a la hora de tomar una decisión tendría en cuenta las consecuencias futuras de la misma (como influirá en el comportamiento del otro en el futuro).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

librio de Nash es precisamente una combinación de estrategias que cumple esa condición: que **cada jugador esta eligiendo la mejor estrategia posible dadas las estrategias elegidas por los otros**.

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$	$\mathbf{s_{II3}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$2,4$	$5,0$	$0,2$
$\mathbf{s_{I2}}$	$0,0$	$1,8$	$4,6$

Figura 3.1. Un juego con un equilibrio de Nash

Definición 3.2.1 (Equilibrio de Nash) *Dado un juego en forma normal,* $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{U_i\}_{i=1}^n \rangle$*, una determinada combinación de estrategias* $\hat{s} = (\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$ *constituye un* ***equilibrio de Nash*** *del mismo sí y sólo sí:* $U_i(\hat{s}_i, \hat{s}_{-i}) \geq U_i(s_i, \hat{s}_{-i}), \forall s_i \in S_i, \quad \forall i$.

Alternativamente:

Definición 3.2.2 *Dado un juego en forma normal,* $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{U_i\}_{i=1}^n \rangle$*, una determinada combinación de estrategias* $\hat{s} = (\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$ *constituye un* ***equilibrio de Nash*** *del mismo sí y sólo sí:* $\hat{s}_i \in \arg \max_{s_i} U_i(s_i, \hat{s}_{-i}), \quad i = 1, \ldots, n$.

A diferencia del tema anterior, el criterio para caracterizar la elección de estrategias por parte de los jugadores ya no es la racionalización *ex-ante* su decisión individual, sino la consistencia *ex-post* de las expectativas y las decisiones de todos ellos. Podemos interpretar el equilibrio de Nash como un estado estacionario, en el sentido de que si los jugadores observan que cada vez que se enfrentan a esa situación se desarrolla conforme a $\hat{\mathbf{s}}$ ningún jugador tiene razones para cambiar de estrategia. No las tiene porque esta eligiendo la mejor respuesta dadas unas expectativas, y porque dichas expectativas se ven confirmadas cada vez que *juega*.

Por el momento vamos a centrarnos en el procedimiento a seguir para determinar los equilibrios de Nash de un juego, pero volveremos más adelante sobre la interpretación y justificación del equilibrio de Nash como concepto de solución.

3.2.2 Funciones de mejor respuesta y determinación del equilibrio de Nash

El procedimiento habitual a la hora de determinar los equilibrios de Nash de un juego consta de dos pasos:

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1. Búsqueda, para cada jugador, de las estrategias que constituyen mejores repuestas a cada posible combinación de estrategias del resto de jugadores :

$$\begin{aligned} B_i(\mathbf{s}_{-i}):\quad & S_{-i} \longrightarrow S_i \\ & \mathbf{s}_{-i} \longmapsto \{s_i^* : u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s_i, \mathbf{s}_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i\}. \end{aligned}$$

   Dado que para determinadas $\mathbf{s}_{-i}$ el jugador i puede tener más de una estrategia que sea mejor respuesta, $B_i(s_{-i})$ es en general una *correspondencia*; solamente en el caso en que a cada $\mathbf{s}_{-i}$ le corresponda una única estrategia óptima estaremos ante una función propiamente dicha.

2. Determinación de todas las combinaciones de estrategias que son simultáneamente mejores respuestas para todos los jugadores:

$$(\hat{s}_1, \hat{s}_2, \ldots, \hat{s}_n) \quad EN \Leftrightarrow \hat{s}_i \in B_i(\hat{\mathbf{s}}_{-i}) \quad \forall i.$$

Ejemplo 3.2.1

En el juego representado en la Figura 3.17 las mejores respuestas de un jugador a cada posible estrategia del otro se señalan subrayando el pago correspondiente. El hecho de que solo la combinación de estrategias (s_{I1}, s_{II1}) presente los dos pagos subrayados, nos indica que constituye el único equilibrio de Nash del juego.

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$\underline{16}, \underline{7}$	$3, 5$
$\mathbf{s_{I2}}$	$4, \underline{8}$	$\underline{22}, 6$
$\mathbf{s_{I3}}$	$7, 5$	$19, \underline{9}$

Figura 3.2. Mejores respuesta y equilibrio de Nash

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

▶ Ejercicio 3.2.1

Determine todos los equilibrios de Nash del juego que aparece en la figura adjunta.

s_{III1}:

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	$1,4,3$	$4,6,0$	$1,2,2$
s_{I2}	$2,8,2$	$3,4,-1$	$1,6,-1$
s_{I3}	$2,2,1$	$5,8,2$	$2,4,0$

s_{III2}:

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	$1,4,2$	$3,6,1$	$1,2,1$
s_{I2}	$2,2,1$	$2,0,1$	$1,0,2$
s_{I3}	$3,2,-1$	$2,4,2$	$2,6,-1$

Figura 3.3. Un juego en forma estratégica con tres jugadores, en el cual el jugador III elige s_{III1} ó s_{III2}

▶ Ejercicio 3.2.2

La figura adjunta recoge dos versiones de un un juego conocido como *la caza del ciervo*[a]. La primera versión es la forma habitual de presentar la situación planteada originalmente por Rousseau; la segunda es una variante que ha sido utilizada —como alternativa al *dilema del prisionero*— para explicar el *dilema de la seguridad* en el marco de las relaciones internacionales.

Determine para todos los equilibrios de Nash del mismo. Compare a continuación esta situación con la recogida en el *dilema del prisionero*.

	L	C
L	$1,1$	$1,0$
C	$0,1$	$3,3$

	R	$\bar{R}$
R	$2,2$	$3,1$
$\bar{R}$	$1,3$	$4,4$

Figura 3.4

[a]Su nombre hace referencia a una situación planteada por Rousseau, en torno a las dificultades que supone para el logro de la cooperación entre un grupo de individuos la falta de confianza de unos en los otros. La caza de un ciervo requiere el esfuerzo colectivo de un grupo de individuos; sin embargo, durante la caza a cada cazador le puede surgir la oportunidad de coger una liebre. En caso de que un individuo decida tratar de coger la liebre, el grupo no cogerá al venado. La desconfianza de cada individuo, respecto al comportamiento de los otros en el caso de que les salga una liebre, puede llevarles a no participar en la caza en grupo o, si participa, a dedicarse a cazar liebres. Visto desde otro punto de vista: la caza en grupo de un venado requiere un marco institucional en el cuál los individuos confíen los unos en los otros.

3.2.3 Equilibrio de Nash y dominancia

► Ejercicio 3.2.3

Repase el Tema 2 y conteste a continuación a las siguientes cuestiones:

1. Una estrategia (estrictamente) dominada, ¿puede formar parte de un equilibrio de Nash? ¿ Y una estrategia débilmente dominada?
2. Si aplicamos el procedimiento de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas,¿podemos eliminar algún equilibrio de Nash? ¿Ocurre lo mismo si lo extendemos a las estrategias débilmente dominadas?
3. Una estrategia no racionalizable, ¿puede formar parte de un equilibrio de Nash?

3.3 Estrategias mixtas

3.3.1 Equilibrio de Nash en estrategias mixtas: un ejemplo

Consideremos el juego representado en su forma estratégica en la Figura 3.11. Hemos denominado al mismo «pares o nones» porque la situación de interdependencia estratégica que representa se corresponde con la del juego popular que se conoce con ese nombre[2].

	P	**N**
P	$1, -1$	$-1, \ \ 1$
N	$-1, \ \ 1$	$1, -1$

Figura 3.5. «Pares o nones»

Podemos comprobar que ninguna de las cuatro combinaciones de estrategias posibles constituye un equilibrio de Nash[3].

Sin entrar por el momento en la justificación, vamos a considerar ahora que los jugadores en lugar de elegir una única estrategia, lo que hacen es asignar una probabilidad a cada una de ellas. Resulta útil pensar que los jugadores lo que eligen es una *regla* para seleccionar de manera aleatoria entre sus estrategias originales. Denominaremos a cada una de esas posibles reglas **estrategia mixta** y a cada una de las estrategias *originales* **estrategia pura**. Una estrategia mixta es, por tanto, una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras $\{P, N\}$. Podemos considerar que una estrategia pura como una estrategia mixta *degenerada* que asigna toda la probabilidad a una de las alternativas. Vamos a representar de manera genérica una estrategia mixta cualquiera para el jugador I por $\sigma_I = (p, 1-p)$ y una para el jugador II por $\sigma_{II} = (q, 1-q)$.

Consideremos por separado el problema de decisión de cada uno de los jugadores. Si comenzamos poniéndonos en lugar del jugador I, su ganancia esperada si elige una estrategia mixta cualquiera $\sigma_I = (p, 1-p)$, cuando II elija a su vez una mixta cualquiera $\sigma_{II} = (q, 1-q)$

[2]Aunque en el juego popular cada jugador elige libremente el número de dedos que saca extendidos, es inmediato comprobar que lo único relevante de su decisión es si dicho número es par o es impar.

