Teoría de Juegos

Tema 6.- Juegos dinámicos con información incompleta

Soraya Hidalgo Gallego
Departamento de Economía
Universidad de Cantabria

A los juegos con información incompleta también se les denomina juegos bayesianos.

- En un juego con información completa las funciones de ganancias de los jugadores son de dominio público.
- En los juegos con información incompleta al menos un jugador no está seguro de la función de ganancias de otro jugador.
- En este tipo de juegos también se distingue entre juegos estáticos y juegos dinámicos, aunque la mayoría de los juegos bayesianos con interés económico son dinámicos.

5.1 Juegos de Señalización

5.1.A Equilibrio bayesiano perfecto en juegos de señalización

Un juego de señalización es un juego dinámico con información incompleta y dos jugadores:

E: emisor

R: receptor

El desarrollo del juego es el siguiente:

1. El azar escoge un tipo t_i del conjunto de tipos factibles $T=\{t_1,\dots, t_I\}$ que asigna al siguiente emisor según una distribución de probabilidad $p(t_i)$, donde $p(t_i)>0$ para cada i y $p(t_1)+\dots+p(t_I)=1$.

2. El emisor observa t_i y elige un mensaje m_j del conjunto de mensajes factibles $M=\{m_1,\dots,m_J\}$.

3. El receptor observa m_j (pero no t_i) y elige a continuación una acción a_k de un conjunto de acciones factibles $A=\{a_1,\dots,a_K\}$.

4. Las ganancias vienen dadas por $U_E(t_i, m_j, a_k)$ y $UR(t_i, m_j, a_k)$

APLICACIONES

• Modelo de señalización del mercado de trabajo de Spencer (1973)

– Emisor > Trabajador

– Receptor > Mercado de posibles empresarios

– Tipo > Capacidad productiva del trabajador

– Mensaje > Nivel de educación

– Acción > Salario

• Modelo de inversión empresarial y estructura de capital de Myers y Majluf (1984)

– Emisor > Empresa que necesita capital para financiar un proyecto

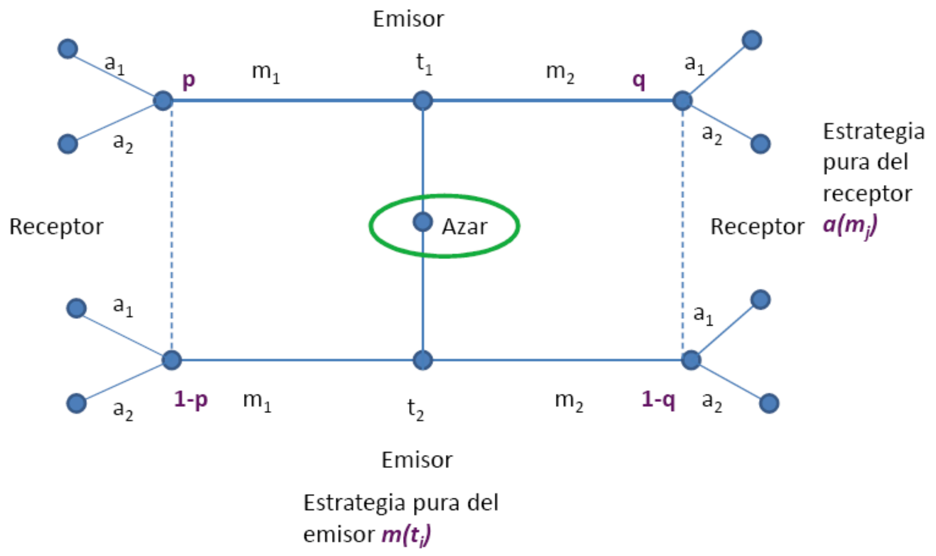
– Receptor > Inversión potencial

– Tipo > Rentabilidad de los activos existentes en la empresa

– Mensaje > Oferta de participación en el beneficio de la empresa a cambio de la financiación

– Acción > Decisión de si invertir o no por parte del inversor

Esquema de Juego de Señalización



• Recordemos que en cualquier juego la estrategia de un jugador es un plan completo de acción.

– En un juego de señalización, una estrategia pura del emisor es una función $m(t_i)$ que especificará el mensaje que elegirá cada tipo que el azar pueda determinar, y una estrategia del receptor es una función $a(m_j)$ que especifica que acción elegirá ante cada mensaje del emisor.

