

Ampliación de Análisis:

Fundamentos de Análisis Armónico
y
Ecuaciones en Derivadas Parciales

Rafael Granero-Belinchón
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria
email: rafael.granero@unican.es

ÍNDICE GENERAL

1	APERTURA	7
2	ESPACIOS DE LEBESGUE	11
2.1	Medida e integración	12
2.2	El espacio de las funciones absolutamente integrables	15
2.3	El espacio de las funciones de cuadrado integrable	18
2.4	El espacio de las funciones de p -ésima potencia integrable	20
2.5	Diferentes nociones de convergencia	24
2.6	Convoluciones	27
2.7	Mollifiers	29
2.8	Cut-offs y particiones de la unidad	31
2.9	Conclusiones	32
2.10	Otras fuentes	32
2.11	Ejercicios sugeridos	34
3	SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER	37
3.1	Las series de Fourier	37
3.2	Introducción a la transformada de Fourier	48
3.3	La transformada de Fourier de funciones absolutamente integra- bles	49
3.4	La transformada de Fourier de funciones de cuadrado integrable	55
3.5	Distribuciones	58
3.6	Conclusiones	62
3.7	Otras fuentes	63
3.8	Ejercicios sugeridos	64
4	ESPACIOS DE SOBOLEV	67
4.1	Motivación y definición	67
4.2	Propiedades básicas	68
4.3	Espacios de índice no entero e integrales singulares	72
4.4	La desigualdad de Sobolev	75
4.5	Espacios de Sobolev en dominios acotados	79
4.6	Conclusiones	82
4.7	Otras fuentes	82
4.8	Ejercicios sugeridos	83
5	ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES	85
5.1	Ecuaciones elípticas	86
5.1.1	El lema de Lax-Milgram y las soluciones débiles de la ecua- ción de Helmholtz	86
5.1.2	El problema de Dirichlet	93
5.1.3	Ecuaciones no-lineales	93
5.2	Ecuaciones parabólicas	95
5.2.1	El lema de Lax-Milgram y las soluciones débiles de la ecua- ción del calor	95
5.2.2	Disipación	99
5.2.3	Ecuaciones no-lineales	104
5.3	Conclusiones	108
5.4	Otras fuentes	108
5.5	Ejercicios sugeridos	109

ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura 1 Las ecuaciones de Euler tal cual las escribió en *Principes généraux du mouvement des fluides* (1757). 9

1 | APERTURA

En este curso vamos a dotarnos de una base sólida en Análisis Matemático orientado al estudio de las *ecuaciones en derivadas parciales* (de ahora en adelante EDP). Así, pese a que las EDP sólo aparecen al final, el principal objetivo de este texto es dotar al estudiante de herramientas que le permitan continuar su estudio de materias donde las ecuaciones en derivadas parciales jueguen un papel crucial.

Una EDP es una ecuación donde se relacionan una función (que depende de varias variables independientes entre si) con sus derivadas parciales

$$G\left(\vec{x}, t, u(\vec{x}, t), \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t}, \nabla u(\vec{x}, t), \dots\right) = 0.$$

Aquí, x denota típicamente el punto del espacio mientras que t denota el tiempo. Por su parte, la función u que depende en general de las *variables independientes* x y t es la *incógnita* a determinar.

Si bien ya habéis seguido algún curso de ecuaciones diferenciales (por ejemplo en la asignatura *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*), es en este curso cuando se comenzará a profundizar en estos conceptos.

Además de por sus múltiples aplicaciones, parte de la dificultad (¡y el interés!) de las EDPs no lineales reside en que **no hay una teoría capaz de abarcar todos los casos**. En palabras de Sergiu Klainerman [19]

Is there really a unified subject of Mathematics which one can call PDE? At first glance this seems easy: we may define PDE as the subject which is concerned with all partial differential equations. According to this view the goal of the subject is to find a general theory of all, or very general classes of PDE's. (...) it is now recognized by many practitioners of the subject that the general point of view as a goal in itself, is seriously flawed.

Dada una ecuación diferencial, parte de las preguntas que se plantean son la siguientes

1. ¿existe al menos una solución? De ser así, ¿es dicha solución única? ¿depende de manera continua de los datos (es decir, ¿si cambiamos los datos iniciales o de borde *un poco*, la solución cambia *un poco*)? Los problemas para los que la solución es única y depende de manera continua de los datos iniciales se conocen como *problemas bien puestos en sentido de Hadamard*.
2. una vez que tenemos respuestas a las preguntas anteriores, la pregunta relevante que queda es ¿podemos decir algo de cómo se comporta la solución?

La primera pregunta, si bien parece abstracta, viene realmente de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales al mundo real. Si para una ecuación diferencial dada (que asumimos por el momento viene de un sistema físico), la solución no fuese única no podríamos decidir qué hará nuestro sistema. Es decir, la unicidad de soluciones es necesaria para que haya *determinismo*.

Por otro lado, si tuviésemos una solución única pero esta no depende de manera continua de los datos, dicha solución sería, de nuevo, inútil para nuestro propósito de describir la realidad. Para convencerse basta con observar que el dato inicial real de nuestro problema y el dato inicial que nosotros hemos medido no coinciden en general sino que sólo están cerca. ¡Si la solución cambia drásticamente si uno modifica *un poco* los datos iniciales, nuestra predicción estará *drásticamente* mal!

La segunda pregunta es mucho más compleja ya que describir las propiedades de una función es algo complicado. Por ejemplo, una función de variable real y que devuelve valores reales

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

tiene muchas propiedades diferentes. Por ejemplo, está la *amplitud máxima*, el *área encerrada bajo la curva*, la *pendiente*, la *curvatura*, etc... Para describir algunos de estos parámetros se utilizan diferentes espacios vectoriales de funciones. Por lo tanto dichos espacios son clave a la hora de *entender* una EDP y a ellos dedicaremos parte del curso. En particular vamos a estudiar los espacios de Sobolev H^s y $W^{k,p}$, los espacios de Lebesgue L^p (que os fueron brevemente introducidos en *Ampliación de Cálculo Integral*) o las series y transformada de Fourier (cuyos rudimentos se os explicaron en *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*).

De la misma manera vamos a explicar los rudimentos de las distribuciones así como la definición y propiedades básicas de las derivadas débiles. Ambos son ingredientes básicos en el estudio moderno de las ecuaciones en derivadas parciales por dar lugar a la formulación débil de dichos problemas.

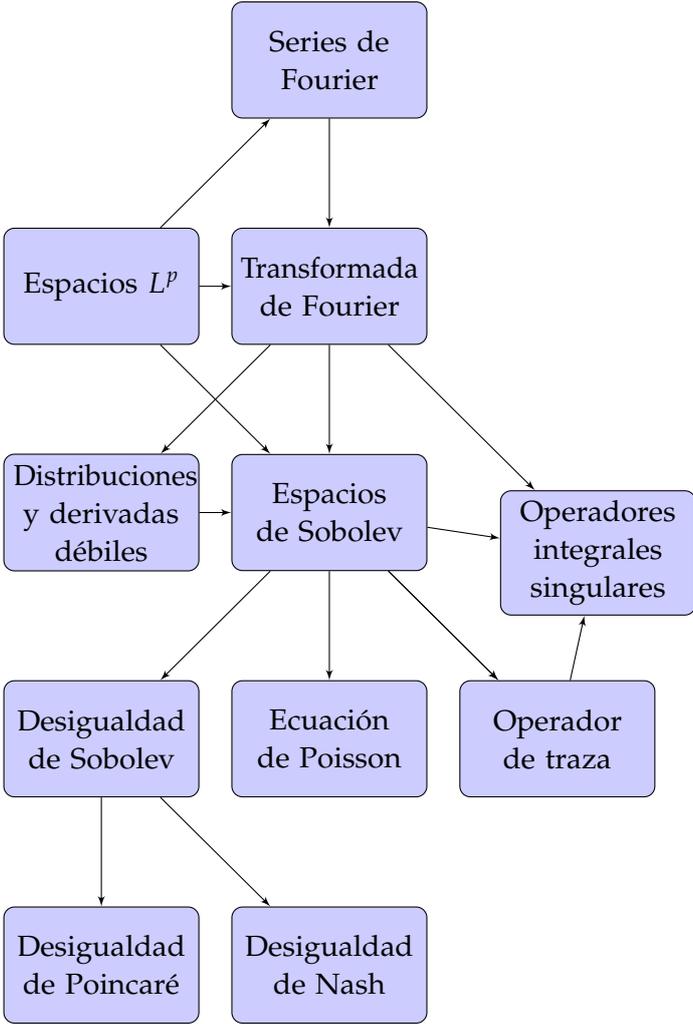
Además de estos conceptos, introduciremos algunos teoremas para garantizar la existencia de diferentes ecuaciones en derivadas parciales así como métodos para estudiar las propiedades cualitativas de la solución. Estos métodos usarán el Lema de Lax-Milgram como herramienta principal (también en los problemas de evolución). En nuestra opinión de esta forma conseguimos que el presente texto deje al lector en una muy buena posición para encarar cursos avanzados de ecuaciones en derivadas parciales de nivel similar al que se observa en los cursos de máster.

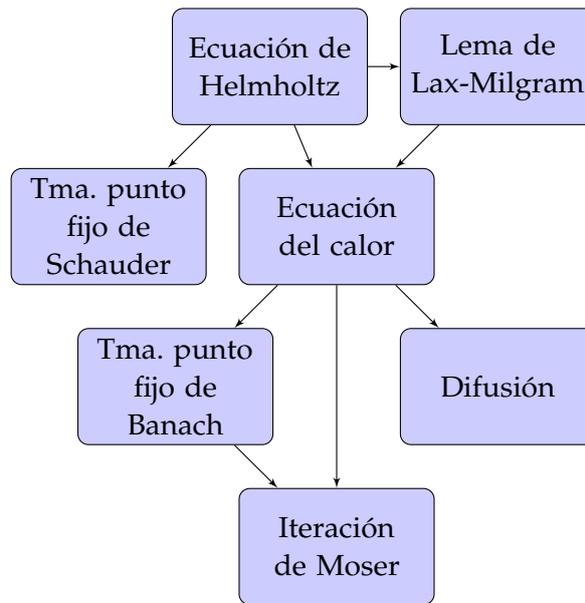
MAPA DEL CURSO

Para evitar que el estudiante pierda la perspectiva y no tenga del todo claro cómo se relaciona un concepto con los demás, hemos preparado un *índice alfabético* con los principales conceptos y además vamos a dejar aquí un *mapa del curso*:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx} \right) = \left(\frac{du}{dt} \right) + u \left(\frac{du}{dx} \right) + v \left(\frac{du}{dy} \right) + w \left(\frac{du}{dz} \right)$$
$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dy} \right) = \left(\frac{dv}{dt} \right) + u \left(\frac{dv}{dx} \right) + v \left(\frac{dv}{dy} \right) + w \left(\frac{dv}{dz} \right)$$
$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dz} \right) = \left(\frac{dw}{dt} \right) + u \left(\frac{dw}{dx} \right) + v \left(\frac{dw}{dy} \right) + w \left(\frac{dw}{dz} \right)$$

Figura 1: Las ecuaciones de Euler tal cual las escribió en *Principes généraux du mouvement des fluides* (1757).





Este mapa intenta indicar cómo se relacionan los conceptos entre sí en este curso. Por supuesto, no hay una única manera de navegar entre ellos y otros libros o apuntes de otros profesores pueden motivar los distintos conceptos de distinta manera.

2 | ESPACIOS DE LEBESGUE

Al tratar con fórmulas numéricas uno rápidamente acaba teniendo que estudiar las distintas magnitudes que aparecen involucradas. Sin embargo, el estudio de las funciones es mucho más complejo ya que hay distintos conceptos y cantidades que juegan algún papel. Por ejemplo está la *amplitud*, la *masa* o la *energía*. Para tratar con estas cantidades se utilizan distintos espacios funcionales y sus normas. Concretamente, las cantidades anteriores se corresponden a las normas de los espacios de Lebesgue L^∞ , L^1 y L^2 .

En este capítulo vamos a introducir la definición y las principales propiedades y desigualdades de los espacios de Lebesgue que utilizaremos después. En particular aprovechando que ya tenemos una cierta soltura manejando los espacios L^p vamos a introducir dos ideas novedosas que aparecen frecuentemente en Análisis como son los mollifiers y las funciones cut-off. Ambas ideas forman parte de la caja de herramientas básica de cualquier analista y nosotros nos vamos a estrenar con ellas probando varios teoremas de densidad en L^p . Como el principal objetivo de este curso es presentar algunas técnicas e ideas útiles para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales vamos a adoptar un punto de vista *utilitarista* en el sentido de que nos enfocaremos más en los resultados y las ideas que en obtener pruebas óptimas.

En lo que sigue nos vamos a centrar en funciones

$$f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

donde, por simplicidad podemos pensar que $\Omega = \mathbb{R}^d$.

A dónde vamos: En este capítulo vamos a recordar los espacios de Lebesgue de funciones integrables L^p , así como algunos de los principales teoremas de la teoría de integración como por ejemplo el teorema de Fubini o los teoremas de convergencia monótona y dominada. Aunque dichos espacios ya fueron introducidos en la asignatura *Ampliación de Cálculo Integral* en este capítulo vamos a ampliar lo visto en asignaturas anteriores con diversas propiedades de estos espacios funcionales. Estas clases de funciones formarán la base sobre la que construiremos otros espacios, los llamados espacios de Sobolev, mejor adaptados al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Concretamente vamos a dar las definiciones de los espacios L^p , a demostrar que L^1 es un espacio de Banach y las principales desigualdades que los relacionan (Hölder, interpolación, Young). También enunciaremos unos resultados caracterizando sus espacios duales. Además recordaremos la noción de convolución de dos funciones y veremos cómo usarla para construir sucesiones aproximantes. Finalmente introduciremos la idea de función cut-off y la usaremos para demostrar que C_c^∞ es un subconjunto denso de L^p .

Los objetivos de este capítulo son

Objetivos mínimos	Objetivos avanzados
Conocer algunos teoremas básicos de la integración de Lebesgue	Familiarizarse con los mollifiers y su uso
Conocer los espacios L^p así como sus propiedades	Familiarizarse con las funciones cut-off
Conocer las principales desigualdades para funciones L^p	Familiarizarse con las particiones de la unidad
Conocer las diferentes nociones de convergencia para funciones L^p	Conocer el Teorema de Banach-Alaoglu

2.1 MEDIDA E INTEGRACIÓN

En esta sección vamos a enunciar varios resultados fundamentales de teoría de la medida e integración. Estos teoremas se usarán durante el resto del curso por lo que conviene tenerlos a mano. Estos resultados (salvo quizá el resultado del término que falta en el Lema de Fatou) forman parte de cualquier curso básico de medida e integración como puede ser *Ampliación de Cálculo Integral*, así que nos remitiremos a ellos para las demostraciones.