[3]Sea cual sea el desarrollo del juego, el jugador que pierde siempre tiene una estrategia que le hubiese dado una mayor ganancia dada la elección del otro.

vendrá dada por[4]:

$$\begin{aligned} V_I(\sigma_I,\sigma_{II}) &= pV_I(P,\sigma_{II}) + (1-p)V_I(N,\sigma_{II}) \\ &= p[qU_I(P,P) + (1-q)U_I(P,N)] + (1-p)[qU_I(N,P) + (1-q)U_I(N,N)] \\ &= pq(1) + +p(1-q)(-1) + (1-p)q(-1) + (1-p)(1-q)](1) \\ &= 4pq - 2p - 2q + 10. \end{aligned} \tag{3.1}$$

La elección de una estrategia mixta por parte del jugador I queda totalmente determinada por el valor que asigne a p, por lo que podemos plantear su problema de elección en términos de dicho valor. Partiendo de la ecuación 3.3.1 y derivando parcialmente respecto a p podemos ver su influencia sobre la ganancia esperada del jugador I:

$$\frac{\partial V_I}{\partial p}(\cdot) = 4q - 2 \begin{cases} > 0, & \text{si } \; q > 0.5 \\ = 0, & \text{si } \; q = 0.5 \\ < 0, & \text{si } \; q < 0.5 \end{cases} \tag{3.2}$$

Estamos ya en condiciones de determinar la mejor respuesta del jugador I (en términos de que estrategia mixta elegir) para cada posible estrategia mixta del jugador II. Aunque seguiremos utilizando la notación habitual y denominaremos $B_I(\sigma_{II})$ a la correspondencia[5] de mejor respuesta del jugador I, recurriremos a veces a la expresión $p^*(q)$ por resultar más ilustrativa en algunos casos. Dicha correspondencia adopta la forma:

$$B_I(\sigma_{II)} \equiv p^*(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } q > 0.5 \\ \text{cualquier } p \in [0,1], & \text{si } q = 0.5 \\ 0, & \text{si } q < 0.5 \end{cases} \tag{3.3}$$

Podemos representar gráficamente dicha correspondencia:

[4]En lenguaje matemático, esta ganancia esperada es una **combinación convexa** de las ganancias asociadas a cada uno de los posibles desarrollos del juego, en la cual los pesos de cada ganancia posible vienen dados por la probabilidad de que los jugadores elijan la combinación de estrategias puras que lleva a esa ganancia.

[5]En la medida que a algún valor de q le va a corresponder más de un valor de p que constituiría una mejor respuesta estamos ante a una correspondencia y no ante una función.

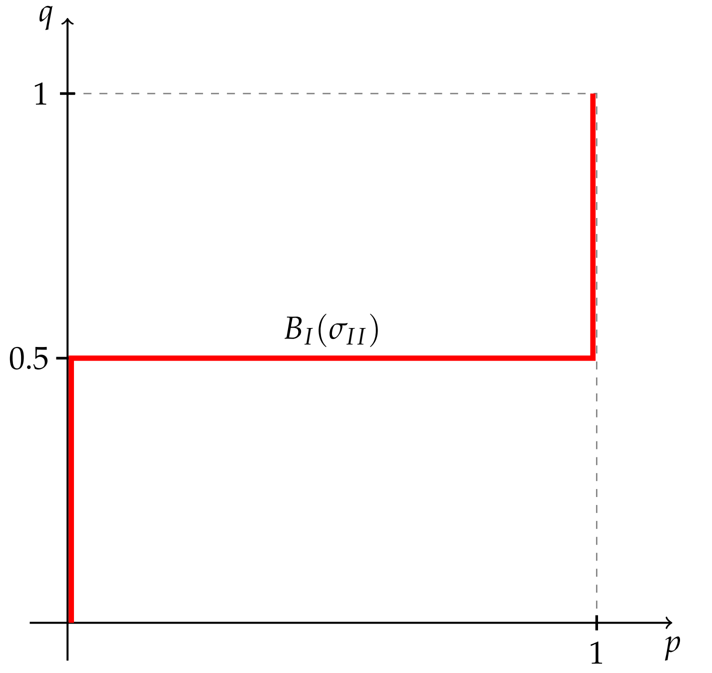

Figura 3.6. ***Correspondencia de mejor respuesta del jugador*** I.Si el jugador I asigna una probabilidad mayor de 0.5 a que el jugador II elija una determinada estrategia, su mejor respuesta es jugar con probabilidad 1 esa misma estrategia (I gana si los dos eligen P o los dos eligen N).Únicamente en el caso de que crea igual de probable que el otro elija cualquiera de las dos estrategias tendría más de una respuesta óptima, de hecho tendría infinitas: su ganancia esperada es la misma elija la mixta que elija.

Si nos ponemos ahora en lugar del jugador II y repetimos el procedimiento anterior, obtenemos como correspondencia de mejor respuesta:

$$B_{II}(\sigma_{I)} \equiv q^*(p) = \begin{cases} 0, & \text{si } p > 0.5 \\ \text{cualquier } p \in [0,1], & \text{si } p = 0.5 \\ 1, & \text{si } p < 0.5, \end{cases} \tag{3.4}$$

la cual aparece representada en la Figura 3.7

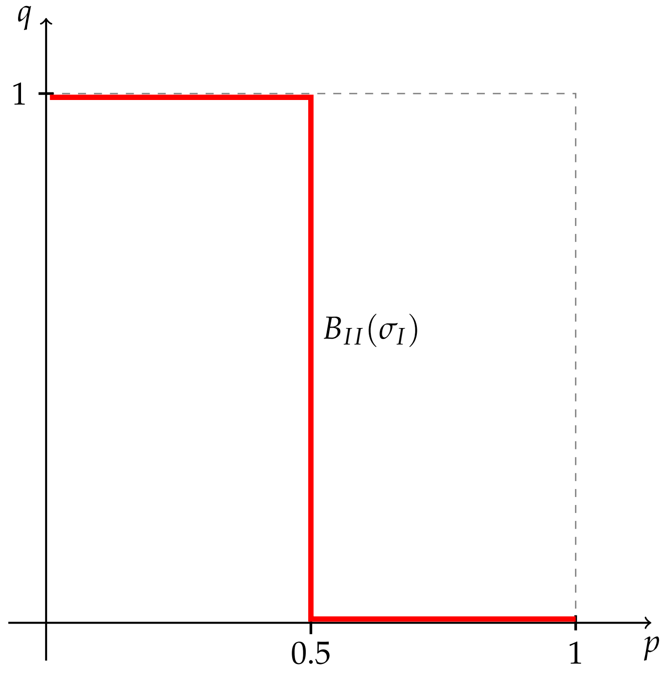

Figura 3.7. ***Correspondencia de mejor respuesta del jugador II.***

Una vez tenemos las correspondencias de mejor respuesta para ambos jugadores, estamos ya en condiciones de determinar si existen o no equilibrios de Nash en estrategias mixtas para este juego. Ampliando el concepto visto de estrategias puras al caso de mixtas, un par de estrategias $(\hat{\sigma}_I, \hat{\sigma}_{II})$ será un equilibrio de Nash si se cumple simultáneamente que:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_I &\in B_I(\hat{\sigma}_{II}) \\ \hat{\sigma}_{II} &\in B_{II}(\hat{\sigma}_I) \end{aligned}$$

La Figura 3.8 nos permite apreciar como estas condiciones solo se cumplen cuando cada jugador elige la estrategia mixta $(0.5, 0.5)$, esto es, adopta la regla de jugar cada una de sus dos estrategias con la misma probabilidad. Podríamos decir que en el único equilibrio de Nash del juego ambos jugadores se comportan de manera totalmente *impredecible*, en el sentido de que eligen una regla de comportamiento que asigna la misma probabilidad a cada una de sus estrategias puras. Podemos interpretar también este equilibrio en términos de la incertidumbre que a los jugadores les interesa crear en su rival. Que el EN sea $(0.5, 0.5)$ nos recuerda que no es suficiente con crear incertidumbre en el rival sobre la estrategia pura que eligiremos, sino que la incertidumbre creada deber ser tal que el rival crea que es igual de probable que juguemos cualquiera de nuestras dos estrategias puras. En muchos juegos de envite o incluso en las competiciones deportivas, el comportamiento óptimo de los jugadores es «mezclar» adecuadamente entre las distintas acciones que pueden llevar a cabo (echar un farol en un juego de envite, elegir el tipo de golpe por parte de un jugador de tenis,...).