ESTRATEGIAS DEL EMISOR

• ESTRATEGIA 1 DEL EMISOR: Jugar m_1 si el azar determina t_1 y m_1 si el azar determina t_2.

• ESTRATEGIA 2 DEL EMISOR: Jugar m_1 si el azar determina t_1 y m_2 si el azar determina t_2.

• ESTRATEGIA 3 DEL EMISOR: Jugar m_2 si el azar determina t_1 y m_1 si el azar determina t_2.

• ESTRATEGIA 4 DEL EMISOR: Jugar m_2 si el azar determina t_1 y m_2 si el azar determina t_2.

ESTRATEGIAS DEL RECEPTOR

• ESTRATEGIA 1 DEL RECEPTOR : Jugar a_1 si el emisor elige m_1 y a_1 si el emisor elige m_2.

• ESTRATEGIA 2 DEL RECEPTOR : Jugar a_1 si el emisor elige m_1 y a_2 si el emisor elige m_2.

• ESTRATEGIA 3 DEL RECEPTOR : Jugar a_2 si el emisor elige m_1 y a_1 si el emisor elige m_2.

• ESTRATEGIA 4 DEL RECEPTOR : Jugar a_2 si el emisor elige m_1 y a_2 si el emisor elige m_2.

• El emisor conoce la historia completa del juego cuando elige un mensaje, esta elección se da en un conjunto de información con un único nodo.

• Por el contrario, el receptor elige una acción después de observar el mensaje del emisor pero sin conocer el tipo de éste, por lo que la elección del receptor se da en un conjunto de información con más de un elemento.

– **Requisito 1 de señalización**. *Después de observar cualquier mensaje m_j de M, el receptor debe formarse una conjetura sobre qué tipos podrían haber enviado m_j. Denotemos esta conjetura con la distribución de probabilidad $\mu(t_i \mid m_j)\geq 0$ para cada t_i en T y*

$$\sum_{t_i \in T} \mu(t_i \mid m_j) = 1$$

Dados el mensaje del emisor y la conjetura del receptor, la acción óptima del receptor será:

– **Requisito 2R de señalización:** *Para cada mj en M, la acción del receptor $a^*(m^j)$ debe maximizar la utilidad esperada del receptor dada la conjetura $\mu(t_i \mid m_j)$ sobre qué tipos podrían haber enviado m_j.*

Es decir, $a^*(m_j)$ es una solución de

$$\max_{a_k \in A} \sum_{t_i \in T} \mu(t_i \mid m_j) U_r(t_i, m_j, a_k)$$

En el caso del emisor, sólo se requiere que su estrategia sea óptima dada la estrategia del receptor, ya que éste tiene la información completa del juego, por lo tanto en su caso el requisito de señalización será:

– **Requisito 2E de señalización:** *Para cada t_i en T, el mensaje del emisor $m^*(t_i)$ debe maximizar la utilidad del emisor dada la estrategia del receptor $a^*(m_j)$. Es decir, $m^*(t_i)$ es una solución de*

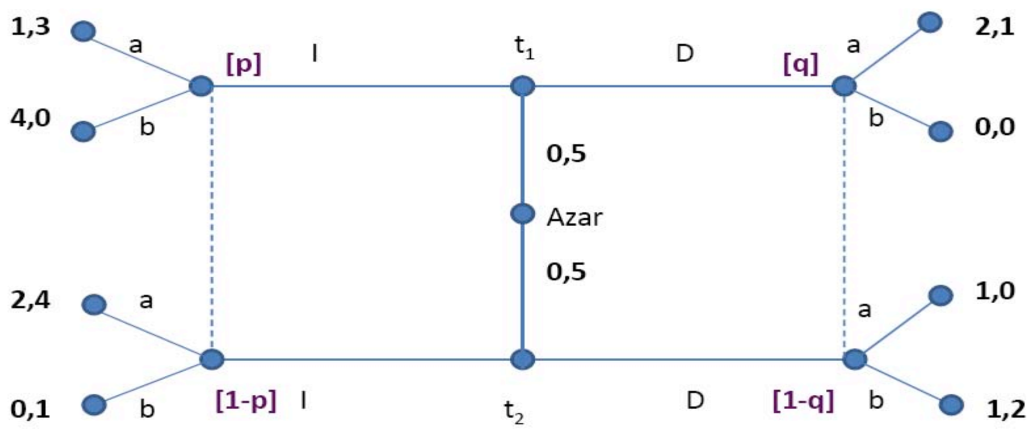
$$\max_{m_j \in M} \; U_E\left(t_i, m_j, a^*(m_j)\right)$$