Teorema 1 (Teorema de la convergencia monótona). Sea $f_n(x)$ una sucesión no-decreciente de funciones absolutamente integrables. Sea $f(x)$ su límite puntual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x.$$

Entonces f es medible y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Teorema 2 (Lema de Fatou). Sea f_n una sucesión de funciones no-negativas absolutamente integrables. Sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x.$$

Entonces f es medible y además

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx \geq \int_{\Omega} f(x) dx.$$

En el link <https://youtu.be/BQL02FapBHM> se puede ver un video de apoyo.

Que alguna propiedad se verifique en casi todo punto quiere decir que se verifica salvo en un conjunto de medida nula.

Teorema 3 (Teorema de la convergencia dominada). Sea f_n una sucesión de funciones que converge puntualmente a f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x.$$

Asumamos que

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

con g una función no-negativa e integrable. Entonces f es integrable,

$$|f(x)| \leq g(x)$$

y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Teorema 4 (Término que falta en el Lema de Fatou). Sea f_n una sucesión de funciones tales que su potencia p -ésima es absolutamente integrable y se cumple que

$$\int_{\Omega} |f_n(x)|^p dx \leq C.$$

Sea f su límite puntual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x.$$

Entonces f es medible y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|f_n(x)|^p - |f_n(x) - f(x)|^p - |f(x)|^p) dx = 0.$$

Demostración. Vamos a considerar el caso $p > 1$. Empezamos observando que si $p > 1$

$$||x + y|^p - |x|^p| = \int_0^1 \frac{d}{ds} |x + sy|^p ds.$$

Entonces podemos calcular

$$||x + y|^p - |x|^p| = p \int_0^1 |x + sy|^{p-2} (x + sy)y ds.$$

Ahora, usando la desigualdad de Young para números,

$$AB \leq \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q$$

con

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

podemos estimar, para $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} ||x + y|^p - |x|^p| &\leq p \int_0^1 |x + sy|^{p-1} |y| ds \\ &\leq \int_0^1 2 \max\{|x|, |y|\}^{p-1} |y| ds \\ &\leq p 2^{p-1} (|x|^{p-1} + |y|^{p-1}) |y| \\ &\leq p 2^{p-1} |x|^{p-1} |y| + p 2^{p-1} |y|^p, \end{aligned}$$

y concluimos la desigualdad

$$||x + y|^p - |x|^p| \leq \epsilon |x|^p + C(\epsilon, p) |y|^p.$$

Definimos ahora el error

$$e_n(x) = f_n(x) - f(x).$$

Si aplicamos la desigualdad anterior con

$$x = e_n, \quad y = f,$$

obtenemos

$$||e_n + f|^p - |e_n|^p| \leq \epsilon |e_n|^p + C(\epsilon, p) |f|^p,$$

de donde

$$-\epsilon|e_n|^p - (C(\epsilon, p) + 1)|f|^p \leq |e_n + f|^p - |e_n|^p - |f|^p \leq \epsilon|e_n|^p + (C(\epsilon, p) - 1)|f|^p,$$

y

$$||e_n + f|^p - |e_n|^p - |f|^p| \leq \epsilon|e_n|^p + (1 + C(\epsilon, p))|f|^p.$$

Por lo tanto

$$||e_n + f|^p - |e_n|^p - |f|^p| - \epsilon|e_n|^p \leq (1 + C(\epsilon, p))|f|^p.$$

Definimos ahora

$$F_n(x) = ||e_n(x) + f(x)|^p - |e_n(x)|^p - |f(x)|^p| - \epsilon|e_n(x)|^p.$$

Observamos que

$$F_n(x) \rightarrow 0, \quad \text{en casi todo punto } x.$$

Por lo argumento anterior, $(1 + C(\epsilon, p))|f|^p$ es la función dominante. Por lo que podemos aplicar el teorema de convergencia dominada y concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} ||e_n(x) + f(x)|^p - |e_n(x)|^p - |f(x)|^p| - \epsilon|e_n(x)|^p dx = 0.$$

Notamos entonces que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} ||e_n(x) + f(x)|^p - |e_n(x)|^p - |f(x)|^p| dx &= \epsilon \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |e_n(x)|^p dx \\ &\leq \epsilon C(p) (\|f_n\|_{L^p}^p + \|f\|_{L^p}^p) \\ &\leq \epsilon C(p). \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} ||f_n(x)|^p - |f(x) - f_n(x)|^p - |f(x)|^p| dx = 0.$$

En el caso $p = 1$ la prueba es más sencilla y se deja como ejercicio. \square

Teorema 5 (Teorema de Tonelli). Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, dx)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, dy)$ dos espacios de medida σ -finitos. Si $f \geq 0$ entonces se tienen las siguientes igualdades

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy.$$

Teorema 6 (Teorema de Fubini). Sean $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, dx)$ y $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, dy)$ dos espacios de medida σ -finitos. Si $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ entonces se tienen las siguientes igualdades

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy.$$

Teorema 7 (Teorema de Beppo-Levi). Supongamos que tenemos una serie de funciones f_n tales que

$$\int_{\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| dx < \infty.$$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge en casi todo punto y se tiene que

$$\int_{\Omega} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

2.2 EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES ABSOLUTAMENTE INTEGRABLES

Consideramos el conjunto

$$(1) \quad \mathcal{L}^1(\Omega) = \left\{ u(x) \text{ medible tal que } \|u\|_{L^1(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} |u(x)| dx < \infty \right\}.$$

Observamos que este conjunto se puede dotar de la estructura de espacio vectorial. En efecto, tanto la suma como la multiplicación por escalares son operaciones cerradas en $\mathcal{L}^1(\Omega^d)$.

Sin embargo, aunque $\mathcal{L}^1(\Omega)$ sea un espacio vectorial $\|\cdot\|_{L^1}$ no es una norma. Para convencerse basta con observar lo siguiente: dada $u \in \mathcal{L}^1(\Omega) \cap C(\Omega)$, definimos

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in \Omega - E \\ 0 & \text{if } x \in E \end{cases},$$

donde $E \subset \Omega$ es un conjunto con medida 0, $|E| = 0$. Observamos entonces que $u = v$ en casi todo punto pero $u \neq v$ para todo $x \in \Omega$. Entonces, u y v son dos funciones diferentes tales que

$$\|u - v\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u(x) - v(x)| dx = 0.$$

Por lo tanto, para dotar a este tipo de funciones de la estructura de espacio vectorial normado debemos definir la relación de equivalencia

$$u \sim v \text{ si } u = v \text{ en casi todo punto.}$$

Entonces tenemos que

$$(2) \quad L^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{conjunto de clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \|u\|_{L^1(\Omega)} < \infty \right\}.$$

Definición 1. Dadas una sucesión $u_n(x) \in L^1$ y una función $u(x) \in L^1$ definidas en un conjunto Ω , se dice que u_n converge **en sentido** L^1 a u si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Esta convergencia se conoce como convergencia fuerte o convergencia en norma y se denota como

$$u_n \rightarrow u \text{ en } L^1.$$

Es muy importante no confundir la convergencia en norma

$$u_n \rightarrow u \text{ en } L^1,$$

con la convergencia en casi todo punto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \text{ para casi todo } x.$$

De esta manera conseguimos el siguiente resultado

Teorema 8. $L^1(\Omega)$ con la norma

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

es un espacio de Banach, es decir, un espacio vectorial normado completo. Además, dada una sucesión f_n convergente a f existe al menos una subsucesión tal que

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \text{ para casi todo } x,$$

y

$$|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$$

para cierta g integrable.

Demostración. Que es espacio vectorial normado se deja como ejercicio. Vamos a probar que es completo, es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente.

La prueba se descompone en los siguientes pasos:

1. Conseguir un candidato a límite f . Este paso se hace usando una subsucesión definida gracias a que la sucesión original es Cauchy.
2. Demostrar que la subsucesión construida en el paso anterior realmente converge en el sentido deseado a nuestro candidato a límite f .
3. Usar que la sucesión original es Cauchy para conseguir que toda la sucesión (y no solo la subsucesión) converja a f .

Paso 0: Vamos a explicar la idea para demostrar que, en el cuerpo de los números reales, que una sucesión sea Cauchy implica que es convergente. Sea X_n una sucesión de Cauchy de números reales. Entonces podemos elegir una subsucesión X_{n_k} tal que

$$|X_n - X_{n_k}| \leq 2^{-k}$$

para todo $n \geq n_k$. Por lo tanto

$$|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}| \leq 2^{-k}.$$

Definimos entonces

$$Y_N = X_{n_1} + X_{n_2} - X_{n_1} + X_{n_3} - X_{n_2} + \dots + X_{n_N} = X_{n_1} + \sum_{j=1}^{N-1} X_{n_{j+1}} - X_{n_j} = X_{n_N}.$$

Por la definición de la subsucesión se tiene que

$$|Y_N| \leq |X_{n_1}| + \sum_{j=1}^{N-1} |X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| \leq |X_{n_1}| + \sum_{j=1}^{N-1} 2^{-j}$$

Por lo tanto, como la serie converge (ya que está mayorada por una serie convergente), se tiene que X_{n_N} tiene que converger. Una vez que tenemos una subsucesión convergente, volvemos a usar la propiedad de Cauchy

de la sucesión original para demostrar que toda la sucesión (y no solo la subsucesión) converge a dicho límite.

Paso 1: Sea

$$f_n(x) \in L^1$$

una sucesión de Cauchy. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon)$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_{L^1} < \varepsilon$$

si $n, m \geq n_0$. En particular, tomando $\varepsilon = 2^{-k}$ para cada $k > 0$ podemos obtener una subsucesión f_{n_k} tal que

$$\|f_n - f_{n_k}\|_{L^1} < 2^{-k}.$$

para todo $n \geq n_k$, y en particular

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^1} < 2^{-k}.$$

Esta subsucesión nos va a permitir definir un *candidato a límite*. Para ello definimos la siguiente función

$$S_N(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Esta función está claramente en L^1 (por ser suma finita de funciones de L^1), pero además, por la propia definición de la subsucesión tenemos que

$$\|S_N\|_{L^1} \leq \|f_{n_1}\|_{L^1} + 1.$$

Si ahora definimos el S_∞ como el límite puntual

$$S_\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|,$$

dado que la cota superior es independiente de N y la serie S_N es no decreciente tenemos, usando el teorema de la convergencia monótona,

$$\int_{\Omega} S_\infty(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} S_N(x) dx \leq \|f_{n_1}\|_{L^1} + 1,$$

es decir, $S_\infty \in L^1$ y por lo tanto es finita en casi todo punto. Entonces, $S_\infty(x)$ es una serie (numérica) absolutamente convergente en casi todo punto. Si ahora definimos

$$\tilde{S}_N(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^N f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$$

observamos que, por la desigualdad triangular aplicada en cada punto x se tiene

$$|\tilde{S}_N(x)| \leq S_N(x) \leq S_\infty(x),$$

y por lo tanto la serie $\tilde{S}_N(x)$ converge absolutamente en casi todo punto. Denotamos por $f(x)$ a dicho límite

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{S}_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^N f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x).$$

Ahora podríamos usar el teorema de Beppo-Levi, pero en su lugar vamos a intentar demostrar que L^1 es completo de manera autocontenida.

Además, usando $S_\infty \in L^1$, por el teorema de la convergencia dominada, se tiene que dicha función f verifica

$$|f(x)| \leq S_\infty(x)$$

y es absolutamente integrable $f \in L^1$. Esta función va a ser nuestro candidato a límite para la sucesión de Cauchy f_n original.

Paso 2: Para verlo basta con observar que

$$\tilde{S}_N = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^N f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) = f_{n_{N+1}}(x)$$

y entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{S}_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{n_{N+1}}(x) = f(x)$$

en casi todo punto. Además tenemos que

$$|f_{n_{N+1}}(x)| \leq S_\infty(x),$$

$$|f(x) - f_{n_{N+1}}(x)| \leq 2S_\infty(x),$$

por lo que el teorema de la convergencia dominada aplicado a $|f(x) - f_{n_{N+1}}(x)|$ nos asegura que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f(x) - f_{n_{N+1}}(x)| dx = \int_{\Omega} 0 dx,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_{n_{N+1}}\|_{L^1} = 0.$$

Por lo tanto, la subsucesión que hemos construido converge a f en sentido L^1 .

Paso 3: Para ver que la sucesión completa converge a f basta con observar que, dado δ arbitrario se tiene que existe $n_0(\delta)$ tal que

$$\|f_n - f_{n_N}\|_{L^1} \leq \delta,$$

donde $n \geq n_0$ y N es suficientemente grande como para que $n_k \geq n_0$. Entonces se tiene que

$$\|f_n - f\|_{L^1} = \|f_n \pm f_{n_N} - f\|_{L^1} \leq \|f_n - f_{n_N}\|_{L^1} + \|f - f_{n_N}\|_{L^1} \leq \delta + \|f - \tilde{S}_{N-1}\|_{L^1},$$

de donde concluimos usando el paso anterior. \square

2.3 EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE CUADRADO INTEGRABLE

Una vez que hemos definido el espacio L^1 de clases de equivalencia de funciones absolutamente integrables podemos plantearnos estudiar los espacios que involucran potencias. El primero de ellos es el espacio

$$(3) \quad L^2(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

A este espacio vectorial lo podemos dotar del producto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

y de la norma

$$\|f\|_{L^2} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Es decir, si bien L^1 era un espacio de Banach, L^2 es un espacio de Hilbert. Para demostrarlo bastaría con adaptar la prueba vista en la sección anterior. Vamos a ver unos ejemplos en el caso $\Omega = [-L, L]$. Nos damos cuenta entonces de que las funciones continuas están contenidas en este espacio

$$C([-L, L]) \subset L^2([-L, L]),$$

pero además tenemos funciones discontinuas, como por ejemplo

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases},$$

o incluso funciones con algún tipo de singularidad como

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}.$$

Las funciones en este espacio verifican una desigualdad conocida como de Cauchy-Schwarz

$$(4) \quad \left| \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para probarlo basta con observar que

$$AB \leq \frac{\varepsilon}{2} A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} B^2, \forall \varepsilon > 0$$

y por lo tanto

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} (f(x))^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (g(x))^2 dx = \frac{\varepsilon}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Si ahora tomamos

$$\varepsilon = \frac{\|g\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}}$$

obtenemos

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.4 EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE p -ÉSIMA POTENCIA INTEGRABLE

Tras considerar el caso de funciones de cuadrado integrable, podemos definir

$$(5) \quad L^p(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

En el link <https://youtu.be/aa7yntuvYJM> se puede ver un video de apoyo.