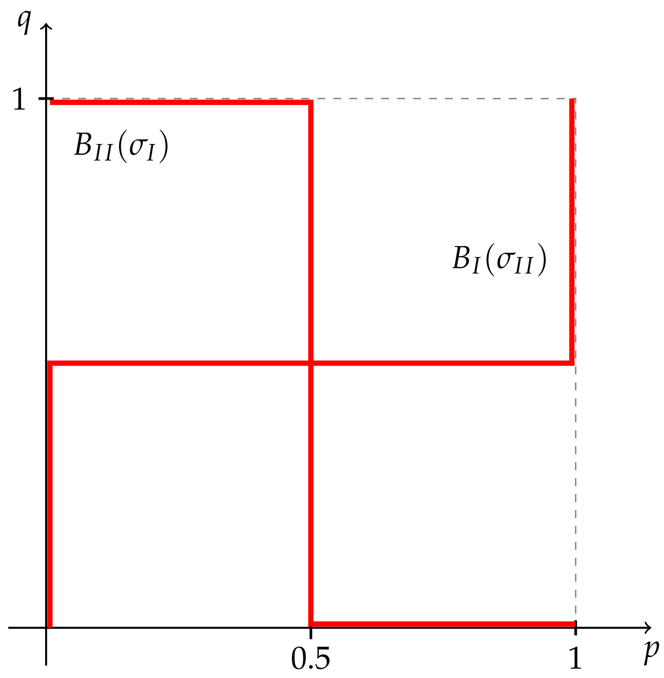

Figura 3.8. ***Equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego «pares o nones».***

► Ejercicio 3.3.1

Para cada uno de los juegos que aparece en la figura adjunta, determine:

1. la correspondencia de mejor respuesta de cada uno de los jugadores;
2. los equilibrios de Nash tanto en estrategias puras como en mixtas.

	F	**T**
F	2, 1	0, 0
T	0, 0	1, 2

	P	H
P	3, 3	1, 5
H	5, 1	0, 0

Figura 3.9. Matrices de pagos para los juegos «la batalla de los sexos» (izquierda) y «halcón o paloma» (derecha).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.3.2 Equilibrio de Nash en estrategias mixtas: planteamiento general

Definición de estrategias mixtas

Dado un juego en forma estratégica $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{U_i\}_{i=1}^n \rangle$ y dado el conjunto de estrategias puras de uno cualquiera de los jugadores $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{iK}\}$, se define una estragia mixta para dicho jugador como una distribución de probabilidad sobre S_i:

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{iK}), \qquad \sum_k \sigma_{ik} = 1;$$

donde $\sigma_{ik} \equiv Pr[s_i = s_{ik}]$, esto es, cada elemento de σ_i representa la probabilidad que el jugador i asigna a su estrategia pura s_k.

En este marco ampliado, en el que los jugadores pueden elegir estrategias mixtas, designaremos por $\boldsymbol{\sigma}$ a una combinación de estrategias mixtas (una para cada jugador).

Al ampliar el espacio de elección de los jugadores incluyendo la posibilidad de que elijan estrategias mixtas, con cada combinación de estrategias, $\boldsymbol{\sigma}$, no irá asociado un desarrollo del juego, sino distintos desarrollos cada uno de ellos con una determinada probabilidad. Abusando de la notación, podemos expresar la ganancia esperada [6] del jugador i cuando cada uno de los jugadores elige una estrategia mixta σ_j como:

$$V_i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{\mathbf{s}} \left[\prod_j P_{\sigma}^j(\mathbf{s}) U_i(s) \right],$$

esto es, la ganancia esperada para el jugador i será una suma ponderada de las ganancias asociadas a cada posible combinación de estrategias puras $\mathbf{s}$, donde las ponderaciones vienen dadas por la probabilidad de que el juego se desarrolle conforme a dicha combinación de estrategias puras. En la medida que los jugadores eligen de manera independiente, la probabilidad de que el juego se desarrolle conforma a $\mathbf{s}$ será el producto de las probabilidades que cada jugador j asigna a la estrategia s_j que forma parte de $\mathbf{s}$.

[6] La elección de una estrategia mixta por parte del jugador i lleva asociada para él una *lotería* que tiene por soporte las ganancias asociadas a cada combinación de estrategias puras. Como señalabamos en el Tema 1, procederemos suponiendo que los jugadores tienen como objetivo maximizar su ganancia esperada, supuesto que tiene dos posibles justificaciones:

- considerar que los jugadores son neutrales al riesgo, esto es, que sólo se fijan en su ganancia (monetaria) esperada.
- considerar que los pagos que asociados a cada combinación de estrategias puras vienen dados en valores de una función de utilidad cardinal. En este caso, los jugadores estaría deciendo conforme al criterio de maximizar la utilidad esperada.

▶ **Ejercicio 3.3.2**

Considere el juego «Papel, piedra o tijeras» con el supuesto adicional de que si uno de los jugadores pierde ha de pagar 10 € al otro. Se pide:

1. Defina una estrategia mixta para cada uno de los jugadores.
2. Represente la ganancia esperada de cada uno de los jugadores como una suma ponderada de las ganancias asociadas a cada combinación de estrategias puras.
3. Este juego tiene un único equilibrio de Nash en estrategias mixtas. ¿Cuál cree que es? ¿Cuál es la ganancia esperada para un jugador en dicho equilibrio?

Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

Definición 3.3.1 (Equilibrio de Nash en estrategias mixtas) *Dado un juego en forma normal,* $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^n, \{U_i\}_{i=1}^n \rangle$*, una determinada combinación de estrategias mixtas* $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n)$ *constituye un* ***equilibrio de Nash en estrategias mixtas*** *del mismo sí y sólo sí:*

$$V_i(\hat{\sigma}_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{-i}) \geq V_i(\sigma_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{-i}), \forall \sigma_i \in \Sigma_i, \quad \forall i.$$

Como vimos en el ejemplo con el que comenzábamos esta sección, al menos para los juegos $2X2$ es posible determinar los equilibrios de Nash en estrategias mixtas mediante un proceso similar a como lo hacíamos en el caso de las puras:

1. determinamos la correspondencia de mejor respuesta de cada jugador $B_i(\boldsymbol{\sigma}_{-i})$;
2. serán equilibrios de Nash aquellas combinaciones de estrategias mixtas $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ que pertenezcan simultáneamente a todas las correspondencias de mejor respuesta:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \text{ EN} \Leftrightarrow \hat{\sigma}_i \in B_i(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{-i}); \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Existe, sin embargo, un procedimiento alternativo que se fundamenta en el hecho de que la ganancia esperada de cualquier estrategia mixta es la suma ponderada (por las probabilidades correspondientes) de las ganancias asociadas a sus estrategias puras:

$$V_i(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{s_i \in \mathbf{S}_i} P_i[s_i] V_i(s_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}),$$

donde $P_i[s_i]$ es la probabilidad que asigna i a su estrategia pura s_i y donde $V_i(s_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{-i})$ recoge la ganancia esperada del jugador i cuando él elige la estrategia pura s_i y el resto de jugadores la combinación de estrategias mixtas $\boldsymbol{\sigma}_{-i}$. Como consecuencia de ello, **para que una estrategia mixta $\hat{\sigma}_i$ forme parte de un equilibrio de Nash, todas las estrategias puras a las que asigna probabilidad positiva deberán tener la misma ganancia esperada** (en caso

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

contrario existiría mejores respuestas que esa: aquellas estrategias mixtas que reasignaran la probabilidad de las estrategias puras con ganancias esperadas más bajas a las estrategias puras con ganancias esperadas más altas).

A modo de ejemplo, si aplicamos esto al juego «pares o nones», tendríamos que para el jugador I se debería cumplir:

$$V_I(P, \sigma_{II}) = V_I(N, \sigma_{II}) \Longleftrightarrow q(1) + (1-q)(-1) = q(-1) + (1-q)(1),$$

condición que nos permite derivar un único valor de q que es justamente el asociado a la estrategia mixta del jugador II en el único equilibrio de Nash del juego $\hat{\sigma}_{II} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

A su vez para el jugador II se debería cumplir:

$$V_{II}(\sigma_I, P) = V_{II}(\sigma_I; N) \Longleftrightarrow p(-1) + (1-p)(1) = p(1) + (1-p)(-1),$$

condición que nos permite determinar en este caso $\hat{\sigma}_I$.

▶ Ejercicio 3.3.3

Utilice el procedimiento anterior para determinar el equilibrio de Nash en mixtas del juego «halcón o paloma» y del juego «papel,piedra o tijeras».

Estrategias mixtas y dominancia

En el Tema 2 definimos el concepto de dominancia aplicado únicamente al caso de estrategias puras. Una estrategia pura dominaba a otra si daba mayor ganancia que ella fuese cuál fuese la combinación de estrategias elegida por los otros jugadores. Vamos a extender ahora ese el concepto de dominancia al caso en el que los jugadores pueden elegir estrategias mixtas:

Definición 3.3.2 (Dominancia en estrategias mixtas) *Dado $G = \langle J, \{S_i\}_{i=1}^N, \{U_i\}_{i=1}^N \rangle$, una estrategia pura $\bar{s}_i$ esta dominada para el jugador i si existe otra estrategia (pura o mixta) $\bar{\bar{\sigma}}_i \in \Delta(S_i)$ tal que $V_i(\bar{\bar{\sigma}}_i, \mathbf{s}_{-i}) > V_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i})$, $\forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$.*

La condición ahora para que una estrategia mixta domine a una pura es, por tanto, que la ganancia esperada jugando la mixta sea mayor que la ganancia esperada jugando la pura, sean cuales sea cual sea las estrategias puras elegidas por los otros jugadores.