Para los mensajes en la trayectoria de equilibrio, las conjeturas del receptor deberán cumplir el siguiente requisito:

– **Requisito 3 de señalización:** *Para cada m_j en M, si existe t_i en T tal que $m^*(t_i)=m_j$, la conjetura del receptor debe derivarse de la regla de Bayes y la estrategia del emisor:*

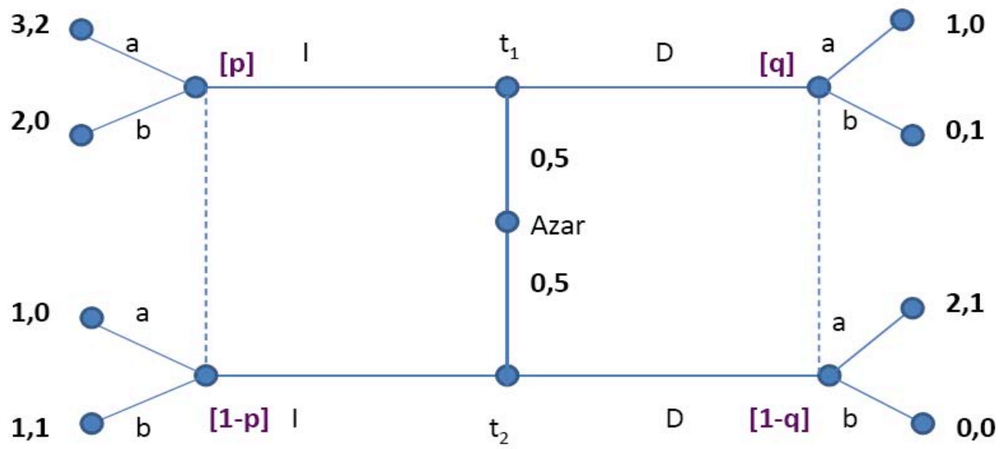
$$\mu(t_i \mid m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum_{t_i \in T_i} p(t_i)}$$

Esquema de juego de señalización con ganancias



5.1.B Refinamiento del equilibrio bayesiano perfecto en juegos de señalización

Esquema de juego de señalización con ganancias



Las estrategias y sistema de conjeturas que constituyen equilibrio bayesiano perfecto en el juego de señalización anterior son:

– *[(I,I),(a,b),p=0.5,q] para cualquier q≥1/2*

– *[(I,D),(a,a),p=1,q=0]*

Pero en este juego no tiene sentido que el tipo 1 elija D. Formalmente las estrategias del emisor *(D,I)* y *(D,D)* (es decir, las estrategias en las que el tipo 1 elije D) están estrictamente dominadas a partir del conjunto de información del emisor correspondiente al tipo 1.

• **Definición:** En un juego de señalización, el mensaje m_j de M está dominado para el tipo t_i de T si existe otro m_j' de M tal que la menor ganancia posible de t_i por utilizar m_j' es más alta que la mayor ganancia posible de t_i por utilizar m_j

• Por lo tanto, se debería asignar a q una probabilidad cero.

Requisito 4 de señalización: *Si el conjunto de información que sigue a m_j está fuera de la trayectoria de equilibrio y m_j está dominado para el tipo t_i, entonces (si es posible) la conjetura del receptor $\mu(t_i \mid m_j)$ debería asignar probabilidad cero al tipo t_i. (Esto es posible siempre que m_j no esté dominado para todos los tipos en T).*

En algunos juegos, existen equilibrios bayesianos perfectos que cumplen este último requisito pero aún así parecen poco razonables.