Los espacios L^p son espacios de Banach y verifican la siguiente desigualdad, conocida como desigualdad de Hölder,

$$(6) \quad \left| \int_{\Omega} \prod_{i=1}^n f_i(x) dx \right| \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}, \quad 1 \leq p_i \leq \infty, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1.$$

Veamos rápidamente una prueba de esta desigualdad. Consideremos primero el caso de dos funciones f y g que además cumplen

$$\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1.$$

Entonces, usando la desigualdad [5, Lema 5.7]

$$A^\alpha B^\beta \leq \alpha A + \beta B, \quad \alpha, \beta < 1, \quad \alpha + \beta = 1$$

se tiene

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx = \int_{\Omega} (|f(x)|^p)^{1/p} (|g(x)|^q)^{1/q} dx \leq 1,$$

y concluimos el resultado deseado. Esta desigualdad tiene una consecuencia útil

Es decir, L^r esta inmerso de manera continua en $L^{p'} \cap L^{q'}$ y se denota

$$L^{p'}(\Omega) \cap L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Teorema 9 (Interpolación). Sea f una función tal que $f \in L^{p'}(\Omega)$ y $f \in L^{q'}(\Omega)$. Entonces $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p', q']$. Además

$$(7) \quad \|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}^\theta \|f\|_{L^{q'}(\Omega)}^{1-\theta},$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ se define como

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p'} + \frac{1-\theta}{q'}.$$

Demostración. Definimos θ tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p'} + \frac{1-\theta}{q'}.$$

Entonces tenemos que

$$\int_{\Omega} |f|^r dx = \int_{\Omega} |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} dx$$

Usando la desigualdad (6) con

$$p = \frac{p'}{r\theta} \text{ y } q = \frac{q'}{r(1-\theta)},$$

concluimos el resultado. \square

Al ser p arbitrario uno puede preguntarse por

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Esto motiva la siguiente definición:

$$(8) \quad L^\infty(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equiv. } u \text{ t.q. } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty \right\}.$$

donde el supremo esencial se define como

$$\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| \stackrel{\text{def}}{=} \text{la cota más pequeña } a \text{ t.q. } |\{x \mid |u(x)| > a\}| = 0.$$

Entonces se tiene

Lema 1. Dada $f \in L^r(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq r < \infty$, entonces

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Demostración. Definimos el conjunto

$$\mathcal{U}(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |f(x)| \geq \|f\|_{L^\infty} - \epsilon\}.$$

Observamos que para ϵ fijo suficientemente pequeño el conjunto $\mathcal{U}(\epsilon)$ es no-vacío ya que eso sería una contradicción con la definición de norma L^∞ . Además, $|\mathcal{U}(\epsilon)| < \infty$ por la integrabilidad de la potencia p -ésima. Entonces tenemos

$$\|f\|_{L^p}^p \geq \int_{\mathcal{U}(\epsilon)} |f(x)|^p dx \geq \int_{\mathcal{U}(\epsilon)} (\|f\|_{L^\infty} - \epsilon)^p dx.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\|f\|_{L^p} \geq (\|f\|_{L^\infty} - \epsilon) |\mathcal{U}(\epsilon)|^{1/p}.$$

Si ahora tomamos el lim inf obtenemos que

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty} - \epsilon.$$

De la misma manera, usando interpolación, tenemos que

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-p'/p} \|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}.$$

Si ahora tomamos el lim sup obtenemos que

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Para concluir basta notar que ϵ era arbitrario. □

El teorema 1 explica el origen de la notación L^∞ .

Ya se ha visto en cursos anteriores que las funciones L^p se podían aproximar por funciones escalón (también conocidas como funciones simples) o, dicho de otra manera, que las funciones escalón eran un conjunto denso de L^p . Nos gustaría conocer más conjuntos densos del espacio L^p . Otro ejemplo más es el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto C_c :

Lema 2. El conjunto $C_c(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq p < \infty$. Es decir, dada una función $f \in L^p$ se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe una $f_\epsilon \in C_c$ tal que

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p} \leq \epsilon.$$

Demostración. No vamos a dar los detalles (el lector puede verlos en [3, 21]) sino que vamos a dar solo la idea en la que se basa. La prueba consta de los siguientes ingredientes:

- las funciones escalón (o funciones simples) son densas en L^p [21];
- podemos aproximar la función indicatriz de un conjunto A por funciones C_c ;
- por lo tanto, basta con aproximar en la norma L^p las funciones escalón por funciones C_c .

□

En el link <https://youtu.be/vEtJ02IFDy0> se puede ver un video de apoyo.

Aunque lo dijimos con anterioridad, es importante remarcar que las funciones L^p no necesitan ser continuas. De la misma manera, estas funciones no tienen por qué tener límite cuando $|x| \rightarrow \infty$. Sin embargo, si dicho límite existe debe ser forzosamente cero y además las funciones deben decaer de manera suficientemente rápida como para que la integral de la potencia p -ésima sea finita. Con estos razonamientos llegamos a que estos espacios L^p se pueden usar para medir el decaimiento en el infinito y el orden de las posibles singularidades. En efecto, en estos términos, $L^\infty(\mathbb{R})$ es el espacio sin decaimiento en el infinito pero sin singularidades mientras que $L^1(\mathbb{R})$ es el espacio que permite singularidades de tipo $|x|^{-1+\epsilon}$ y que decae al infinito con orden $|x|^{-1-\epsilon}$. De manera similar $L^2(\mathbb{R})$ permite singularidades como $|x|^{-0,5+\epsilon}$ y decaen en el infinito como $|x|^{-0,5-\epsilon}$.

Una pregunta importante una vez que tenemos un espacio vectorial es ¿cuál es su espacio dual?

Así tenemos el siguiente resultado

Teorema 10 (Representación de Riesz). Sea $1 < p < \infty$ y definamos q tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces se tiene que el espacio dual topológico de L^p

$$(L^p)^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : L^p \mapsto \mathbb{R} \text{ funcional lineal y continuo}\}$$

se puede identificar con L^q y se tiene que todo funcional $\varphi \in (L^p)^*$ cumple

$$(\varphi, f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad \forall f \in L^p$$

con $g(x) \in L^q$, donde (φ, f) denota la acción del funcional φ sobre la función f .

Demostración. No vamos a dar los detalles completos de la prueba, pero el lector interesado los puede consultar en las referencias que damos al final de este capítulo. Fijamos una $g \in L^q$ y definimos el operador

$$T : L^p \rightarrow \mathbb{R}$$

como

$$Tf = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Por la desigualdad de Hölder, este operador es continuo

$$|Tf| \leq \|g\|_{L^q} \|f\|_{L^p}.$$

Es decir, la norma (como operador) de T cumple

$$\|T\| \leq \|g\|_{L^q}$$

Para ver la igualdad basta observar que si

$$f = g|g|^{q-2}$$

se tiene que $f \in L^p$ y

$$Tf = \int_{\Omega} |g(x)|^q dx = \|g\|_{L^q}^q = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Además, de la linealidad de la integral se concluye que es un operador lineal. Por lo tanto, $T \in (L^p)^*$. Nos falta ver que todo operador lineal y continuo es de esa forma. Esta parte de la prueba es la más delicada ya que hace uso del teorema de Radon-Nikodym. El lector interesado puede consultar las referencias al final del capítulo. \square

Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ son muy diferentes. Así se tiene

Teorema 11 (Dual de L^1). El espacio dual topológico de L^1

$$(L^1)^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : L^1 \mapsto \mathbb{R} \text{ funcional lineal y continuo}\}$$

se puede identificar con L^∞ y se tiene que todo funcional $\varphi \in (L^1)^*$ cumple

$$(\varphi, f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad \forall f \in L^1$$

con $g(x) \in L^\infty$.

Si bien se conoce el espacio dual de L^∞ (un espacio formado por ciertas medidas finitas) no vamos a usar ese resultado en este curso.

Estos resultados nos dan un nuevo punto de vista sobre la propia definición de función. Por un lado tenemos la idea *elemental* de que una función es una manera de asignar un valor a un determinado punto. Así por ejemplo, una función

$$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

sería simplemente un emparejamiento entre las $x \in \Omega$ y las $y \in \mathbb{R}$. Esta idea nos ha servido durante casi toda nuestra adolescencia y hasta en parte de la carrera. Sin embargo resulta de alguna manera paradójica teniendo en

cuenta que las funciones de los espacios L^p están definidas en casi todo punto (ya que si asignamos valores diferentes en un conjunto de medida nula la clase de equivalencia no cambia y por lo tanto, como función L^p , la función tampoco). De hecho, los teoremas de dualidad anteriores van aún más lejos al establecer que, por ejemplo, toda función $f \in L^p$ se puede pensar como un funcional en el espacio dual L^q . Es decir, podemos conocer una función $f \in L^p$, en vez de como emparejamiento entre x 's e y 's, como una integral

En el link <https://youtu.be/vEtJ02IFDy0> se puede ver un video de apoyo.

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

donde $g(x)$ se va moviendo en L^q . Dicho de otra manera, podemos pensar f como emparejamiento

$$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

o podemos pensar f como funcional

$$f : L^q \mapsto \mathbb{R}.$$

En el link <https://youtu.be/1FvbA2ZvVoY> se puede ver un video de apoyo.

Esta idea de conocer las funciones y otros objetos matemáticos gracias a realizar diversos *tests* integrales

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

nos será muy útil a lo largo del curso.

2.5 DIFERENTES NOCIONES DE CONVERGENCIA

En general, los espacios de funciones tienen dimensión infinita. Eso hace que sus propiedades sean muy distintas a las de los espacios vectoriales de tipo \mathbb{R}^N . Veamos un ejemplo. Sabemos que si tenemos una sucesión acotada $\vec{v}_n \subset \mathbb{R}^N$ siempre podemos extraer al menos una subsucesión que sea convergente. Esto no ocurre en espacios de funciones en general. Por ejemplo podemos considerar la siguiente sucesión de funciones

$$v_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & \text{si } 0 \leq |x| \leq 1/n \\ 0 & \text{si } 1/n < |x| \end{cases}.$$

Observamos que v_n son todas funciones continuas. Se tiene que

$$v_n(0) = 1 \quad \forall n \neq 0,$$

mientras que

$$v_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x > 0.$$

Por lo tanto, toda subsucesión converge a

$$v_{\infty}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \end{cases}.$$

De manera que no podemos elegir una subsucesión que tenga un límite continuo. Es decir, nuestra sucesión de funciones continuas cuya norma esta

uniformemente acotada no tiene subsucesiones convergentes. Queda claro entonces que debemos ser muy precisos con varias nociones de convergencia si es que queremos recuperar algunas de las propiedades conocidas como por ejemplo la anteriormente mencionada de que sucesión acotada implica subsucesión convergente.

Definición 2. Dadas una sucesión $u_n(x)$ y una función $u(x)$ definidas en un conjunto Ω ,

- $u_n \in L^p$ converge **fuerte** a $u \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Esta convergencia se conoce como convergencia en sentido L^p o convergencia en norma y se denota como

$$u_n \rightarrow u \text{ en } L^p.$$

- $u_n \in L^p$ converge **débil** a $u \in L^p$, $1 < p < \infty$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi, u_n) = (\varphi, u) \quad \forall \varphi \in (L^p)^*.$$

Es decir, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x)g(x)dx = \int_{\Omega} u(x)g(x)dx \quad \forall g \in L^q,$$

con

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Esta convergencia se denota por

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } L^p.$$

- u_n converge **puntualmente en casi todo punto** a u si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \text{ para casi todo punto en } \Omega$$

Así, volviendo al ejemplo anterior vemos que v_n converge en sentido L^2 a la función idénticamente cero mientras que converge puntualmente en casi todo punto a la función v_{∞} .

La noción de convergencia en L^p y convergencia débil en L^p están relacionadas:

Lema 3. Sea f_k una sucesión de funciones que converge fuerte en L^p a f . Entonces f_k también converge débil a f .

Demostración. La convergencia débil se reduce a comprobar que

$$\int_{\Omega} (f_n(x) - f(x))g(x)dx \rightarrow 0 \quad \forall g \in L^q$$

En el link <https://youtu.be/IQeM3U6DY3s> se puede ver un video de apoyo.

y

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Usando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\int_{\Omega} (f_n(x) - f(x))g(x)dx \leq \|f - f_k\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \rightarrow 0 \quad \forall g \in L^q.$$

□

Como se podía esperar, la implicación en el otro sentido es falsa en general. La relación entre acotación de una determinada sucesión y su convergencia débil se resume en los siguientes resultados (algunos de los cuales dejamos sin demostración)

Teorema 12 (Principio de acotación uniforme y semicontinuidad inferior débil de la norma). Sea f_k una sucesión de funciones que converge débil a f en L^p . Entonces se tiene que

$$\|f_k\|_{L^p} \leq C$$

y

$$\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^p}.$$

Demostración. La primera afirmación es una consecuencia del principio de acotación uniforme. La segunda se reduce a observar que, definiendo

$$g(x) = f(x)|f(x)|^{p-2},$$

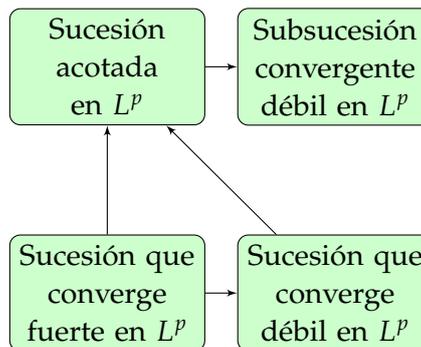
por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^p &= \int f(x)g(x)dx \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x)g(x)dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^p} \|f\|_{L^p}^{p-1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 13 (Banach-Alaoglu). Sea $1 < p < \infty$ y $f_n \in L^p$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión débilmente convergente a $f \in L^p$.

Veamos el siguiente esquema para las convergencias en los espacios L^p con $1 < p < \infty$:



2.6 CONVOLUCIONES

Dadas dos funciones f y g definimos la convolución como

$$(9) \quad f * g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Obviamente

$$f * g = g * f$$

sin más que cambiar variables.