▶ Ejercicio 3.3.4

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Tomando como referencia un juego sencillo con dos jugadores y tres estrategias para cada uno de ellos, demuestre que si se cumple $V_i(\bar{\bar{\sigma}}_i, \mathbf{s}_{-i}) > V_i(\bar{s}_i, \mathbf{s}_{-i})\ \forall \mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$, entonces también se cumplirá que $V_i(\bar{\bar{\sigma}}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}) > V_i(\bar{s}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i})\ \forall \boldsymbol{\sigma}_{-i} \in \Delta(S_{-i})$.

Nos encontraremos, por tanto, con situaciones en las cuales una estrategia pura esta dominada por una estrategia mixta aún cuando no lo este por ninguna otra estrategia pura. Consideremos, a modo de ejemplo, en el juego representado en la Figura 3.10. Claramente no existe ninguna estrategia pura que este dominada por otras estrategias puras para ninguno de los jugadores. Sin embargo, es inmediato comprobar que, para el jugador I, existen estrategias mixtas que dominan a la estrategia pura B, por ejemplo la estrategia mixta $\sigma_I = (.5, .5)$ que asigna la misma probabilidad a sus estrategias A y M.

► Ejercicio 3.3.5

Determine todas las estrategias mixtas que dominan a la estrategia pura B en el juego de la Figura 3.10.

Revisión de la relación entre estrategias dominadas y estrategias mejor respuesta

Una vez consideramos la posibilidad de que los jugadores elijan estrategias mixtas, hemos de reconsiderar la relación que habíamos visto en el Tema 2 entre estrategias dominadas y estrategias mejor respuesta. Cuando sólo considerábamos estrategias puras, veíamos que podían existir estrategias que sin estar dominadas por otras no fuesen mejor respuesta bajo ninguna de las posibles expectativas que se pudiera formar el jugador correspondiente. La pregunta que nos falta por responder es qué ocurrirá ahora si eliminamos, no sólo las estrategias que están dominadas por otras puras, sino también todas aquellas otras que estén dominadas por una mixta. La respuesta, que no entramos a demostrar, es que para juegos con solo dos jugadores, si ampliamos el espacio de elección incluyendo las estrategias mixtas el conjunto de estrategias no dominadas para un jugador coincide con el conjunto de estrategias que son mejor respuesta bajo alguna de sus posibles expectativas. En otras palabras, **en un juego con dos jugadores, si una estrategia pura no está dominada (ni por una pura ni por una mixta) existirán unas expectativas bajo las cuales es mejor respuesta**. En consecuencia, para juegos con dos jugadores el conjunto de estrategias racionalizables para cada uno de ellos puede determinarse aplicando la eliminación iterativa de estrategias dominadas (por otras estrategias puras o mixtas).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

► Ejercicio 3.3.6

Para el juego de la figura adjunta hemos demostrado en el Tema 2 que la estrategia s_{I3} no es mejor respuesta para el jugador I bajo ninguna de las posibles expectativas que se podría formar acerca de lo que hará el II. Demuestre que existe una estrategia mixta para dicho jugador que domina a la estrategia s_{I3}.

	s_{II1}	s_{II2}
s_{I1}	$10, 2$	$0, 4$
s_{I2}	$0, 1$	$10, 3$
s_{I3}	$4, 8$	$4, 0$

Figura 3.10. Mejor respuesta frente a dominancia estricta

La relación entre dominancia y mejor respuesta es un poco más complicada en el caso de juegos con más de dos jugadores, por lo que no entramos en ella por el momento[7].

[7] La mayor dificultad va asociada al tipo de expectativas que consideremos se puede formar cada jugador sobre lo que harán los otros, en particular, la posibilidad de que crea que el comportamiento de *los otros* esta correlacionado.

3.4 El equilibrio de Nash como concepto de solución

3.4.1 Interpretación del equilibrio de Nash como concepto de solución

Como ya hemos comentado anteriormente, el equilibrio de Nash como concepto de solución parte de un enfoque diferente a al de la racionalizabilidad. En este último caso lo único que exigimos es que los jugadores incorporen en sus expectativas el hecho de que la racionalidad es conocimiento común (que anticipen que los otros no jugarán estrategias dominadas, que anticipen que los otros anticiparán que él no va a jugar estrategias dominadas,...). En cambio, utilizar el equilibrio de Nash como concepto de solución supone exigir que **las expectativas de cada jugador sobre el comportamiento de resto sean correctas**. ¿Cómo puede justificarse esa consistencia en las expectativas de todos los jugadores? En la medida que estamos estudiando juegos estáticos, dichas expectativas no pueden tener su origen en el conocimiento previo que tengan unos jugadores de otros. Entre las posibles justificaciones de esa consistencia entre expectativas y estrategias cabe destacar las siguientes:

- la experiencia acumulada de enfrentarse a situaciones similares de manera repetida en el tiempo con otros jugadores o la información recibida de otros jugadores que se han enfrentado a esa situación;
- la comunicación previa al juego.

En relación con la comunicación previa al juego, podemos pensar en una situación en la cual los jugadores pueden enviarse mensajes antes de elegir una estrategia o incluso pueden negociar entre ellos. En este caso, si se pusiesen de acuerdo sobre una forma conjunta de comportarse, esta debería ser un equilibrio de Nash: tiene la propiedad de que existen incentivos para que cada jugador elija la estrategia acordada.

Sin embargo, como señalamos al principio del tema, en la mayoría de las ocasiones tomaremos como supuesto básico que **las expectativas de los jugadores tienen su origen en su experiencia previa derivada de enfrentarse a situaciones de interdependencia estratégica similares**. Cada jugador tiene experiencia suficiente como para anticipar de manera correcta como jugarán los otros jugadores. Resulta útil pensar en unas condiciones ideales en las cuales para cada jugador existe una población de individuos que puede adoptar ese papel (la misma población en juegos simétricos). Cada vez que se produce la situación de interdependencia estratégica un jugador de cada tipo es elegido al azar de la correspondiente población, de tal manera que cada jugador se enfrenta a una misma situación, pero con rivales distintos cada vez. Esto hace que cada jugador se forme unas expectativas sobre lo que hace el rival típico en una situación de ese tipo, no sobre lo que hacen rivales concretos (en este caso deberíamos modelizarlo como un juego dinámico en el cuál los jugadores tienen en cuenta los efectos futuros de las decisiones actuales). Interpretado así, el equilibrio de

Nash se corresponde con un **estado estacionario**: si cada vez que se produce esa situación de interdependencia estratégica se desarrolla conforme a $\hat{\mathbf{s}}$ no existe fuerza alguna que tienda a cambiar la forma de *jugar* de los participantes. En otras palabras, el equilibrio de Nash vendría a ser una norma social estable: si todo el mundo la sigue nadie tiene incentivos a desviarse [8]. La forma de justificar la estabilidad del comportamiento puede variar de una situación a otra.

Si se propone una combinación de estrategias como solución *estable* de un juego, el que sea equilibrio de Nash es una **condición necesaria** que debemos imponerle. En caso de que la solución propuesta no fuese equilibrio de Nash, deberíamos justificar el hecho de que al menos un jugador no este adoptando la mejor respuesta al comportamiento de resto. Sin embargo, puede haber situaciones de interdependencia estratégica en las que un posible desarrollo del juego no sea un buen candidato a solución a pesar de ser un equilibrio de Nash (que sea equilibrio de Nash no es condición suficiente para ser solución).

3.4.2 Existencia del equilibrio de Nash

Nash (1950) demostró que todo juego finito (ha de serlo S, esto es, el número de jugadores y el espacio de estrategias de cada uno de ellos) tiene almenos un equilibrio de Nash, que puede serlo en estrategias mixtas. Este resultado se conoce como **teorema de Nash**.

► Ejercicio 3.4.1

Demuestre el teorema de Nash para juegos 2X2 utilizando la siguiente representación general:

	$\mathbf{S_{II1}}$	$\mathbf{S_{II2}}$
$\mathbf{S_{I1}}$	a, α	b, β
$\mathbf{S_{I2}}$	c, γ	d, δ

Figura 3.11. Una matriz de pagos generalizada para juegos 2X2.

[8] A modo de ejemplo, en el equilibrio de Nash del modelo de Cournot cada una de las empresas comprobaría *ex post* que al precio que se realiza en el mercado no tiene ningún incentivo en cambiar la cantidad que saca al mercado. De la misma manera, en el ejercicio sobre el reparto del tráfico entre dos vías alternativas en el equilibrio de Nash ningún conductor tendría incentivos a cambiar de ruta.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Suponga que todos los parámetros son positivos y que $a \neq c, b \neq d; \alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta$.