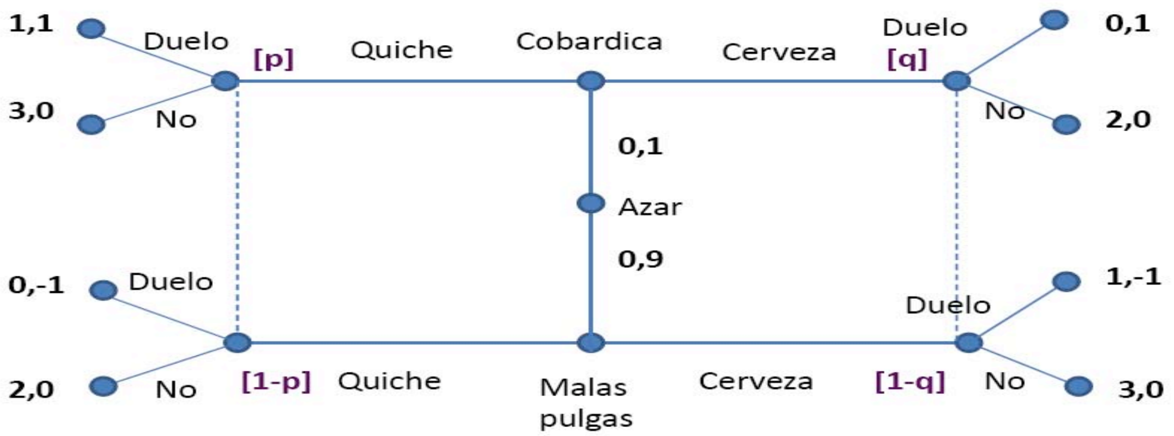
• Una de la áreas de investigación más activa de la Teoría de Juegos se ha preocupado de las dos siguientes cuestiones:

– Cuándo un equilibrio bayesiano perfecto es poco razonable

– Qué requisito adicional puede añadirse a la definición de equilibrio para eliminar estos equilibrios bayesianos perfectos que no son razonables.

• Chop y Kreps (1987) hicieron una aportación original y muy influyente en esta área.

Juego de señalización cerveza y quiche



Las estrategias y sistema de conjeturas que constituyen equilibrio bayesiano perfecto en el juego de señalización anterior son:

– *[(Quiche,Quiche),(no,duelo),p=0.1,q] para cualquier q≥1/2*

– *[(Cerveza,Cerveza),(duelo,no),p,q=0.1] para cualquier p≥1/2*

• Estos equilibrios satisfacen el requisito 4, ya que ningún mensaje está dominado para ningún tipo de emisor.

Vamos a analizar el primero:

[(Quiche,Quiche),(no,duelo),p=0.1,q] para cualquier q≥1/2

• *En particular, nada garantiza que el cobardica vaya a estar mejor por tomar quiché (una ganancia de 1 en el peor de los casos) que por tomar cerveza (ganancia de 2 en el mejor).*

• *Por otra parte, la conjetura del receptor parece sospechosa por el siguiente motivo:*

– *Si el receptor observa que el emisor elige cerveza, concluye que es al menos tan probable que el emisor sea cobardica como que sea malas pulgas (es decir, q≥1/2), a pesar de:*

• *A) El cobardica no puede mejorar de ninguna manera su ganancia de 3 en equilibrio tomando cerveza en vez de quiche.*

• *B) El malas pulgas podría mejorar su ganancia de 2 en equilibrio y recibir una ganancia de 3 si el receptor mantuviera la conjetura de que q<1/2.*

Dados A) y B), cabría esperar que el malas pulgas escogiera cerveza y pronunciara el siguiente discurso:

– Verme escoger cerveza debería convencerte de que soy del tipo "malas pulgas":

• Escoger cerveza no podría de ninguna manera haber mejorado la ganancia del cobardica por A)

• Si escoger cerveza te convenciera de que soy del tipo malas pulgas, entonces hacerlo mejoraría mi ganancia, por B).

• Si este discurso fuera creído, establecería que $q=0$, lo que es incompatible con este equilibrio bayesiano perfecto de agrupación.

Definición: Dado un equilibrio bayesiano perfecto en un juego de señalización, el mensaje m_j de M está dominado en equilibrio para el tipo t_i de T si la ganancia de equilibrio de t_i, que

denotamos mediante $U^*(t_i)$, es más alta que la mayor ganancia posible de t_i por utilizar m_j

• Por lo tanto, se debería asignar a q una probabilidad cero

Requisito 5 de señalización ("El criterio intuitivo", Cho y Kreps 1987): *Si el conjunto de información que sigue a m_j está fuera de la trayectoria de equilibrio y m_j está dominado en equilibrio para el tipo t_i, entonces (si es posible) la conjetura del receptor $\mu(t_i \mid m_j)$ debería asignar probabilidad cero al tipo t_i. (Esto es posible siempre que m_j no esté dominado para todos los tipos en T)*

Cerveza y quiche muestra que un mensaje m_j puede estar dominado en equilibrio para t_i sin estar dominado para t_i. Sin embargo, si m_j está dominado para t_i, m_j debe estar dominado en equilibrio para t_i, por lo que imponer el requisito 5 de señalización hace que el requisito 4 sea redundante.