La convolución es una operación muy importante en análisis ya que aparece naturalmente al resolver diferentes ecuaciones diferenciales lineales o al diseñar esquemas de aproximación de funciones.

Lema 4 (Desigualdad de Young). Dadas $f \in L^p$ y $g \in L^q$ con

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

se tiene que

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Demostración. El caso $r = \infty$ es una aplicación de la desigualdad de Hölder mientras que el caso $r = 1$ es una aplicación del teorema de Fubini. Veamos el caso general. Se tiene que

$$\begin{aligned} |f * g| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^{1 \pm p/r} |g(y)|^{1 \pm q/r} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r} |f(x-y)|^{(r-p)/r} |g(y)|^{(r-q)/r} dy. \end{aligned}$$

Ahora vamos a aplicar la desigualdad de Hölder con tres términos y exponentes

$$p_1 = r, \quad p_2 = pr/(r-p) \text{ y } p_3 = qr/(r-q).$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \| |f(x-y)|^{p/r} |g(y)|^{q/r} \|_{L^r} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right)^{1/r}, \\ \| |f(x-y)|^{(r-p)/r} \|_{L^{pr/(r-p)}} &= \|f\|_{L^p}^{(r-p)/r}, \\ \| |g(y)|^{(r-q)/r} \|_{L^{qr/(r-q)}} &= \|g\|_{L^q}^{(r-q)/r}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f * g\|_{L^r}^r \leq \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy dx,$$

y, aplicando el teorema de Fubini, concluimos que

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Vamos a ver una de las razones que hacen de las convoluciones un objeto muy útil. Sea f una función L^1 . Entonces, tal cual hemos señalado antes, dicha función no tiene por qué ser continua. Sin embargo, si le aplicamos la convolución con una función continua j , el nuevo objeto hereda las mejores propiedades de la función j .

Lema 5. Sea f una función L^p y sea j una función C_c^k . Entonces

$$g = f * j \in C^k.$$

Demostración. Comenzamos observando que $j \in L^q$ para todo $1 \leq q \leq \infty$. Si definimos

$$g = f * j$$

tenemos que

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)j(x-y)dy.$$

Podemos calcular que

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)(j(x+h-y) - j(x-y))dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-z)(j(z+h) - j(z))dz, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|g(x+h) - g(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|j(\cdot+h) - j(\cdot)\|_{L^q}.$$

Usando que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|j(\cdot+h) - j(\cdot)\|_{L^q} = 0$$

se concluye la continuidad de g . Ahora observamos que, *en caso de poder intercambiar la derivada con la integral*, tenemos que

$$\partial_{x_i}^n g = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \partial_{x_i}^n j(x-y) dy$$

y por lo tanto $g \in C^k$. Por lo tanto solo nos queda por justificar el paso de la derivada dentro de la integral. Veamos cómo podemos intercambiar la derivada con la integral usando el Teorema de Fubini [15]. Para ello basta con observar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)j(x-y)dy &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)(j(x-y) - j((x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d) - y))dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_0^{x_i} \partial_s j((x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_d) - y) ds dy \end{aligned}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \partial_{x_i} j(x-y) dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^{x_i} ds \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \partial_s j((x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_d) - y) dy,$$

por lo que basta con aplicar el Teorema de Fubini para concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \partial_{x_i} j(x-y) dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)j(x-y) dy.$$

□

2.7 MOLLIFIERS

Definimos ahora la siguiente función

$$\mathcal{J}(x) = \begin{cases} C_d e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde

$$C_d = \left(\int_{B(0,1)} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dx \right)^{-1}.$$

De esta manera se tiene que

$$\mathcal{J}(x) \geq 0, \quad \|\mathcal{J}\|_{L^1} = 1.$$

Si ahora definimos el espacio

$$(10) \quad C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \stackrel{\text{def}}{=} C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C_c(\mathbb{R}^d),$$

observamos que

$$\mathcal{J} \in C_c^\infty.$$

De la misma manera, para $\varepsilon > 0$, definimos la siguiente familia de funciones llamadas mollifiers

$$\mathcal{J}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \mathcal{J}(x/\varepsilon) \in C_c^\infty.$$

Sin más que cambiar variables observamos que

$$\|\mathcal{J}_\varepsilon\|_{L^1} = 1.$$

Si ahora definimos

$$g = f * \mathcal{J}$$

tenemos que

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \mathcal{J}(x-y) dy.$$

Ahora observamos que

$$\partial_{x_i}^n g = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \partial_{x_i}^n \mathcal{J}(x-y) dy$$

y por lo tanto $g \in C^\infty$. Observamos entonces que la convolución con un mollifier es una buena manera de obtener funciones regulares de una función arbitraria dada. Esa observación es la clave del siguiente resultado

Teorema 14. El conjunto $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq p < \infty$. Es decir, dada una función $f \in L^p$ se tiene que para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon(\delta)$ y una $f_\varepsilon \in C^\infty$ tal que

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \delta.$$

Demostración. Dada una función f definimos

$$f_\varepsilon = f * \mathcal{J}_\varepsilon,$$

A veces se utiliza la notación

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Se define el soporte de una función como el conjunto de puntos donde la función no vale cero.

para cierto ϵ que fijaremos luego. Por lo visto anteriormente se tiene que $f_\epsilon \in C^\infty$. Cambiando variables y usando la definición de los mollifiers podemos calcular que

$$\begin{aligned} f(x) - f_\epsilon(x) &= f(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \mathcal{J}_\epsilon(y) dy \\ &= f(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\epsilon z) \mathcal{J}(z) dz \\ &= f(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{J}(z) dz - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\epsilon z) \mathcal{J}(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f(x-\epsilon z)) \mathcal{J}(z) dz \\ &= \int_{B(0,1)} (f(x) - f(x-\epsilon z)) \mathcal{J}(z) dz. \end{aligned}$$

Ahora usamos la desigualdad integral de Minkowski [16, Teorema 6.19]

$$\left(\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} F(z,x) d\mu(z) \right|^p dv(x) \right)^{1/p} \leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |F(z,x)|^p dv(x) \right)^{1/p} d\mu(z), \quad 1 \leq p < \infty$$

con

$$F(x,z) = f(x) - f(x-\epsilon z)$$

$$d\mu(z) = \mathcal{J}(z) dz,$$

y

$$dv(x) = dx$$

para obtener

$$\begin{aligned} \|f - f_\epsilon\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{B(0,1)} (f(x) - f(x-\epsilon z)) \mathcal{J}(z) dz \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{B(0,1)} \mathcal{J}(z) \|f(\cdot) - f(\cdot - \epsilon z)\|_{L^p} dz. \end{aligned}$$

Esta desigualdad se puede escribir como

$$\| \int F(z, \cdot) dz \|_{L^p} \leq \int \|F(z, \cdot)\|_{L^p} dz$$

Como se tiene que [3, 4]

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot) - f(\cdot - h)\|_{L^p} = 0,$$

podemos elegir $0 < \epsilon \ll 1$ tal que

$$\|f(\cdot) - f(\cdot - \epsilon z)\|_{L^p} \leq \delta$$

y entonces

$$\|f - f_\epsilon\|_{L^p} \leq \delta.$$

□

2.8 CUT-OFFS Y PARTICIONES DE LA UNIDAD

En ocasiones para resolver un determinado problema hay que estudiar las propiedades de una determinada función en una región concreta de su dominio. Para ello conviene *localizar* la función para *olvidarnos* del resto del dominio. Es entonces cuando las *funciones cut-off*, funciones que valen 1 en un conjunto concreto A y valen 0 fuera de un conjunto mayor B , son muy útiles.

Vamos a construir explícitamente una función con esas características. Definimos ahora la función

$$m(y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{y}} & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Esta función $m \in C^\infty(\mathbb{R})$. De la misma manera podemos definir

$$M(y) = \frac{m(y)}{m(y) + m(1-y)}.$$

De nuevo, esta función cumple $0 \leq M(y) \leq 1$, $M \in C^\infty$. Concretamente, si

$$M(y) = 0 \text{ si } y \leq 0.$$

Además

$$M(y) = 1 \text{ si } 1 - y \leq 0.$$

Ahora definimos la función cut-off

$$\zeta(x) = M^2(2 - |x|/R).$$

Observamos que si $|x| < R$ se tiene que

$$\zeta(x) = 1,$$

mientras que si $|x| > 2R$ entonces

$$\zeta(x) = 0.$$

Así ζ es una función cut-off. Ejemplos similares se pueden construir para conjuntos más generales. Estas funciones son muy usadas tanto en Análisis como en Geometría Diferencial porque permiten localizar el problema en un subconjunto del mismo.

Las funciones cut-off se pueden usar para demostrar el siguiente resultado:

Teorema 15. El conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq p < \infty$. Es decir, dada una función $f \in L^p$ se tiene que para todo $\delta > 0$ existe una $f_\delta \in C_c^\infty$ tal que

$$\|f - f_\delta\|_{L^p} \leq \delta.$$

La demostración se deja como ejercicio.

Las funciones cut-off sirven de base para construir las llamadas *particiones de la unidad*. Consideremos un conjunto compacto \mathcal{K} que está cubierto por la colección de abiertos \mathcal{U}_i

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{i=1}^k \mathcal{U}_i.$$

Entonces existen funciones $\zeta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $i = 0, 1, \dots, k$ tales que

- $0 \leq \zeta_i \leq 1,$

-

$$\sum_{j=0}^k \zeta_j(x) = 1,$$

- el soporte de ζ_0 está contenido en $\mathbb{R}^d - \mathcal{K},$

- $\zeta_i, i = 1, \dots, k,$ tienen soporte compacto y está contenido en $\mathcal{U}_i.$

2.9 CONCLUSIONES

En este capítulo hemos recordado algunos teoremas de teoría de la integración de Lebesgue así como la definición de los espacios de Lebesgue. Además hemos profundizado en estos espacios y hemos probado diversas propiedades (como es que son un espacio de Banach o una caracterización de los espacios duales) así como varias desigualdades que los relacionan (Hölder, Young e interpolación). De la misma manera hemos probado varios teoremas de densidad para espacios L^p . Estos teoremas nos serán útiles al permitir reducir la demostración de determinada propiedad en L^p a la demostración de esa misma propiedad en un subconjunto denso. A primera vista este tipo de argumentos nos pueden parecer *útiles pero oscuros*, sin embargo esto no debería ser así. Por ejemplo podemos considerar los números reales como analogía de los espacios L^p . De esta manera, los números racionales serían la analogía del subconjunto denso, por ejemplo C_c^∞ . El hecho de que los números racionales sean densos en los reales es algo clave por ejemplo en cómo maneja un ordenador las operaciones. Con esto en mente parece más razonable esta tarea de localizar subconjuntos de funciones lo mejor posibles que sean densos, ya que nos permitirá *operar* con las funciones L^p generales. También hemos visto varias nociones de convergencia que es muy importante conocer.

Una idea que es muy importante retener de cara a tener intuición es que, si bien una función $L^p, 1 \leq p < \infty$ no tiene por qué tener límite cuando $|x| \rightarrow \infty$, en caso de que dicho límite exista debe ser idénticamente 0. Esta observación nos permite pensar los espacios L^p como una familia de espacios que valora *decaimiento* y *singularidades*. Así una función L^∞ no tiene singularidades ni (necesariamente) *decaimiento* mientras que una función L^p tiene singularidades y *decaimiento* de determinado orden.

2.10 OTRAS FUENTES

El lector interesado en profundizar más puede consultar [3, 4, 5, 13, 16, 21, 22, 24, 25].

Concretamente, los teoremas de teoría de la integración de Lebesgue se pueden consultar en [21]. Por ejemplo, los teoremas de la convergencia monótona, de la convergencia dominada y los lemas de Fatou y el lema del término que falta en el lam de Fatou corresponden a las secciones 1.6-1.9 de

[21]. De la misma manera, los teoremas de la convergencia monótona y de la convergencia dominada y el lema de Fatou se pueden ver en los teoremas IV.1 y IV.2 y el Lema IV.1 de [3] o en los teoremas 4.1, 4.2 y el Lema 4.1 de [4]. El teorema del término que falta en el Lema de Fatou (también conocido como Lema de Brezis-Lieb) es el ejercicio 4.17 de [4].

Los teoremas de Fubini y Tonelli se pueden ver en los teoremas IV.4 y IV.5 de [3], en los teoremas 4.4 y 4.5 de [4] y en la sección 1.12 de [21].

Para conocer más teoría sobre los espacios L^p se puede consultar el capítulo 4 de [3], el capítulo 4 de [3] y el capítulo 6 de [16]. En particular, que los espacios L^p son un espacio de Banach se puede consultar en los teoremas IV.7 y IV.8 de [3], 4.7 y 4.8 [4], en la sección 2.7 de [21], en el teorema 5.1 de [5] o en el 6.6 de [16]. De la misma manera los teoremas de densidad se corresponden con los teoremas 4.3 y 4.22, el corolario 4.23 de [4] o a la proposición 6.7 de [16]. Si se prefiere, para los resultados de densidad se puede consultar los teoremas IV.3, IV.22 y el corolario IV.23 de [3] o las secciones 2.16 y 2.19 de [21] y el teorema 8.17 de [16]. La dualidad de los espacios L^p se corresponde con la sección 4.3 de [4] y la IV.3 de [3] además de con la sección 2.18 de [21] o 6.15 de [16].

Las desigualdades de Hölder y interpolación se encuentran en el teorema IV.6 de [3], 4.6 de [4], 2.3 de [21] o 6.2 y 6.10 de [16]. La desigualdad de Young para convoluciones se halla en la sección 4.2 de [21], en el teorema IV.30 de [3] y el 4.33 de [4] o en el corolario 1.21 de [13]. También puede comprobarse en el Apéndice A de [24] o la sección 8.2 de [16].

La convergencia débil es el tema que trata la sección 2.9 de [21]. Los teoremas del principio de acotación uniforme (uniform boundedness principle) y la semicontinuidad inferior débil de la norma se pueden ver en las secciones 2.11 y 2.12 de [21]. El teorema de Banach-Alaoglu corresponde a la sección 2.18 de [21] mientras que una versión más general se puede ver en el teorema 3.16 de [4]. El lector que quiera profundizar en más maneras de definir convergencias puede leer la sección 2.4 de [16].

Otra posible fuente para profundizar en los mollifiers es la sección 2.16 de [21], y los capítulos 4 de [3] y [4], el capítulo 3 de [22] o la sección 8.2 de [16].