3.4.3 Unicidad y selección de equilibrios

Es habitual encontrarnos con juegos que presentan más de un equilibrio de Nash. En relación con ello debemos recordar que resulta útil considerar el equilibrio de Nash como una condición necesaria, pero no suficiente, para proponer una combinación de estrategias como solución de un juego. Ante la presencia de varios equilibrios de Nash existen dos grandes grupos de aproximaciones para seleccionar alguno de ellos como solución:

1. **Incorporando información adicional a la recogida en el juego**. Un juego supone una abstracción de la situación real de interdependencia estratégica y el proceso de abstracción puede suponer la eliminación de información útil para ayudarnos a seleccionar un equilibrio de Nash. A modo de ejemplo, la posibilidad de que los jugadores puedan comunicarse o negociar entre ellos con anterioridad al desarrollo del juego, la presencia de convenciones sociales o de puntos focales, el aprendizaje de experiencias pasadas, la evolución, ... pueden fundamentar la elección de uno de los equibrios de Nash como solución.

2. **Imponiendo restricciones teóricas adicionales (*refinamientos* del equilibrio de Nash)**. En los temas siguientes veremos algunos ejemplos como la *perfección en subjuegos* o el equilibrio secuencial.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.5 Aplicación I: El modelo de oligopolio de Cournot

3.5.1 Introducción

3.5.2 Modelo de duopolio con demanda lineal y rendimientos constantes a escala

Consideremos una situación en la cual el mercado de determinado bien es abastecido por dos únicas empresas, A y B. Los costes para la empresa i de poner en el mercado una determinada cantidad del bien x_i vienen dados por una fución $C_i(x_i)$ que vamos a suponer lineal e idéntica para ambas empresas:

$$C_i(x_i) = cx_i \quad \text{para} \quad i = A, B. \tag{3.5}$$

El producto se vende en el mercado a un precio único que quedará determinado conjuntamente por la cantidad total puesta en el mercado por ambas empresas y por la demanda del mismo, la cual vamos a suponer también lineal:

$$p = a - bX. \tag{3.6}$$

Esta función inversa de demanda recoge simplemente una dependencia negativa del precio que alcanzará el producto en el mercado con la cantidad total que pongan en el mismo entre las dos empresas $X = x_A + x_B$.

Vamos a representar esta situación de ID como un juego en forma normal como paso previo a la determinación del EN del mismo.

Representación en forma normal

- $J = \{A, B\}$.
- $S_i = \{x_i : x_i \geq 0\} \quad \text{para} \quad i = A, B.$
- $\pi_i(x_i, x_j) = x_i[a - b(x_i + x_j) - c] \quad \text{para} \quad i = A, B, \;\; i \neq j.$

Una vez tenemos planteada la situación de ID como un juego, podemos recurrir al procedimiento habitual para determinar el EN:

Determinación del equilibrio de Nash

Funciones de mejor respuesta $B_i(x_j)$ Cada empresa tiene que decidir la cantidad de producto que saca al mercado sin conocer que cantidad sacará la otra. Podemos plantear su problema de decisión como:

$$\max_{x_i} \pi_i(x_i, x_j) = \max_{x_i} x_i[a - b(x_i + x_j) - c]. \tag{3.7}$$

Dado que la función objetivo es cóncava, la condición de primer orden será a la vez necesaria y suficiente:

$$\frac{d\pi_i}{dx_i}(x_i^*, x_j) = a - 2bx_i^* - bx_j - c = 0.$$

Como podemos apreciar, dicha condición no nos dará una única cantidad óptima, sino una distinta para cada posible cantidad que saca la otra empresa x_j. Se trata, pues, de una función de mejor respuesta, que podemos hacer explícita sin más que despejar x_i^*:

$$x_i^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_j. \tag{3.8}$$

Equilibrio de Nash Tenemos por tanto una función de mejor respuesta para cada una de las empresas:

$$x_A^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_B \tag{3.9}$$

$$x_B^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_A. \tag{3.10}$$

El equilibrio de Nash del juego vendrá dado por un par de cantidades $(\hat{x}_A, \hat{x}_B)$ que sean simultáneamente mejor respuesta para las dos empresas, esto es, se ha de cumplir que:

$$\hat{x}_A = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\hat{x}_B \tag{3.11}$$

$$\hat{x}_B = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\hat{x}_A. \tag{3.12}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos como único equilibrio de Nash $\hat{x}_a = \hat{x}_B = \frac{a-c}{3b}$.

Valoración de los resultados de equilibrio

La cantidad total sacada al mercado en el equilibrio de Nash es

$$\hat{X} = \hat{x}_a + \hat{x}_B = \frac{2(a-c)}{3b},$$

vaciándose el mercado para un precio

$$p = \left[a - b\left(\frac{2(a-c)}{3b}\right)\right] = \frac{a+2c}{3} = c + \frac{a-c}{3}.$$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

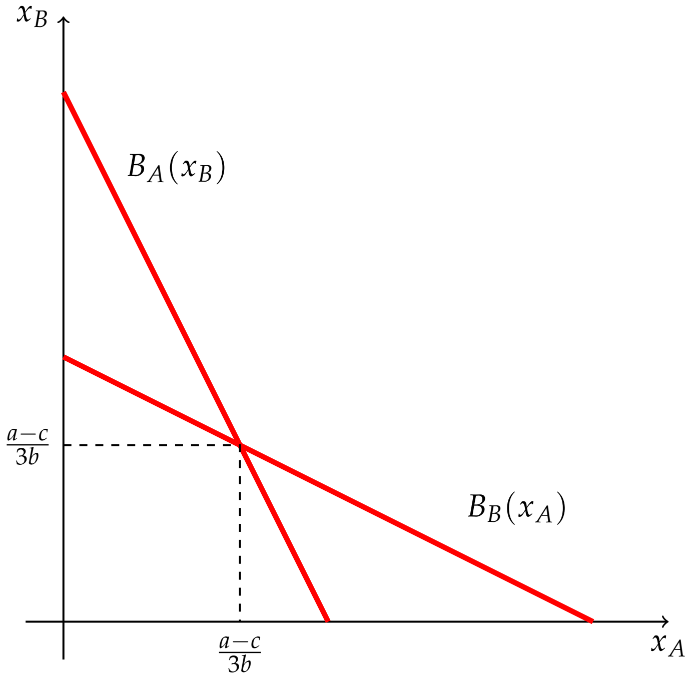

Figura 3.12. ***Equilibrio de Cournot Nash.***Únicamente cuando cada empresa esta sacando al mercado una cantidad $x_i = \frac{a-c}{3b}$ se cumple que cada una de ellas esta respondiendo óptimamente a la cantidad que saca la otra.

Por tanto, en el equilibrio los beneficios de cada empresa vendrán dados por:

$$\pi_i(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = \left(\frac{a-c}{3b}\right)\left(\frac{a-c}{3}\right) = \frac{(a-c)^2}{9}.$$

Podemos comparar estos resultados de equilibrio con los que se darían bajo el supuesto de que el mercado fuese de competencia perfecta. En este caso la libertad de entrada y salida haría que el precio de equilibrio a largo plazo coincidiese con el coste unitario de producción, $p = c$, siendo la cantidad total intercambiada $X(c) = \frac{a-c}{b}$. Si consideramos el otro extremo, con el mercado controlado por un monopolista, podemos plantear su problema de decisión como:

$$\max_{x_i} \pi_i(x_i) = \max_{x_i}[a - bx_i - c].$$

Aplicando la condición de primer orden, obtenemos como cantidad óptima a sacar al mercado $X_M = \frac{a-c}{2b}$, siendo el precio que vaciaría el mercado $p_M = \frac{a+2c}{2} = c + \frac{a-c}{2}$.

La siguiente tabla permite recoge de manera esquemática la comparación entre los resultados de equilibrio de las tres estructuras de mercado.

	Cournot	Competencia perfecta	Monopolio
$\hat{\mathbf{x}}$	$\frac{2}{3}\frac{(a-c)}{b}$	$\frac{a-c}{b}$	$\frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$
$\hat{\mathbf{p}}$	$c+\frac{a-c}{3}$	c	$c+\frac{a-c}{2}$
$\hat{\Pi}_i$	$\frac{(a-c)^2}{9b}$	0	$\frac{(a-c)^2}{8b}$

Cuadro 3.1. ***El equilibrio de Cournot-Nash en duopolio: comparación con los resultados del equilibrio competitivo y del monopolio.*** La cantidad sacada al mercado en el equilibrio de Cournot-Nash es menor que la del equilibrio competetivo y mayor que la que maximiza el beneficio del monopolista, ocurriendo obviamente lo contrario con el precio.