La existencia de particiones de la unidad se puede consultar en el Lema IX.3 [3] o el Lema 9.3 de [4].

De la misma manera el lector más avanzado puede consultar [25] y en concreto las lecciones 2 y 3 o la sección 1.2.10-1.2.12 de [2]

Finalmente, el lector interesado también puede consultar el blog de Terence Tao donde aparecen sus apuntes de la asignatura 245A, 245B y 245C. Concretamente, se puede consultar <https://terrytao.wordpress.com/2009/01/09/245b-notes-3-lp-spaces/> para la definición y propiedades de los espacios L^p , <https://terrytao.wordpress.com/2009/03/30/245c-notes-1-interpolation-of-lp-spaces/> para la interpolación en espacios L^p (hasta el punto 2) y <https://terrytao.wordpress.com/2010/10/02/245a-notes-4-modes-of-convergence/> para diversas maneras de converger.

2.11 EJERCICIOS SUGERIDOS

Ejercicio 1. Calcula

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

y

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx$$

PISTA: Calcula

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Ejercicio 2. Demuestra que \mathcal{L}^1 es un espacio vectorial.

Ejercicio 3. Demuestra que L^1 es un espacio vectorial normado.

Ejercicio 4. Demuestra que L^2 es un espacio de Banach.

Ejercicio 5. Demuestra que

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$$

es un producto interno para L^2 .

Ejercicio 6. Demuestra la desigualdad de Minkowski

$$\left(\int_{\Omega} \left| \int_{\Omega} F(x, y) dx \right|^p dy \right)^{1/p} \leq \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |F(x, y)|^p dy \right)^{1/p} dx, \quad 1 \leq p < \infty$$

PISTA: Usando un argumento de densidad considera

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^N X(x) \mathbf{1}_{A_j}(y).$$

Ejercicio 7. Demuestra el teorema del término que falta en el lema de Fatou para el caso $p = 1$. Es decir, demuestra que si

$$\int_{\Omega} |f_n(x)| dx \leq C$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|f_n(x)| - |f_n(x) - f(x)| - |f(x)|) dx = 0.$$

donde f es el límite puntual de f_n .

Ejercicio 8. Demuestra que si tenemos una sucesión f_n tal que

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ en } L^2$$

y

$$\|f_n\|_{L^2} \rightarrow \|f\|_{L^2}$$

entonces

$$\|f - f_n\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

En el link <https://youtu.be/Cnh-D1D4kyQ> se puede ver un video de apoyo.

Ejercicio 9. Sea $1 \leq p < \infty$. Demuestra que si tenemos una sucesión f_n tal que

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ en casi todo } x$$

y

$$\|f_n\|_{L^p} \rightarrow \|f\|_{L^p}$$

entonces

$$\|f - f_n\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

Ejercicio 10. Construye una sucesión de funciones f_n tales que

$$\|f_n\|_{L^2} = C$$

pero que f_n no converjan en sentido L^2 a nada.

Ejercicio 11. Construye una función cut-off que sea 1 si $|x| < R$ y 0 si $|x| > S$ con $S > R$.

Ejercicio 12. Construye una función cut-off unidimensional que valga 1 en un intervalo arbitrario I y 0 fuera de un intervalo J . PISTA: Usa un mollifier.

Ejercicio 13. Demuestra que C_c^∞ es un subconjunto denso de L^p $1 \leq p < \infty$.

Ejercicio 14. Demuestra o da un contraejemplo de que C_c^∞ es un subconjunto denso de L^∞ .

Ejercicio 15. Estudia la convergencia débil de $f_k(x) = \cos(kx)$ en $L^2([-\pi, \pi])$. ¿Cuál es la norma $\|f_k\|_{L^2}$? ¿Converge fuerte la sucesión f_k ?

3 | SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER

Una de las principales herramientas del Análisis Matemático es el llamado análisis de Fourier, ya sea en forma de series de Fourier o de transformada de Fourier. Estas herramientas fueron descubiertas a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX y, si bien llevan el nombre de Fourier, Cauchy hizo los mismos desarrollos y, aún antes, los Bernoulli o el mismísimo Euler ya trabajaron con fórmulas similares cuando trataban de resolver ciertas EDPs lineales [8, 9, 10].

Veamos desde donde encaramos este nuevo capítulo del curso:

De dónde venimos: En el capítulo anterior hemos recordado los espacios de Lebesgue de funciones integrables L^p así como mejorado nuestro conocimiento de ellos y sus propiedades. Dichos espacios ya fueron introducidos en cursos anteriores de Teoría de la Medida, sin embargo, hemos avanzado en sus propiedades.

A dónde vamos: En este capítulo vamos a repasar las nociones de transformada y de serie de Fourier. Comenzaremos con un repaso de las series de Fourier a modo de calentamiento antes de pasar a la transformada de Fourier. Aunque dichos conceptos ya aparecieron en cursos anteriores, ahora vamos a profundizar más en ellos. De la misma manera vamos a repasar la noción de distribución o función generalizada y de derivada débil. Una vez visto esto estaremos en condiciones de estudiar espacios funcionales más sofisticados como es el caso de los espacios de Sobolev así como los operadores integrales singulares.

Los objetivos de este capítulo son

Objetivos mínimos	Objetivos avanzados
Conocer algunos teoremas básicos de la convergencia de las series de Fourier	Conocer las distribuciones y la clase de Schwartz
Conocer algunos teoremas básicos de la convergencia de la transformada de Fourier	Conocer las distribuciones temperadas
Conocer las principales propiedades de series y transformadas de Fourier	Estar familiarizado con la idea de derivada débil

3.1 LAS SERIES DE FOURIER

Como calentamiento vamos a comenzar estudiando las series de Fourier y su convergencia.

Esta teoría sirve también para funciones que tomen valores complejos.

Sea $L > 0$ un parámetro arbitrario. Consideramos el intervalo $[-L, L]$ y las funciones

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{\pi}{L}xk}.$$

En esta sección vamos a considerar funciones $2L$ -periódicas, es decir, funciones tales que

$$u(x) = u(x + 2L) \quad \forall x.$$

Queremos ver cómo construir y bajo qué condiciones vamos a tener un desarrollo de la forma

$$u(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_\ell \varphi_\ell(x).$$

Vamos a olvidarnos por el momento del caso de desarrollos en serie de funciones y a centrarnos en el caso, ya conocido, del álgebra lineal en \mathbb{R}^N . En dicho espacio (de dimensión finita N) tenemos combinaciones lineales de la forma

$$\vec{v} = \sum_{\ell=1}^N c_\ell \vec{\varphi}_\ell,$$

donde $\vec{\varphi}_\ell$ forman una base ortonormal del espacio. Usando que $\vec{\varphi}_\ell$ forman una base ortonormal y escribiendo $\vec{v} \cdot \vec{\varphi}_n$ para el producto escalar, obtenemos

$$\vec{v} \cdot \vec{\varphi}_n = c_n.$$

Por lo tanto,

$$\vec{v} = \sum_{\ell=1}^N (\vec{v} \cdot \vec{\varphi}_\ell) \vec{\varphi}_\ell,$$

Esta es la idea que queremos desarrollar en el caso de funciones. Lo primero es observar que, si $n \neq k$,

Muchas veces a lo largo de esta sección haremos uso de la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

$$\begin{aligned} \varphi_n \cdot \varphi_k &= \int_{-L}^L \varphi_n(x) \overline{\varphi_k(x)} dx \\ &= \int_{-L}^L \varphi_n(x) \varphi_{-k}(x) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i\frac{\pi}{L}xn} e^{-i\frac{\pi}{L}xk} dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i\frac{\pi}{L}x(n-k)} dx \\ &= \frac{1}{2L} \frac{1}{i\frac{\pi}{L}(n-k)} e^{i\frac{\pi}{L}x(n-k)} \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{2L} \frac{1}{i\frac{\pi}{L}(n-k)} \left(\cos\left(\frac{\pi}{L}x(n-k)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{L}x(n-k)\right) \right) \Big|_{-L}^L \\ &= 0, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\varphi_n \cdot \varphi_n &= \int_{-L}^L \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(x)} dx \\ &= \int_{-L}^L \varphi_n(x) \varphi_{-n}(x) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L 1 dx \\ &= 1.\end{aligned}$$

Así, las funciones $\varphi_k(x)$ son ortonormales (con respecto al producto interno que hemos definido)[7].

Por lo tanto, dada una función $u(x)$ podemos tratar de definir

$$\begin{aligned}\hat{u}_\ell &= \langle u, \varphi_\ell \rangle_{L^2} \\ &= \int_{-L}^L u(x) \overline{\varphi_\ell(x)} dx \\ &= \int_{-L}^L u(x) \varphi_{-\ell}(x) dx,\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}u(x) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_\ell \varphi_\ell(x) \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \langle u, \varphi_\ell \rangle_{L^2} \varphi_\ell(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) \varphi_\ell(x) \\ (11) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L} x \ell}.\end{aligned}$$

En un cierto sentido que especificaremos más adelante, podemos pensar que para calcular la serie de Fourier de una función lo que hacemos es realizar muchos tests o mediciones de qué hace esa función cuando la multiplicamos contra distintas exponenciales complejas e integramos. Siguiendo esta analogía se tiene que integrar contra las distintas exponenciales complejas, es decir, calcular los coeficientes de Fourier, sería, de alguna manera, realizar mediciones, de manera que si sabemos todas estas mediciones conocemos la función.

Hemos obtenido así una expresión de la función u como serie de exponenciales complejas. Sin embargo hay varias dudas razonables:

1. ¿cuándo converge la serie (11)? Cada vez que uno escribe una suma infinita tiene que preguntarse si dicha suma tiene, para empezar, sentido.
2. ¿qué funciones u se pueden desarrollar como serie de exponenciales complejas? Una manera de llegar a hacerse esta pregunta parte del hecho de que las funciones φ_n son regulares. Por lo tanto, una suma finita de ellas será igualmente regular. Así, uno podría pensar que (11)

sólo tendría sentido para funciones infinitamente regulares o, por el contrario, que el hecho de que la suma en (11) sea infinita estropea la regularidad de u .

3. ¿qué significado *preciso* tiene el signo $=$ en (11)? De otra manera, ¿es verdad que, para cualquier $x_0 \in [-L, L]$ se tiene

$$u(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L} x_0 \ell}?$$

Por supuesto, esta pregunta esta relacionada con la anterior.

Definimos la suma parcial

$$(12) \quad S_N u(x) = \sum_{\ell=-N}^N \hat{u}_\ell \varphi_\ell(x) = \sum_{\ell=-N}^N \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L} x \ell}.$$

Estamos interesados en ver cuándo y en qué sentido la suma parcial (12) converge.

Nuestra intención ahora es sumar la suma parcial (12) de manera que al final quede un operador integral de tipo convolución. Para eso tenemos el siguiente lema:

La función \mathcal{D}_N recibe el nombre de Núcleo de Dirichlet.

Lema 6. Tenemos que

$$(13) \quad S_N u(x) = \int_{-L}^L u(z) \mathcal{D}_N(x-z) dz,$$

con

$$\mathcal{D}_N(z) = \frac{1}{2L} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z}{2}\right)}.$$

Demostración. La prueba se basa en la fórmula de la suma parcial de la serie geométrica. Gracias a (12) tenemos que

$$\begin{aligned} S_N u(x) &= \sum_{\ell=-N}^N \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L} x \ell} \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) \sum_{\ell=-N}^N e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} e^{i\frac{\pi}{L} x \ell} dz \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) \sum_{\ell=-N}^N e^{i\frac{\pi}{L} (x-z) \ell} dz \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) \sum_{\ell=-N}^N \left(e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)} \right)^\ell dz \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \sum_{\ell=-N}^N e^{i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \left(e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)} \right)^\ell dz \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \sum_{\ell=-N}^N \left(e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)} \right)^{N+\ell} dz \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \sum_{n=0}^{2N} \left(e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)} \right)^n dz. \end{aligned}$$

Ahora usamos que

$$\sum_{j=0}^k r^j = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r},$$

para obtener

$$\mathcal{D}_N(x - z) = \frac{1}{2L} e^{-i\frac{\pi}{L}(x-z)N} \left(\frac{1 - e^{(2N+1)i\frac{\pi}{L}(x-z)}}{1 - e^{i\frac{\pi}{L}(x-z)}} \right).$$

Observamos que

$$\frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} = \frac{r^{-1/2}}{r^{-1/2}} \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} = \frac{r^{-1/2} - r^{k+1/2}}{r^{-1/2} - r^{1/2}}.$$

Por lo tanto, llegamos a que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_N(x - z) &= \frac{1}{2L} e^{-i\frac{\pi}{L}(x-z)N} \left(\frac{1 - e^{(2N+1)i\frac{\pi}{L}(x-z)}}{1 - e^{i\frac{\pi}{L}(x-z)}} \right) \\ &= \frac{1}{2L} \frac{e^{-(N+1/2)i\frac{\pi}{L}(x-z)} - e^{(N+1/2)i\frac{\pi}{L}(x-z)}}{e^{-i\frac{\pi}{L}(x-z)/2} - e^{i\frac{\pi}{L}(x-z)/2}} \\ &= \frac{1}{2L} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}(x-z)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{L}\frac{x-z}{2}\right)}. \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, para estudiar la convergencia de las series de Fourier basta con estudiar las propiedades del núcleo de Dirichlet. El siguiente lema recoge algunas propiedades básicas y, a la vez, útiles:

Lema 7. Se tiene que

$$(14) \quad \int_{-L}^L \mathcal{D}_N(z) dz = 1.$$

Como además $\mathcal{D}_N(z)$ es par, se tiene que

$$(15) \quad \int_0^L \mathcal{D}_N(z) dz = \int_{-L}^0 \mathcal{D}_N(z) dz = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Observamos que

$$\sum_{n=-N}^N e^{in\frac{\pi}{L}z} = 1 + \sum_{n=1}^N 2 \cos\left(n\frac{\pi}{L}z\right).$$

Entonces llegamos a que

$$\mathcal{D}_N(x) = \frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{L} \cos\left(n\frac{\pi}{L}z\right),$$

y se concluye el resultado. □

Ahora consideramos

$$I_N = \int_{-L}^L |u(x) - S_N u(x)|^2 dx.$$

La integral I_N aparece cuando uno considera la aproximación de una función u como suma finita de φ_ℓ de tal manera que se tenga menor error cuadrático medio. Es decir, es una especie de mínimos cuadrados.

Trivialmente se tiene

$$0 \leq I_N.$$

Observamos que

$$\|S_N u\|_{L^2}^2 = \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2,$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \overline{S_N u(x)} u(x) dx &= \int_{-L}^L \sum_{\ell=-N}^N \overline{\hat{u}_\ell \varphi_\ell(x)} u(x) dx \\ &= \sum_{\ell=-N}^N \overline{\hat{u}_\ell} \int_{-L}^L \overline{\varphi_\ell(x)} u(x) dx \\ &= \sum_{\ell=-N}^N \overline{\hat{u}_\ell} \hat{u}_\ell \\ &= \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2, \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^L S_N u(x) \overline{u(x)} dx = \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2.$$

Además, desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned} I_N &= \int_{-L}^L (u(x) - S_N u(x)) (\overline{u(x) - S_N u(x)}) dx \\ &= \int_{-L}^L |u(x)|^2 - \overline{S_N u(x)} u(x) - S_N u(x) \overline{u(x)} + |S_N u(x)|^2 dx \\ &= \int_{-L}^L |u(x)|^2 dx - 2 \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2 + \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2 \\ &= \|u\|_{L^2}^2 - \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando que $I_N \geq 0$ obtenemos

$$(16) \quad \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2 \leq \|u\|_{L^2}^2,$$

y, tomando el límite $N \rightarrow \infty$, concluimos la desigualdad de Bessel

$$(17) \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_\ell|^2 \leq \|u\|_{L^2}^2.$$

Esto responde a la primera pregunta: la serie no diverge y de converger no está del todo claro a qué (al menos en sentido de ser una función en el espacio L^2). El lema 6 nos permite escribir

$$\begin{aligned} u(x) - S_N u(x) &= u(x) - \int_{-L}^L u(z) \mathcal{D}_N(x-z) dz \\ &= u(x) + \int_{x+L}^{x-L} u(x-y) \mathcal{D}_N(y) dy \\ &= u(x) - \int_{-L}^L u(x-z) \mathcal{D}_N(z) dz, \end{aligned}$$

ya que para una función periódica

$$\int_{a-L}^{a+L} f(x) dx = \int_{-L}^L f(x) dx \quad \forall a \geq 0.$$

Usando ahora el lema 7, obtenemos que

$$u(x) = u(x) \int_{-L}^L \mathcal{D}_N(z) dz,$$

y entonces

$$(18) \quad u(x) - S_N u(x) = \int_{-L}^L (u(x) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz.$$

Por lo tanto, para probar la convergencia de las series de Fourier tenemos que estudiar las propiedades de la integral

$$\int_{-L}^L (u(x) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz.$$

El problema de la convergencia de las series de Fourier es un problema clásico que ha sido estudiado por multitud de matemáticos en la historia. Como cualquier tema de investigación candente no ha estado ausente de cierta polémica. Así durante el siglo XVIII y principios de XIX se creía que, dada una función continua cualquiera, la serie de Fourier de dicha función convergía puntualmente a dicha función. Es a finales del siglo XIX cuando du Bois-Reymond construye una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto. Finalmente, en 1966, Carleson [6] probó la convergencia puntual para *casi todo punto*.

Antes de comenzar con los teoremas de convergencia de series de Fourier, necesitamos un lema previo:

Lema 8 (Lema de Riemann-Lebesgue). Sea $f \in C^1([-L, L])$ una función periódica. Entonces se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(z) \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right) dz = 0.$$

El lema de Riemann-Lebesgue se puede probar con muchas menos hipótesis en la función f . Este lema debe compararse con el ejercicio 14 de la hoja 1.

Demostración. Vamos a integrar por partes. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-L}^L f(z) \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right) dz \\
 &= \int_{-L}^L f(z) \partial_z \left(\frac{-\cos \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right)}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}} \right) dz \\
 &= \int_{-L}^L \partial_z f(z) \frac{\cos \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right)}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}} dz \\
 &\quad + \left(\frac{-f(z) \cos \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right)}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}} \right) \Big|_{z=-L}^{z=L}.
 \end{aligned}$$

Usando la periodicidad llegamos a que

$$|I| \leq \left| \int_{-L}^L \partial_z f(z) \frac{\cos \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right)}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}} dz \right| \leq \frac{2L^2}{\pi \left(N + \frac{1}{2} \right)} \|f\|_{C^1}.$$

Por lo tanto, tomando el límite,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(z) \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right) dz = 0.$$

□

Antes de seguir debemos recordar la definición de convergencia uniforme:

Definición 3. Dadas una sucesión $u_n(x)$ y una función $u(x)$,

- u_n converge puntualmente a u si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \quad \forall x \in \Omega$$

- u_n converge uniformemente a u si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \Omega} |u_n(x) - u(x)| = 0.$$

Equipados con las nociones de convergencia de la definición 2 y la definición 3, la expresión de la diferencia entre u y la suma parcial de la serie de Fourier $S_N u$ (18) y el Lema de Riemann-Lebesgue 8 ya podemos enunciar los siguientes teoremas que estudian la convergencia de las series de Fourier.

Comencemos por los teoremas que aseguran convergencia puntual:

Teorema 16. Sea $u(x) \in C^2((-L, L))$ una función periódica. Entonces la serie de Fourier converge uniformemente a u . Es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N u - u\|_{C((-L, L))} = 0.$$

En particular, tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = u(x), \quad \forall x \in [-L, L].$$

Demostración. Tenemos que ver si

$$u(x) - S_N u(x)$$

converge a cero. Para eso tenemos que ver que

$$I_N = \int_{-L}^L (u(x) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz$$

converge a cero. Lo primero es observar que el núcleo de Dirichlet es una función par, por lo que

$$\int_{-L}^L \partial_x u(x) z \mathcal{D}_N(z) dz = 0.$$

Por lo tanto

$$I_N = \int_{-L}^L (u(x) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz - \int_{-L}^L \partial_x u(x) z \mathcal{D}_N(z) dz,$$

de donde

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{u(x) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right) dz \\ &\quad - \int_{-L}^L \frac{\partial_x u(x) z}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right) dz \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{u(x) - u(x-z) - \partial_x u(x) z}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right) dz. \end{aligned}$$

Definiendo

$$f^{(x)}(z) = \frac{u(x) - u(x-z) - \partial_x u(x) z}{2L \sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)}$$

observamos que basta con aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue a la integral anterior. Para ello es suficiente con comprobar que la función $f^{(x)}(z) \in C^1([-L, L])$ (como función de z y para cualquier x). Dadas las hipótesis sobre la función u eso es fácil (basta con aplicar el teorema de Taylor a u y notar que el seno del denominador solo se anula en $z = 0$). \square

El teorema anterior es fácil de probar, pero no es muy útil porque impone muchas hipótesis a la función u . Una versión más general es

Teorema 17 (Dirichlet). Sea $u(x)$ una función continua a trozos cuya derivada $u_x(x)$ también es continua a trozos. Entonces se verifica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = \frac{u(x+) + u(x-)}{2},$$

donde $x+$ y $x-$ denotan los límites laterales. Es decir, la serie de Fourier converge puntualmente a la media de los límites laterales.

Demostración. Vamos a hacer un argumento distinto al anterior (aunque el argumento anterior se puede *afinar* hasta cubrir también este caso. Ahora nos vamos a apoyar en la desigualdad de Bessel para funciones ortonormales ϕ_n generales para obtener el mismo resultado que nos daba el Lema de

Riemann-Lebesgue (Lema 8). Fijamos $x \in [-L, L]$. Usando las ideas anteriores y los lemas 6 y 7 tenemos que

$$\frac{u(x+) + u(x-)}{2} = u(x+) \int_{-L}^0 \mathcal{D}_N(z) dz + u(x-) \int_0^L \mathcal{D}_N(z) dz.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{u(x+) + u(x-)}{2} - S_N u(x) \\ &= \int_{-L}^0 (u(x+) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz \\ &\quad + \int_0^L (u(x-) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz \\ &= \int_0^L \frac{u(x-) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L} dz \\ &\quad + \int_{-L}^0 \frac{u(x+) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L} dz. \end{aligned}$$

Ahora observamos que

$$\phi_N(z) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L},$$

satisfacen

$$\int_0^L \phi_n(z) \phi_\ell(z) dz = \frac{1}{8L} \delta_\ell^n,$$

donde δ_ℓ^n es la Delta de Kronecker que vale 1 si $n = \ell$ y 0 si no. Por lo tanto, para concluir que

$$\int_{-L}^0 \frac{u(x+) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L} dz \rightarrow 0,$$

y

$$\int_0^L \frac{u(x-) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L} dz \rightarrow 0,$$

usando la desigualdad de Bessel basta con comprobar que las funciones

$$\frac{u(x-) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)}$$

y

$$\frac{u(x+) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)}$$

están en $L^2([0, L])$ y $L^2([0, -L])$, respectivamente. Como u es derivable a trozos con derivada continua a trozos se tiene que las funciones anteriores son continuas a trozos, por lo que pertenecen a los espacios L^2 mencionados anteriormente y podemos concluir el resultado. \square

Hay veces que la convergencia de las series de Fourier es puntual y no uniforme. Esto está relacionado con el conocido fenómeno de Gibbs.

Vamos a concluir con un teorema que, si bien no asegura convergencia puntual, se puede aplicar a muchas funciones:

Teorema 18. Sea $u(x) \in L^2([-L, L])$ una función periódica. Entonces la serie de Fourier converge en sentido L^2 a u . Es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N u - u\|_{L^2([-L, L])} = 0.$$

Además, en este caso la Desigualdad de Bessel es una igualdad:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_n|^2 = \|u\|_{L^2}^2.$$

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$. Por densidad podemos considerar u_ε una función C^2 (una versión regularizada usando mollifiers de una función simple con soporte compacto en $(-\pi, \pi)$ si se quiere) tal que

$$|u_\varepsilon(x)| \leq |u(x)|$$

y

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Entonces, usando la desigualdad de Bessel,

$$\begin{aligned} \|S_N u - u\|_{L^2} &= \|S_N u - S_N u_\varepsilon + S_N u_\varepsilon - u_\varepsilon + u_\varepsilon - u\|_{L^2} \\ &\leq \|S_N u - S_N u_\varepsilon\|_{L^2} + \|S_N u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^2} + \|u_\varepsilon - u\|_{L^2} \\ &\leq \|S_N(u - u_\varepsilon)\|_{L^2} + \|S_N u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^2} + \|u_\varepsilon - u\|_{L^2} \\ &\leq 2\|u - u_\varepsilon\|_{L^2} + \|S_N u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\leq 2\varepsilon + \|S_N u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Además se tiene que

$$S_N u_\varepsilon(x) \rightarrow u_\varepsilon(x) \text{ uniformemente}$$

por el teorema 16 y entonces

$$|S_N u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x)|^2 \rightarrow 0 \text{ uniformemente.}$$

Observamos que entonces, por construcción de la función u_ε y el teorema 16,

$$|S_N u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x)|^2 \leq 2|S_N u_\varepsilon(x)|^2 + 2|u_\varepsilon(x)|^2 \leq 4|u(x)|^2 + \varepsilon,$$

si $N \gg 1$. Es decir,

$$g(x) = 4u(x)^2 + \varepsilon,$$

es una función dominante. Aplicando el teorema de la convergencia dominada con

$$f_N(x) = |S_N u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x)|^2$$

concluimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |S_N u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x)|^2 dx = 0.$$

Dado que ε era arbitrario concluimos el resultado. \square

3.2 INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En las secciones anteriores habíamos visto que las funciones $2L$ -periódicas en el espacio $L^2([-L, L])$ se podían escribir usando (11):

$$u(x) = \frac{1}{2L} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L}x\ell}.$$

Ahora nos gustaría considerar períodos cada vez mayores. De hecho, nos gustaría considerar $L = \infty$ porque entonces no estamos imponiendo ningún requisito de periodicidad la función $u(x)$.

Definamos

$$\xi = \frac{\pi}{L}\ell.$$

Consecuentemente,

$$d\xi = \frac{\pi}{L}.$$

Así la fórmula anterior queda

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L}x\ell} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\xi z} dz \right) e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

No hay una única definición de la transformada de Fourier. Por ejemplo, otras definiciones son

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx,$$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i2\pi\xi x} dx,$$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\xi x} dx,$$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i2\pi\xi x} dx.$$

Si ahora hacemos $L \rightarrow \infty$ de manera que

$$d\xi \rightarrow 0,$$

la suma anterior es una suma de Riemann y el límite viene dado por la integral

$$(19) \quad u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(z) e^{-i\xi z} dz e^{i\xi x} d\xi.$$

Esta igualdad motiva las siguientes definiciones:

Definición 4. Definimos la transformada de Fourier de la función $u(x)$ como

$$(20) \quad \hat{u}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx,$$

para los valores de $\xi \in \mathbb{R}$ tales que la integral anterior exista.

Definición 5. Definimos la transformada de Fourier inversa de la función $v(\xi)$ como

$$(21) \quad \check{v}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Es decir, la transformada de Fourier de una función u , si existe, es otra función \hat{u} . Observamos entonces que la igualdad anterior (19) se reduce a

$$u = \check{\hat{u}}.$$

Por otro lado,

$$\check{v}(-x) = \hat{v}(x).$$

y entonces se tiene

$$\hat{u}(x) = u(-x).$$

Esta igualdad la hemos obtenido formalmente, es decir, sin ser del todo precisos en los argumentos. Es importante notar que no siempre se puede definir la transformada de Fourier (o la transformada de Fourier inversa) de una función (al menos en el sentido de ser una función clásica). Sin embargo, es suficiente que una función $f(x)$ sea L^1 para que exista $\hat{f}(\xi)$. Además se tiene que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \forall \xi.$$

Esto motiva estudiar las diferentes propiedades de la transformada de Fourier en términos de los espacios de Lebesgue.