▶ Ejercicio 3.5.1

Considere un mercado abastecido por dos únicas empresas, A y B, en el que se dan las siguientes condiciones de demanda y de costes:

$$\begin{aligned} D: \quad & p = && 26 - X \\ C: \quad & CT_i(x_i) = && 2x_i, \quad \text{para} \quad i = A, B. \end{aligned}$$

1. Suponga que ambas empresas han de decidir simultáneamente la cantidad que sacan al mercado y determine la solución de Cournot-Nash.
2. Responda a las preguntas de los dos apartados anteriores para el caso en que en el mercado participan tres empresas idénticas, A,B y C, en lugar de dos.

▶ Ejercicio 3.5.2 Modelo de duopolio de Cournot con costes asimétricos

Determine el equilibrio de Nash para el modelo de duopolio de Cournot visto anteriormente, pero bajo el supuesto de que las empresas tienen costes de producción unitarios distintos:

$$CT_1(x_1) = c_1x_1; \quad CT_2(x_2) = c_2x_2; \quad c_2 > c_1.$$

▶ Ejercicio 3.5.3

Suponga que cada una de las empresas además del coste unitario de producción c tiene un coste adicional por unidad asociado al transporte, el almacenaje, un impuesto ... En este caso la función de costes totales sería de la forma $CT_i(x_i) = \tilde{c}x_i$, donde $\tilde{c} = c + t$ es el coste unitario *generalizado*. Se pide:

1. Determine el equilibrio de Cournot-Nash
2. Suponga que se produce una variación en t y determine que proporción de dicha variación se trasladará al precio de mercado.

3.5.3 Generalización a n empresas

El modelo anterior se extiende fácilmente al caso en que existe un número indeterminado de empresas n. Seguimos suponiendo que las condiciones de costes de cada una de las empresas quedan recogidas por la función:

$$C_i(x_i) = cx_i \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Esto es, todas las empresas son capaces de producir a un coste unitario de $c \; um$ con independencia del volumen de producción que elijan.

El precio del producto quedará ahora determinado por la cantidad sacada entre las n empresas y la disposición a pagar de los consumidores, estando recogida esta última a través de la siguiente función (inversa) de demanda:

$$p = a - bX, \quad X = \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{3.14}$$

Representación en forma normal

- $J = \{1, \cdots, n\}$.
- $S_i = \{x_i : x_i \geq 0\}, \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n.$
- $\pi_i(x_i, x_{-i}) = x_i[a - b(x_i + \sum_{j \neq i} x_j) - c], \quad \text{para} \quad i = 1, \cdots, n.$

Determinación del equilibrio de Nash

Funciones de mejor respuesta $B_i(x_{-i})$ Cada empresa tiene que decidir la cantidad de producto que saca al mercado sin conocer que cantidad sacarán las demás. Podemos plantear su problema de decisión como:

$$\max_{x_i} \pi_i(x_i, \sum_{j \neq i} x_j) = \max_{x_i} x_i[a - b(x_i + \sum_{j \neq i} x_j)) - c]. \tag{3.15}$$

Dado que la función objetivo es cóncava, la condición de primer orden de este programa será a la vez necesaria y suficiente:

$$\frac{d\pi_i}{dx_i}(x_i^*, \sum_{j\neq i} x_j) = a - 2bx_i^* - b\sum_{j\neq i} x_j - c = 0.$$

Como podemos apreciar, dicha condición no nos dará una única cantidad óptima, sino una distinta para cada posible cantidad sacada al mercado por el resto de empresas $\sum_{j\neq i} x_j$. Se trata, pues, de una función de mejor respuesta, la cual podemos hacer explícita sin más que despejar x_i^*:

$$x_i^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} x_j. \tag{3.16}$$

Equilibrio de Nash El equilibrio de Nash del juego vendrá dado por el vector de cantidades $(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)$ que sean simultáneamente mejor respuesta para todas las empresas, esto es, el vector de cantidades que satisface el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\hat{x}_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \hat{x}_j. \quad \text{para } i = 1, \cdots, n. \tag{3.17}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos como único equilibrio de Nash:

$$\hat{x}_i = \frac{1}{n+1}\frac{a-c}{b}, \quad \forall i$$

.

Valoración de los resultados de equilibrio

La cantidad total sacada al mercado en el equilibrio de Nash es

$$\hat{X} = n\hat{x}_i = \frac{n}{n+1}\frac{a-c}{b},$$

vaciándose el mercado para un precio

$$p = \left[a - b\left(\frac{n}{n+1}\frac{a-c}{b}\right)\right] = \frac{a+nc}{n+1} = c + \frac{a-c}{n+1}.$$

Por tanto, en el equilibrio los beneficios de cada empresa vendrán dados por:

$$\pi_i(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = \left(\frac{1}{n+1}\frac{a-c}{b}\right)\left(\frac{a-c}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}\frac{(a-c)^2}{b}.$$

Podemos comprobar que a medida que aumenta el número de empresas la cantidad total

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

sacada al mercado aumenta y tiende a la que se sacaría bajo las condiciones de competencia perfecta. De hecho, se cumple que $\lim_{n \to \infty} \hat{X} = \frac{a-c}{b}$. De la misma manera a medida que aumenta el número de empresas el precio tiende al coste unitario de producción y los beneficios extraordinarios tienden a desaparecer.

▶ Ejercicio 3.5.4

Considere que el modelo anterior de oligopolio de Cournot con n empresas y analice los efectos sobre la situación de equilibrio del establecimiento de un impuesto de $t \;\; um$ por unidad producida. En particular, demuestre que la repercusión de dicho impuesto sobre el precio de equilibrio será tanto mayor cuanto mayor sea n.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.6 Aplicación II: El modelo de oligopolio de Bertrand

3.6.1 Introducción

En el modelo de Cournot las empresas elegían la cantidad que deseaban sacar al mercado, determinándose en éste el precio de venta. En 1883 Bertrand propuso un modelo alternativo en el que cada empresa elige el precio, produciendo a continuación la cantidad que le demanden al mismo.

3.6.2 Un modelo básico

Consideremos una situación en la cual el mercado de determinado bien es abastecido por dos únicas empresas, A y B. Los costes para la empresa i de poner en el mercado una determinada cantidad del bien x_i vienen dados por una fución $C_i(x_i)$ que vamos a suponer lineal e idéntica para ambas empresas:

$$C_i(x_i) = cx_i \quad \text{para} \quad i = A, B. \tag{3.18}$$

La relación que guarda la cantidad total que desearán comprar los consumidores con el precio viene dada por:

$$X_D = a - bp \quad \text{donde} \quad p = \text{mín}\{p_A, p_B\}. \tag{3.19}$$

Suponemos, además, que en el caso de que las dos empresas fijen el mismo precio, se repartirán las ventas a partes iguales.

Representación en forma normal

Jugadores $J = \{A, B\}$.

Estrategias $S_i = \{p_i : p_i \geq 0\} \quad \text{para} \quad i = A, B.$

Funciones de pagos

$$\pi_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_j < p_i \\ \frac{1}{2}(p-c)(a-bp) & \text{si} \quad p_i = p_j = p \\ (p_i - c)(a - bp_i) & \text{si} \quad p_j > p_i \end{cases}$$

para $\quad i = A, B, \; i \neq j.$

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Determinación del equilibrio de Nash

En el modelo de Cournot obteníamos la función de mejor respuesta de cada empresa a partir de las condiciones de primer orden, esto es, de la diferenciación de la función de beneficios. En este caso nos encontramos, sin embargo, con que la función de beneficios es discontinua, por lo que no podemos recurrir a diferenciarla para obtener la función de mejor respuesta. Podemos, sin embargo, proceder de una manera más informal y determinar cual sería la mejor respuesta de una de las empresa i en función del precio p_j que fije su rival.

- Consideremos primero que ocurriría si, por la razón que fuese, $p_j < c$. En este caso a la empresa i no le interesa participar en el mercado ya que sólo podría hacerlo a un precio que le daría pérdidas. En términos del modelo, su mejor respuesta sería elegir cualquier precio p_i que cumpliese $p_i > p_j$, por ejemplo $p_i = c$.

- Para $p_j > c$ la empresa puede obtener beneficios positivos fijando un precio por debajo del de su rival. Siempre que p_j sea inferior al precio de monopolio, la empresa i podría quedarse con todo el mercado fijando un precio ligeramente inferior, digamos $p_j - \varepsilon$. De esta manera la empresa i conseguiría unos beneficios[9]:

  $$\pi_i(p_j - \varepsilon, p_j) = [(p_j - \varepsilon) - c][a - b(p_j - \varepsilon)]$$

  .

  Hemos condicionado que $p_j - \varepsilon$ sea la mejor respuesta de i a que p_j sea inferior al precio de monopolio p_m. Es suficiente con tener en cuenta que p_m es el precio que permitiría obtener el mayor beneficio del mercado a una empresa que lo controlase, para darse cuenta que si $p_j > p_m$ entonces la mejor respuesta de i sería fijar $p_i = p_m$.

- Nos queda únicamente por determinar cual sería la mejor respuesta de la empresa i en el caso concreto de que $p_j = c$. Dado que fijar un precio $p_i < p_j$ llevaría a obtener pérdidas, la mejor respuesta será fijar $p_i \geq p_j$, que llevará a la empresa a obtener unos beneficios nulos.

La revisión exhaustiva de las mejores respuestas para todos los posibles valores de p_j nos ha permitido determinar la siguiente correspondencia de mejor respuesta:

[9]Siendo rigurosos con el planteamiento formal del modelo, no existe una mejor respuesta por parte de la empresa i, ya que la maximización de beneficios requiere que p_i este tan próximo a p_j como sea posible (que ε sea tan pequeño como sea posible). Nosotros suponemos que existe ε es suficientemente pequeño como para que a la empresa i no le interese acercarse más a p_j.

$$B_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i : p_i > p_j\} & \text{si} \quad p_j < c \\ \{p_i : p_i \geq p_j\} & \text{si} \quad p_j = c \\ p_j - \varepsilon & \text{si} \quad c < p_j \leq p_m \\ p_m & \text{si} \quad p_j > p_m. \end{cases} \tag{3.20}$$

para $\quad i = A, B, \;\; i \neq j.$

A partir de estas funciones de mejor respuesta es inmediato comprobar que solo existe una combinación de estrategias que es EN: aquella en que ambas empresas están fijando un precio igual al coste de producción $\hat{p}_i = \hat{p}_j = c$.

▶ Ejercicio 3.6.1

Represente gráficamente las correspondencias de mejor respuesta del modelo anterior.

El hecho de que, a pesar de existir dos únicas empresas, en el único equilibrio de Nash de este modelo se alcance un resultado eficiente, hace que se hable de la *la paradoja de Bertrand*. En efecto, el *atomismo* de los agentes y su comportamiento precio-aceptante como origen de la competencia y del logro de la eficiencia en los mercados, parecen ser puestos en entredicho por este modelo: incluso en un mercado con dos únicas empresas, si éstas compitiesen «à la Bertrand» se alcanzarían los mismos resultados que en el equilibrio competitivo de largo plazo. Sin embargo, esta aparente paradoja se debe más bien a la falta de realismo del modelo de Bertrand que hemos analizado. La competencia en precios en el mundo real se da en un marco estratégico muy diferente del que hemos analizado, en el cual las empresas tienen que decidir de forma simultánea y sabiendo que no se van a volver a encontrar en el futuro. Esa falta de realismo del marco estratégico, también se extiende a las condiciones de demanda y de costes. Por el lado de la demanda, lo habitual es que exista un cierto grado de diferenciación del producto, lo que confiere a cada empresa un cierto grado de poder de mercado. Por el lado de los costes, una extensión lógica es considerar que ocurriría si las empresas tuviesen una capacidad limitada, cuestión que se aborda en otro modelo clásico de oligopolio, el de Edgeworth. En definitiva, la principal utilidad del modelo de Bertrand que acabamos de ver, es su uso como referencia para la elaboración de otro modelos más realistas a la hora de recoger el marco estratégico y las condiciones de demanda y de costes a las que se enfrentan las empresas en un oligopolio.

▶ Ejercicio 3.6.2 Modelo de Bertrand con producto diferenciado

Considere una situación de duopolio en el que las empresas eligen el precio de su producto bajo las siguientes condiciones de demanda y de costes:

$$\begin{aligned} D: \quad & x_{di} = & \alpha - \beta p_i + \delta p_j \;\; \alpha, \beta, \gamma > 0.\; i, j = 1, 2, i \neq j. \\ C: \quad & CT_i(x_i) = & c x_i, \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

- Represente la situación anterior como un juego en forma estratégica
- Determine las funciones de mejor respuesta de cada empresa y represéntelas gráficamente.
- Determine el equilibrio de Nash del juego.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.7 La sobreutilización de los recursos públicos: el problema de los ejidos

Gibbons págs. 27-29.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

3.8 Ejercicios

▶ Ejercicio 3.8.1

Determine los equilibrios de Nash del siguiente juego:

	$\mathbf{s}_{\mathbf{II1}}$	$\mathbf{s}_{\mathbf{II2}}$	$\mathbf{s}_{\mathbf{II3}}$
$\mathbf{s}_{\mathbf{I1}}$	$3,7$	$1,5$	$5,5$
$\mathbf{s}_{\mathbf{I2}}$	$4,4$	$1,1$	$2,6$
$\mathbf{s}_{\mathbf{I3}}$	$2,2$	$4,6$	$3,4$

Figura 3.13

▶ Ejercicio 3.8.2

Determine el equilibrio de Nash del siguiente juego en forma extensiva.

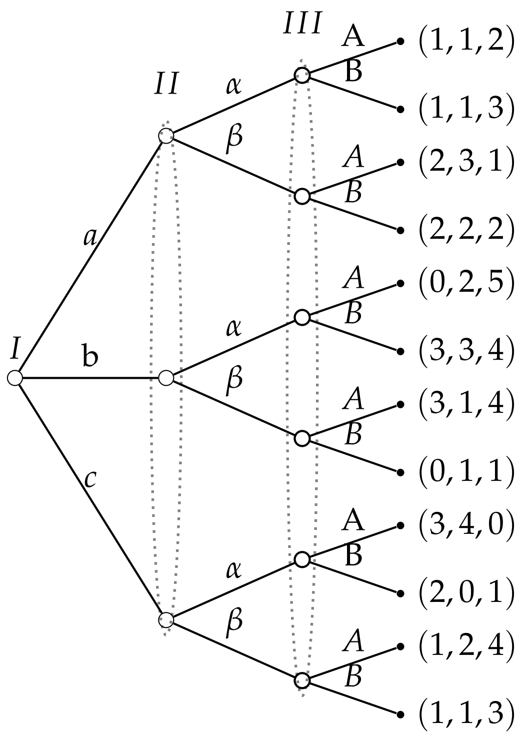

Figura 3.14. ***Juego estático en forma extensiva.***

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

▶ Ejercicio 3.8.3

A dos individuos se les ofrece la posibilidad de repartirse 100 *um* de acuerdo con el siguiente procedimiento. Cada uno de ellos tiene que solicitar de manera simultánea que proporción de esa cantidad pide para si mismo. Si las peticiones de los jugadores son compatibles se lleva a cabo el reparto, en caso contrario ninguno de los dos recibe nada. Construya las funciones de mejor respuesta de cada jugador, represéntelas gráficamente y determine el/los equilibrios de Nash del juego.

▶ Ejercicio 3.8.4

Determine todos los equilibrios de Nash del juego del ejercicio *la paradoja del presidente*.

▶ Ejercicio 3.8.5

Dos individuos disponen de una cantidad de 120 unidades de un bien X para consumir entre ambos a lo largo de dos periodos («hoy» y «mañana»). Cada uno de ellos ha de decidir de manera simultánea cuanto consume «hoy». En el caso de que la decisión de ambos sea compatible se lleva a cabo, y si entre ambos piden más de la cantidad disponible se reparten dicha cantidad a partes iguales. Si no agotan en el primer periodo las 120 unidades disponibles, en el periodo 2 se les da la mitad de lo que queda a cada uno. Las preferencias de los jugadores en relación con el consumo presente (x_1^i) y el consumo futuro (x_2^i) vienen dadas por la función:

$$U_i(x_1^i, x_2^i) = x_1^i x_2^i \,; \quad i = 1, 2.$$

Determine la representación en forma estratégica del juego y el equilibrio de Nash del mismo. Comente a continuación los resultados, valorándolos en términos de eficiencia.

▶ Ejercicio 3.8.6

Considere los viajes por carretera en automóvil privado entre dos ciudades, A y B. Suponga que habitualmente se produce un desplazamiento de 1.000 personas en una determinada franja horaria desde A hacia B y que existen dos alternativas:

- la ruta Y, la cual no tiene problemas de capacidad, y por la que se tarda dos horas en llegar;
- la ruta Z, por la cual se puede llegar en una hora y media, pero sólo si el número de

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

vehículos que la utiliza durante esa franja horaria es inferior a 500. En caso de que la utilicen más vehículos se produce congestión y la duración del desplazamiento viene dada por la expresión $T_{AB} = 90 + .003(n - 500)^2$, donde n es el número de vehículos que elige dicha ruta.

1. ¿Cuántas personas eligen la ruta Z en el equilibrio de Nash de esta situación de interdependencia estratégica?
2. ¿Cuál es el número óptimo de vehículos que debería ir por cada ruta desde el punto de vista social bajo el supuesto de que el objetivo es minimizar el tiempo total empleado?

► Ejercicio 3.8.7

Dos socios, 1 y 2 participan en un determinado proyecto. Ambos acuerdan repartirse a medias el rendimiento que obtengan de dicho proyecto, el cual depende del esfuerzo de cada uno de ellos: $R(e_1, e_2) = 4(e_1 + e_2 + \alpha e_1 e_2)$, donde e_i es el nivel de esfuerzo realizado por el socio i. Suponga que $e_i \in [0, 4]$ y que $c \in [0, \frac{1}{4}]$. El coste para cada socio del nivel de esfuerzo que realice viene dado por: $C_i(e_i) = e_i^2; \quad i = 1, 2$. Suponga que es conocimiento común que cada socio elige el nivel de esfuerzo de manera simultánea y que el objetivo de ambos es maximizar el beneficio neto que obtienen. Se pide:

1. Interprete el significado del parámetro α.
2. Determine el nivel de esfuerzo que ejercerá cada uno de los agentes en el equilibrio de Nash.
3. Comente los resultados.