3.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES ABSOLUTAMENTE INTEGRABLES

En la sección anterior hemos definido la transformada de Fourier en (20)

$$\hat{u}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Observamos que la transformada de Fourier es un operador integral

$$\hat{\cdot} : X \rightarrow Y,$$

donde X e Y son espacios de funciones. Por definición es obvio que este operador es lineal. Es decir que si u y v son dos funciones con transformadas de Fourier dadas por

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx \\ \hat{v}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-i\xi x} dx. \end{aligned}$$

Entonces si $w(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x)$ se tiene que

$$\hat{w}(\xi) = c_1 \hat{u}(\xi) + c_2 \hat{v}(\xi).$$

Así que podemos considerar $X = L^1$. Una de las preguntas es ver entonces quién es Y . Para ello tenemos que

Lema 9. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$. Además

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1},$$

y

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Demostración. Para ver que \hat{f} es continua tenemos que ver que la diferencia

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \left(e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x} \right) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} \left(e^{-ihx} - 1 \right) dx \right|, \end{aligned}$$

tiende a cero. Entonces bastaría con ver que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| |e^{-ihx} - 1| dx = 0.$$

Si definimos

$$f_h(x) = |u(x)| |e^{-ihx} - 1|,$$

observamos que

$$f_h(x) \rightarrow 0 \text{ para casi todo } x.$$

Además

$$|f_h(x)| \leq 2|u(x)|$$

por lo que

$$g(x) = 2|u(x)|$$

es una función dominante. Aplicando el teorema de la convergencia dominada concluimos el resultado deseado. La última parte del lema se conoce como Lema de Riemann-Lebesgue y ya la vimos para series de Fourier. Sin embargo vamos a hacer una prueba diferente. Para ello observamos que, dada $u \in L^1$ podemos conseguir $v \in C_c$ tal que

$$\|u - v\|_{L^1} \leq \varepsilon$$

donde ε es tan pequeño como se quiera. Entonces, usando que el soporte es compacto (y por lo tanto está contenido en el intervalo (a, b) para ciertos a y b)

$$\begin{aligned} \hat{v}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b v(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_a^{a+\pi/\xi} + \int_{a+\pi/\xi}^b \right) v(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_a^{b-\pi/\xi} + \int_{b-\pi/\xi}^b \right) v(x) e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

Además, si cambiamos variables $z = x - \pi/\xi$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a+\pi/\xi}^b v(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{b-\pi/\xi} v(z + \pi/\xi) e^{-i\xi(z+\pi/\xi)} dz.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\hat{v}(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_a^{a+\pi/\xi} + \int_{a+\pi/\xi}^b \right) v(x) e^{-i\xi x} dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_a^{b-\pi/\xi} + \int_{b-\pi/\xi}^b \right) v(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_a^{a+\pi/\xi} + \int_{b-\pi/\xi}^b \right) v(x) e^{-i\xi x} dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{b-\pi/\xi} v(x) e^{-i\xi x} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{b-\pi/\xi} v(x + \pi/\xi) e^{-i\xi x} dx.
\end{aligned}$$

Si ahora tomamos el límite en ξ observamos que las dos primeras integrales se anulan por anularse el integrando que es una función continua y por lo tanto acotada mientras que las dos últimas, en el límite en ξ , se cancelan una a la otra por la continuidad de la v . Entonces vemos que el resultado que queremos probar es cierto para las funciones $v \in C_c$. Sin embargo, se tiene que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq |\hat{u}(\xi) - \hat{v}(\xi)| + |\hat{v}(\xi)| \leq \|u - v\|_{L^1} + |\hat{v}(\xi)|$$

de donde se concluye que el Lema de Riemann-Lebesgue es cierto para toda función L^1 . \square

Así, hemos visto que si $f \in L^1$ entonces podemos definir su transformada de Fourier y dicha transformada de Fourier es una función continua. De hecho hasta decae en infinito gracias al Lema de Riemann-Lebesgue. Sin embargo, no podemos en principio iterar esta prueba para definir la transformada de Fourier inversa ya que, aunque $f \in L^1$, no podemos concluir que $\hat{f} \in L^1$. Es decir, *de momento* se puede definir la transformada de Fourier de funciones en L^1 pero aún no somos capaces de definir la transformada de Fourier inversa de estas funciones imagen de L^1 por este operador. Lo que si podemos hacer es probar una serie de propiedades útiles siempre que asumamos suficiente decaimiento en infinito.

Teorema 19. Sean u y v dos funciones con suficiente decaimiento en el infinito y regularidad tales que sus transformadas de Fourier vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx \\
\hat{v}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-i\xi x} dx.
\end{aligned}$$

Entonces

- Si $w(x) = \partial_x u(x)$ entonces

$$\hat{w}(\xi) = i\xi \hat{u}(\xi).$$

Más generalmente, si $w(x) = \partial_x^k u(x)$, entonces

$$\hat{w}(\xi) = (i\xi)^k \hat{u}(\xi).$$

- De la misma manera, si $w(x) = xu(x)$ entonces

$$\hat{w}(\xi) = i\hat{u}'(\xi).$$

En general, si $w(x) = x^k u(x)$, entonces

$$\hat{w}(\xi) = i^k \frac{d^k \hat{u}(\xi)}{d\xi^k}.$$

- Si $w(x) = u(x)v(x)$ entonces

$$\hat{w}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{u} * \hat{v}.$$

- Si $w(x) = u * v$ entonces

$$\hat{w}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi).$$

Demostración. Vamos a empezar por el primer punto. Por densidad vamos a asumir que u, v son funciones C_c^∞ . Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \hat{w}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x u(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \partial_x e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= i\xi \hat{u}(\xi). \end{aligned}$$

Para el segundo punto observamos que

$$\partial_\xi \hat{u}(\xi) = \partial_\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Tenemos que intercambiar la derivada y la integral. Este tipo de cálculo ya lo hemos realizado en este curso usando el teorema de Fubini, por lo que ahora vamos a usar otra idea. Observamos que

$$\begin{aligned} \partial_\xi \hat{u}(\xi) &= \partial_\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} \frac{e^{-ihx} - 1}{h} dx. \end{aligned}$$

Ahora llamamos

$$f_h(x) = u(x) e^{-i\xi x} \frac{e^{-ihx} - 1}{h}.$$

Observamos que

$$f_h(x) \rightarrow -ixu(x)e^{-i\xi x} \text{ en casi todo punto } x.$$

Además se tiene que

$$|f_h(x)| \leq |x||u(x)|,$$

por lo que

$$g(x) = |x||u(x)|$$

es una función dominante. Podemos entonces aplicar el teorema de la convergencia dominada y concluir que

$$\begin{aligned} \partial_{\xi} \hat{u}(\xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} \frac{e^{-ihx} - 1}{h} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} u(x) e^{-i\xi x} \frac{e^{-ihx} - 1}{h} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ixu(x) e^{-i\xi x} dx, \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. El tercer punto se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{w}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\mu) e^{i\mu x} d\mu \right) u(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\mu) u(x) e^{-i(\xi-\mu)x} d\mu dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\mu) u(x) e^{-i(\xi-\mu)x} dx d\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\mu) \hat{u}(\xi - \mu) d\mu, \end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema de Fubini para intercambiar las integrales. Nos queda el último apartado. Ahora observamos que

$$\begin{aligned} \hat{w}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)v(y) dy e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)v(y) e^{-i\xi(x-y)} e^{-i\xi y} dy dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x-y)v(y) e^{-i\xi(x-y)} e^{-i\xi y} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi)v(y) e^{-i\xi y} dy \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi), \end{aligned}$$

donde de nuevo hemos usado el teorema de Fubini. \square

Así vemos una característica importantísima de la transformada de Fourier: permite intercambiar derivadas por multiplicadores $i\xi$ y productos por convoluciones. Estas propiedades son muy útiles.

Queremos ver si podemos, dada una función L^1 arbitraria, primero calcular la transformada de Fourier y luego la transformada de Fourier inversa de dicha transformada de Fourier. Antes de afrontar la respuesta a esta pregunta

tenemos que realizar un cálculo que nos será útil. Concretamente tenemos que calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = e^{-ax^2}.$$

Se tiene que $f(x)$ satisface

$$\partial_x f(x) = -2axf(x).$$

Y entonces

$$\widehat{\partial_x f} + 2ax\widehat{f(x)} = 0.$$

Aplicando las propiedades anteriores,

$$i\xi\widehat{f}(\xi) + 2ai\partial_\xi\widehat{f}(\xi) = 0$$

Así obtenemos la EDO

$$\partial_\xi\widehat{f}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\widehat{f}(\xi).$$

Si la resolvemos llegamos a

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0)e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Además, se tiene que

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

por lo que

$$(22) \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Queremos estudiar si la transformada de Fourier es un operador invertible. Para dar sentido a la transformada inversa de Fourier de una función que ya es transformada de Fourier de otra tenemos el siguiente resultado:

Teorema 20 (Inversión de la transformada de Fourier). Sea $f \in L^1$ tal que $\widehat{f} \in L^1$. Entonces

$$\overline{\widehat{f}} = \check{f}(x)$$

donde $\overline{\widehat{f}} \in C$ y

$$f = \overline{\widehat{f}} \text{ en casi todo punto } x.$$

Demostración. Observamos que, por lo expuesto anteriormente en esta sección, el conjunto de funciones L^1 tales que su transformada de Fourier es L^1 no es vacío. Además $\widehat{f} \in C$ y $\check{f} \in C$ también. Observamos también que como el integrando en

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\xi z} dz e^{i\xi x} d\xi$$

no es L^1 , no podemos aplicar sin más el teorema de Fubini. Para solucionar este problema vamos a utilizar un argumento cercano a los mollifiers del capítulo anterior.

Consideramos la función

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi x - \frac{\varepsilon^2}{4\pi} |\xi|^2}.$$

Usando la transformada de Fourier calculada anteriormente con

$$\frac{1}{a} = \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \text{ y } \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}$$

se tiene que

$$\hat{\varphi}(y) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\pi \frac{|x-y|^2}{\varepsilon^2}}.$$

Entonces se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x - \frac{\varepsilon^2}{4\pi} |\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi = f * \psi_\varepsilon$$

y

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\pi \frac{|x|^2}{\varepsilon^2}}.$$

Dado que ψ es positiva, integra uno y es regular puede servirnos como mollifier y entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f * \psi_\varepsilon = f \text{ en } L^1.$$

Es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x - \varepsilon^2 \pi |\xi|^2} d\xi \rightarrow f \text{ en } L^1.$$

Al mismo tiempo, si definimos

$$u_\varepsilon(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{i\xi x - \varepsilon^2 \pi |\xi|^2}$$

tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \text{ en casi todo punto } x.$$

Al mismo tiempo

$$g(\xi) = |\hat{f}(\xi)|$$

es una función dominante, por lo que el teorema de la convergencia dominada nos asegura que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x - \frac{\varepsilon^2}{4\pi} |\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \check{f}(x).$$

□

3.4 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES DE CUADRADO INTEGRABLE

Comenzamos definiendo la clase de Schwartz

Definición 6. Se define

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ t.q. } \partial_x^j f \text{ decae más rápido que } |x|^n \forall j, n \in \mathbb{N}\}$$

Esta clase no es vacía porque se tiene

$$C_c^\infty \subset \mathcal{S}.$$

Además el contenido es estricto, es decir, no son clases idénticas ya que

$$f(x) = e^{-|x|^2} \notin C_c^\infty$$

y

$$f(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}.$$

Lema 10. El conjunto \mathcal{S} es denso en L^p $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Basta con recordar que C_c^∞ era denso en L^p y notar el contenido anteriormente mencionado. \square

Lema 11. Sea $f \in \mathcal{S}$, entonces $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

Demostración. Por la definición de la clase de Schwartz se tiene que

$$g(x) = x^n \partial_x^j f(x) \in L^1,$$

por lo que existe

$$\hat{g}(\xi).$$

Además, como n era arbitrario, $\hat{g} \in C^\infty$. De la misma manera

$$\xi^j \partial_x^n \hat{g} \in L^\infty.$$

Se tiene entonces que $\hat{g} \in \mathcal{S}$. \square

Equipados con estas herramientas podemos afrontar la demostración del teorema de Plancherel:

Teorema 21 (Plancherel). Sea $f \in L^2$ entonces se puede definir $\hat{f} \in L^2$ y además

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Demostración. Consideramos el conjunto

$$\mathfrak{L} = \{f \in L^1 \text{ t.q. } \hat{f} \in L^1\}.$$

Obviamente se tiene que

$$\mathcal{S} \subset \mathfrak{L},$$

por lo que el conjunto no es vacío. Si $\hat{f} \in L^1$ se tiene que $f \in L^\infty$ y entonces podemos aplicar la interpolación entre espacios de Lebesgue que vimos en el capítulo anterior para concluir

$$\mathcal{S} \subset \mathfrak{L} \subset L^2.$$

Además, de la densidad de \mathcal{S} se infiere la densidad de \mathfrak{L} .

Consideremos ahora $f, g \in \mathcal{L}$. Se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y)e^{iyx}dy\right)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{g}(y)}e^{-iyx}dydx.$$

Usando ahora el Teorema de Fubini (ya que todas las funciones son L^2 por la definición de \mathcal{L}), se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}dy,$$

de donde se infiere, sin más que tomar $g = f$, que

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Por el teorema de inversión se tiene que

$$\hat{\hat{\cdot}} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L},$$

podemos definir la transformada de Fourier para funciones de L^2 sin más que usar la densidad de \mathcal{L} . Para ello, dada una $f \in L^2$ tal que $f \notin \mathcal{L}$ consideramos $f_j \in \mathcal{L}$ tales que

$$f_j \rightarrow f \text{ en } L^2$$

Para cada f_j podemos definir \hat{f}_j . Entonces, dado que f_j es una sucesión de Cauchy en L^2 y L^2 es un espacio de Banach, se tiene

$$\|\hat{f}_j - \hat{f}_\ell\|_{L^2} = \|f_j - f_\ell\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Por la misma razón, \hat{f}_j también es una sucesión convergente a alguna función $g \in L^2$. Definimos $\hat{f} = g$. Para concluir que la definición es correcta observamos que la definición no depende de la sucesión f_j elegida. En efecto, dada otra sucesión h_j que tienda a f se tiene que

$$\|\hat{h}_j - g\|_{L^2} = \|\hat{h}_j - \hat{f}_j + \hat{f}_j - g\|_{L^2} \leq \|\hat{h}_j - \hat{f}_j\|_{L^2} + \|\hat{f}_j - g\|_{L^2}.$$

Entonces calculamos que

$$\|\hat{h}_j - \hat{f}_j\|_{L^2} = \|h_j - f_j\|_{L^2} \leq \|h_j - f\|_{L^2} + \|f - f_j\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

y podemos concluir que

$$\|\hat{h}_j - g\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

de donde g es única y nuestra definición de la transformada de Fourier en L^2 es consistente. \square

En el caso de funciones L^2 se tiene que la transformada de Fourier

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$$

es invertible.

Aunque nosotros no lo vamos a hacer, utilizando ideas un poco más complejas se puede extender la transformada de Fourier para funciones L^p con $1 \leq p < \infty$.