► Ejercicio 3.8.8

Considere una situación en la cual dos empresas se dedican a la explotación de los recursos pesqueros de un único lago. El volumen de capturas obtenido por ambas empresas durante un determinado periodo de tiempo depende del número de horas que han dedicado ambas empresas a la pesca de acuerdo con la siguiente función: $C = H - bH^2, \quad b > 0$, donde C y H recogen, respectivamente, el volumen de capturas y el número de horas totales($C = C_1 + C_2$; $H = H_1 + H_2$). Suponiendo que el volumen de capturas para una empresa guarda una proporción directa con su *esfuerzo relativo*, esto es: $C_i = (\frac{H_i}{H_i + H_j})C; \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j)$ y que el precio unitario de venta y el coste de la hora de esfuerzo son de p y w unidades monetarias respectivamente, se pide:

1. Determinar el equilibrio de Nash bajo el supuesto de que ambas empresas han de decidir de forma simultánea el número de horas que van a dedicar a la captura de pescado.
2. Comentar detenidamente los resultados de equilibrio.

► Ejercicio 3.8.9

Para el juego de la figura adjunta:

1. determine el conjunto de estrategias racionalizables para cada jugador;
2. determine los equilibrios de Nash que tiene;
3. utilícelo para explicar la relación entre estrategias racionalizables y equilibrio de Nash.

	s_{II1}	s_{II2}	s_{II3}
s_{I1}	9, 3	4, 8	2, 10
s_{I2}	2, 10	4, 8	9, 3
s_{I3}	7, 5	5, 6	7, 5

Figura 3.15

► Ejercicio 3.8.10

Determine el equilibrio de Nash en mixtas del siguiente juego.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

	α	β	γ
a	3,2	2,1	1,3
b	2,1	1,5	0,3
c	1,3	4,2	2,2

Figura 3.16

▶ Ejercicio 3.8.11

Dos agentes económicos (I y II), han de decidir de manera simultánea si participan o no en un determinado proyecto. La colaboración en el mismo supone un coste C_i para el agente i. Si al menos uno de ellos asume dicho coste cada uno de ellos recibirá un excedente E_i. En el caso de que ninguno de los dos decida incurrir en el coste de la aportación el excedente a repartir será nulo. Modelice la situación anterior como un juego y determine, el/los equilibrios de Nash (tanto en estrategias puras como en mixtas) en función del valor de los parámetros. [Nota: Considere $E_i, C_i > 0$, i=1,2]

▶ Ejercicio 3.8.12

Dos agentes económicos, A y B han de decidir de manera simultánea su actitud ante el reparto de un determinado bien. En concreto, cada uno de los agentes puede adoptar una actitud "agresiva" o una actitud "pacífica". Denote la valoración en unidades monetarias que hace del bien cada agente por V_i, $i = A, B$, y suponga que los pagos que recibirá en función de la actitud del otro serán:

- Si los dos adoptan una actitud "pacífica" recibirá cada uno de ellos la mitad de bien, valorándolo en $\frac{1}{2}V_i$.
- Si i adopta una adopta una actitud "pacífica" y j una actitud "agresiva" éste último se queda la totalidad del bien manteniéndose i en su situación de partida.
- Si los dos adoptan una actitud "agresiva" se llevará cada uno la mitad del bien pero les supondrá un coste de C_i um.

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Determine todos los equilibrios de Nash, tanto en estrategias puras como en mixtas, en función del valor de los parámetros V_i y C_i. Comente detenidamente los resultados.

▶ Ejercicio 3.8.13

Dado el siguiente juego en su forma normal, determine todos los equilibrios de Nash, tanto en estrategias puras como en mixtas, en función del valor de los parámetros (suponga que todos ellos son positivos y distintos entre sí).

	$\mathbf{s_{II1}}$	$\mathbf{s_{II2}}$
$\mathbf{s_{I1}}$	$a, 2$	$4, \alpha$
$\mathbf{s_{I2}}$	$0, 4$	b, β

Figura 3.17

▶ Ejercicio 3.8.14

Un determinado fin de semana $A.G.$y $G.A.$ se desplazaron de Madrid a Santander con la idea de disfrutar de un merecido descanso. El sábado a la noche tuvieron una discusión y cada uno se fue por su lado. El domingo ambos tienen que sacar su billete de vuelta para Madrid y cada uno de ellos sabe que el otro tiene que volver a primera hora de la mañana del lunes y que sólo pueden hacerlo en el tren o en el autobús, cuya hora de salida es en ambos casos a las 8 de la mañana. Plantee, de la manera más general posible, un juego en forma estratégica que refleje cada una de las posibles situaciones siguientes:

A. $A.G.$ desea por encima de todo no encontrarse con $G.A.$, si bien es cierto que siempre ha preferido viajar en autobús. Por el contrario, $G.A.$ desea por encima de todo coincidir en el viaje, si bien es cierto que siempre ha preferido viajar en tren (Suponga que, por experiencias pasadas, las preferencias de cada uno de ellos son conocimiento común).

B. Tanto $A.G.$ como $G.A.$ desean por encima de todo coincidir en el viaje con el fin de reconciliarse aunque $A.G.$ siempre ha preferido viajar en autobús y $G.A.$ en tren (Suponga de nuevo que las preferencias de cada uno de ellos son conocimiento común).

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

Se pide:

1. Determine el/los equilibrios de Nash tanto en estrategias puras como en mixtas y utilice las correspondencias de mejor respuesta para presentarlos gráficamente.
2. Comente como influye el valor de los parámetros que recogen las ganancias en las estrategias mixtas de equilibrio de cada uno de los juegos.
3. ¿Tiene alguno de los jugadores interés en mover primero en el caso inicial?, ? y en el segundo?

▶ Ejercicio 3.8.15 Competencia en precios en una ciudad lineal

Considere una ciudad lineal, cuya longitud se puede normalizar a la unidad, y suponga que los N consumidores de un bien X se encuentran uniformemente distribuidos a lo largo de la misma. Dicho bien es ofrecido en la ciudad por dos empresas, I y II, las cuales se encuentran situadas en los extremos de la ciudad y que pueden producir las cantidades que deseen a un coste unitario de c um $[CT_i(x_i) = cx_i; \qquad i = I, II]$.

Dichas empresas compiten entre sí *á la Bertrand* (eligen el precio de manera simultánea). Los consumidores deciden si compran o no una única unidad del bien y, en caso de comprar, a qué empresa lo hacen. Su decisión de compra esta basada en el precio generalizado p_g que incluye el precio fijado por las empresas más el coste de transporte, el cuál suponemos que es de t um por unidad de distancia recorrida.

Representa la situación anterior como un juego en forma estratégica y determine todos los equilibrios de Nash del mismo bajo el supuesto de que el precio de reserva de los consumidores cumple la condición:$p_r > c + 3t$.

▶ Ejercicio 3.8.16

En un experimento sobre el comportamiento *social* de los cerdos se encierran en un mismo compartimento un cerdo dominante (D) y un cerdo sumiso (S). En un extremo del compartimento se sitúa una palanca que al ser pulsada por uno de los animales hace que se deposite una cierta cantidad de comida en una pila situada en el otro extremo. Pulsar el botón supone un esfuerzo para los animales y el reparto de la comida depende de cuál sea el animal que pulsa el botón (de cuál llega primero a la pila). Si pulsa S, entonces D se come todo antes que consiga llegar S; si pulsa D entonces S consigue comer una parte de la ración antes de que llegue D; por último si los dos van a pulsar llegarán a la vez comiéndose D la mayor parte. Se pide:

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria

1. Haga la representación en forma normal de esta situación de interdependencia estratégica.
2. Trate de anticipar cual será el desarrollo del juego (la solución) y explique que supuestos hace para realizar dicha predicción.

▶ Ejercicio 3.8.17

Un grupo de N personas es testigo de un delito. Cada una de dichas personas ha de decidir de manera simultánea si avisar (A) o no avisar $(\bar{A})$ a la policía. Suponga que cada una de ellas asigna un valor v a que la policía reciba la información y un coste c a realizar el aviso con $v > c$.

1. Haga la representación en forma estratégica de la situación anterior.
2. Ponga un ejemplo de una combinación de estrategias puras que sería un equilibrio de Nash.
3. Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias mixtas (simétrico) en el que cada individuo avisa con probabilidad p. ¿Qué sucede con p a medida que el número de personas que ha presenciado el crimen, N, aumenta?

Prof. Pedro Álvarez Causelo
Departamento de Economía - Universidad de Cantabria