3.5 DISTRIBUCIONES

El término función ideal se usa para recalcar que si bien el comportamiento de estos objetos se asemeja al de las funciones de toda la vida (por ejemplo, se puede definir algún cierto sentido de integral), lo cierto es que no son funciones. El término distribución viene de que se pueden entender algunas de estas funciones ideales (por ejemplo la δ de Dirac) como distribuciones de masa.

Para motivar el concepto de las funciones *ideales* o distribuciones vamos a repasar el caso paradigmático de la δ de Dirac. La δ de Dirac es, casi seguro, la distribución más conocida y muy posiblemente cualquier estudiante de física o matemáticas haya oído hablar de ella con anterioridad.

Vaya por delante el aviso de que las distribuciones son objetos matemáticos *delicados*, por lo que su estudio en profundidad es complicado. Así que vamos a centrarnos en las principales ideas detrás de los conceptos estudiados.

Anteriormente hemos mencionado la idea de que una función L^p se puede pensar como el funcional

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

donde $g \in L^q$. Es decir, una función L^p , al no poderse asignar un valor numérico a todo punto es útil pensarla como un funcional

$$f : L^q \mapsto \mathbb{R}.$$

Esta idea es el punto de partida para el concepto de distribución.

Volvamos por un momento a la fórmula (19). Al menos formalmente se puede escribir que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\zeta(x-z)} d\zeta \right) dz.$$

Es decir, si definimos (de momento esta definición es formal) la δ de Dirac como

$$\delta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\zeta y} d\zeta,$$

observamos que la igualdad anterior en el caso $x = 0$, se reduce a

$$(23) \quad u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\zeta z} d\zeta \right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} u(z)\delta(z)dz.$$

Es decir, la δ de Dirac hace que *integrar sea evaluar*. Recordando que la integral de Riemann viene de una suma de Riemann y que la integral de Lebesgue la generaliza, se tiene que integrar es, en un cierto sentido, equivalente a promediar y sabemos que calcular medias (salvo casos triviales) nunca devuelve los valores originales exactos. Esto sugiere que como función *standard* la δ de Dirac no puede existir. Esto mismo lo podíamos haber intuído sin más que notar que la fórmula anterior se reduce a

$$\delta(y) = \widehat{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}(y),$$

y ya habíamos intuído que definir (*de manera standard*) la transformada de Fourier para funciones $L^\infty(\mathbb{R})$ no es posible en general. Sin embargo, siempre que podamos evaluar una función en un determinado punto podemos definir la δ de Dirac. Es decir, dada una función continua u , la acción de la δ de Dirac sobre esta función consiste en retornar su valor en $z = 0$. De manera aún más precisa tenemos la siguiente definición:

Definición 7. La δ de Dirac es un funcional

$$\delta : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cada función continua $u \in C(\mathbb{R})$ se tiene que

$$(\delta, u) \stackrel{\text{def}}{=} u(0).$$

La acción de este funcional sobre la función u se denota como

$$(\delta, u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(z)\delta(z)dz.$$

Podemos pensar que nos interesa saber cómo actúa la δ de Dirac sobre las funciones, más que definir una fórmula para ella. En este sentido *integrar* es, de alguna manera, el análogo de realizar diferentes mediciones. Así, vamos a usar la idea de ver qué hace una determinada distribución al actuar por medio de una integral sobre distintas funciones regulares como medio para conocer dicha distribución.

Vamos a ver que la δ de Dirac (y más generalmente otras distribuciones) se pueden definir como límites de funciones *clásicas*. Para dar la definición vía un límite mencionada anteriormente definimos la sucesión de funciones *salto*

$$g_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in [-1/n, 1/n]^c \\ \frac{n}{2} & \text{si } z \in [-1/n, 1/n] \end{cases}$$

Estas funciones intentan reflejar el efecto de un impulso cada vez mayor en una zona cada vez más localizada. Observamos que, para $u(z) \equiv 1$ se tiene que

$$1 = u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z)g_n(z)dz.$$

Es decir, al menos para ciertas funciones g_n cumple que integrar sea evaluar. Sin embargo, es fácil ver que eso no es ni mucho menos general. Veamos que, efectivamente, *la acción de estas g_n (por medio de una integral) nos permite definir la δ de Dirac de manera rigurosa*. Es decir, vamos a considerar los funcionales

$$\varphi_{g_n} : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varphi_{g_n}, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z)g_n(z)dz$$

y a estudiar su límite:

Lema 12. Sea g_n la familia definida anteriormente y sea $u \in C(\mathbb{R})$ una función dada. Entonces se tiene que

$$u(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{g_n}, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(z)g_n(z)dz.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} (\varphi_{g_n}, u) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(z)g_n(z)dz \\ &= \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} u(z)dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u\left(\frac{s}{n}\right) ds, \end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variables

$$s = nz.$$

Ahora podemos convencernos fácilmente de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{g_n}, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u\left(\frac{s}{n}\right) ds = \frac{u(0)}{2} \int_{-1}^1 1 ds = u(0).$$

□

Observamos que ya nos habían salido más veces antes expresiones muy cercanas o directamente equivalentes sin que lo notásemos. Por ejemplo, usando (13) para calcular la N -ésima suma parcial de la serie de Fourier de u obteníamos

$$S_N u(0) = \int_{-L}^L u(z) \mathcal{D}_N(-z) dz,$$

y nos preguntábamos cuándo la serie de Fourier convergía puntualmente, es decir, cuándo se tenía que

$$u(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L u(z) \mathcal{D}_N(-z) dz.$$

De momento hemos visto cómo definir (como límite de funciones *clásicas*) la δ de Dirac. Por supuesto, otras distribuciones se pueden definir de manera similar:

Definición 8. Una distribución φ es un elemento del espacio dual de C_c^∞ . Es decir, es un funcional lineal y continuo

$$\varphi : C_c^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

El espacio de las distribuciones se denota por \mathcal{D}^* (ya que a veces se escribe $\mathcal{D} = C_c^\infty$).

Al espacio de las distribuciones se le puede dar una topología, conocida como topología débil-*. Es decir, se puede dar una idea de convergencia. Concretamente en un espacio dual podemos definir la convergencia débil-*:

Definición 9. Sean X un espacio de Banach y X^* su dual. Se dice que $\varphi_n \in X^*$ converge débil-* a $\varphi \in X^*$

$$\varphi_n \xrightarrow{*} \varphi$$

si y solo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n, u) = (\varphi, u) \quad \forall u \in X.$$

Es decir, es la convergencia puntual de los funcionales.

Dado que las distribuciones son un espacio dual podemos usar la noción anterior para dar una noción de convergencia en \mathcal{D}^* .

Aunque las distribuciones son objetos muy singulares en general, se pueden aproximar por funciones regulares. Así se tiene el siguiente resultado

Teorema 22. Las funciones C_c^∞ son densas en \mathcal{D}^* en la topología débil-*.

Ahora podemos intentar extender los conceptos de convolución, transformada de Fourier y derivadas a las distribuciones.

Comencemos extendiendo la noción de derivada para poder dar sentido a *derivada* de una función irregular. Para ello vamos a usar el espacio de funciones test C_c^∞ . Queremos ahora usar la idea de que *integrar contra distintas ϕ es realizar mediciones*, de manera que si sabemos todas estas mediciones sabemos qué hace la función. Sea ahora $\phi(x) \in C_c^\infty$ y consideremos $u \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, integrando por partes, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x u(x) \phi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x) \partial_x \phi(x) dx.$$

Es decir, podemos ver cuál es la acción de $\partial_x u$ en ϕ sin más que ver cuál es la acción de u en $-\partial_x \phi$. Esto permite definir un concepto generalizado de derivada

Definición 10. La función v es la *derivada débil* de u si cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} v(x) \phi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x) \partial_x \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty.$$

El hecho de que la igualdad anterior se satisfaga para toda $\phi \in C_c^\infty$ es crucial porque representa el hecho de que v se comporta como la derivada de u (si es que dicha derivada existiese) para toda función ϕ que nos sirva de test. La igualdad anterior permite definir la *derivada débil* para funciones que sean solo integrables, si bien la derivada débil en principio puede ser una función generalizada.

De la misma manera que podemos calcular derivadas débiles de funciones (eso si, estas derivadas débiles pueden ser funciones idealizadas y no funciones en el sentido clásico), podemos calcular derivadas débiles de distribuciones.

Definición 11. Sea $\varphi \in \mathcal{D}^*$. Entonces

$$((\partial_x \varphi, f)) = - ((\varphi, \partial_x f))$$

Queremos ahora extender la idea de convolución a las distribuciones. Recordamos que, para funciones L^1 , se tiene que

$$\phi * f = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) f(x-y) dy.$$

Definimos el operador traslación

$$\tau_h f(y) = f(y-h),$$

y el operador $\tilde{\cdot}$

$$\tilde{f}(x) = f(-x)$$

Por lo tanto podemos definir

Definición 12. Sea $\varphi \in \mathcal{D}^*$. Entonces

$$\varphi * f = \left(\left(\varphi, \widetilde{\tau_x f} \right) \right)$$

De hecho, esta idea de medición de una función aparece también en el hecho de que a las funciones en el conjunto C_c^∞ se las conoce como funciones test.

De la misma manera que definimos \mathcal{D}^* como el dual de C_c^∞ , podemos definir las distribuciones temperadas como el dual de \mathcal{S} :

Definición 13. Una distribución temperada φ es un elemento del espacio dual de \mathcal{S} . Es decir, es un funcional lineal y continuo

$$\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

El espacio de las distribuciones temperadas se denota por \mathcal{S}^* .

Las distribuciones temperadas son muy importantes ya que permiten definir la transformada de Fourier. Para ello basta con usar el teorema de Fubini para obtener que si $f, g \in L^2$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Por lo tanto, usando que la transformada de Fourier de una función de la clase de Schwartz es otra función de la clase de Schwartz (Lema 11) podemos definir

Definición 14. Sea $\varphi \in \mathcal{S}^*$. Entonces

$$\hat{\varphi} * f = \left((\varphi, \hat{f}) \right).$$

3.6 CONCLUSIONES

En este capítulo hemos visto que toda función $2L$ -periódica en $L^2([-L, L])$ se puede desarrollar como serie de Fourier en términos de exponenciales complejas. Además, cuando la función (además de ser $L^2([-L, L])$) es C^1 a trozos se tiene que la serie de Fourier en términos de exponenciales complejas converge puntualmente al valor medio de los límites laterales de la función mientras que si la función es $C^2([-L, L])$ la serie de Fourier en términos de exponenciales complejas converge uniformemente (es decir, en $C^0([-L, L])$) a la función. También hemos visto la convergencia en norma L^2 de las series de Fourier.

En este capítulo también hemos definido la transformada de Fourier para funciones L^1 y L^2 . Esta transformada es básica en multitud de aplicaciones pero también en matemáticas más abstractas. Igualmente definimos la transformada inversa de Fourier y vimos propiedades de ambas, entre ellas las más importantes para nosotros en este curso:

1. Derivadas en multiplicadores:

$$\widehat{\partial_x^k u}(\xi) = (i\xi)^k \hat{u}(\xi).$$

Esto se probaba sin más que integrar por partes. Y viceversa, *i.e.*

$$\widehat{x^k u}(\xi) = i^k \frac{d^k \hat{u}(\xi)}{d\xi^k},$$

y la prueba de este hecho se obtenía sin más que derivar la expresión integral.

2. Productos en convoluciones:

$$\widehat{uv}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{u} * \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\eta) \hat{v}(\xi - \eta) d\eta,$$

Y viceversa, *i.e.*

$$\widehat{u * v}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi).$$

3. Teorema de Parseval/Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{v(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

Finalmente, introdujimos las distribuciones (también conocidas como funciones ideales) y la noción de derivada débil. Algunas propiedades de la derivada débil son

1. si una función es derivable en sentido clásico, entonces la derivada débil coincide con la derivada clásica. Es decir, la derivada débil generaliza la derivada clásica;
2. hay funciones que no son derivables que tienen otra función como derivada débil (p.e. $|x|$);
3. podemos definir la derivada débil de una función ideal. La consecuencia es que podemos definir derivadas de objetos muy singulares.

También hemos definido las distribuciones temperadas y extendido las ideas de convolución y transformada de Fourier a las distribuciones y las distribuciones temperadas.

3.7 OTRAS FUENTES

El lector interesado en profundizar más puede consultar [2, 5, 7, 13, 16, 21, 25]. Concretamente, los resultados de la convergencia de las series de Fourier se pueden hallar (en versiones mucho más generales que las dadas en estas notas) en los teoremas 1.1 y 1.2 de [13] o en la sección 8.5 de [16]. De la misma manera, el lema de Riemann-Lebesgue (de nuevo en su versión más general) se puede encontrar en el lema 1.4 de [13], en 4.27 de [5] o en el teorema 8.22 de [16].

Se puede leer sobre la transformada de Fourier de funciones absolutamente integrables con mayor detalle en las secciones 8.3 de [16], en la 5.1 de [21] o en sección 6 del capítulo 1 de [13]. En particular, el teorema de inversión se puede ver en 8.26 de [16] y en el teorema 1.13 de [13].

Resultados importantes sobre la clase de Schwartz aparecen en 8.2, 8.3, 8.11, 8.17, 8.23, 8.28 de [16] o en la sección 7 del capítulo 1 de [13]. La construcción de la transformada de Fourier para funciones L^2 aparece en el teorema 8.29 de [16], en 5.3, 5.4 y 5.5 de [21] o en la sección 8 del capítulo 1 de [13]. El lector interesado en cómo extender estas ideas para otros espacios L^p puede consultar 5.6 de [21] o 8.30 de [16].

El lector interesado en profundizar en las distribuciones puede consultar el clásico libro [7] o el capítulo 9 de [16]. También puede ver la definición 1.16 de [13]. En concreto, el teorema 22 se corresponde con el teorema 9.5 de [16]. De la misma manera el lector más avanzado puede consultar las lecciones 4 y 15 de [25] y la sección 1.3 de [2].

Finalmente, el lector interesado también puede consultar el blog de Terence Tao donde aparecen sus apuntes de la asignatura 245C. Concretamente, se puede consultar <https://terrytao.wordpress.com/2009/04/06/the-fourier-transform/> para la definición y propiedades de la transformada de Fourier y las funciones de la clase de Schwartz, <https://terrytao.wordpress.com/2009/04/19/245c-notes-3-distributions/> para unas breves notas sobre distribuciones.

3.8 EJERCICIOS SUGERIDOS

Ejercicio 16. Utiliza un argumento de densidad para probar el Lema de Riemann-Lebesgue para $f \in L^1$.

Ejercicio 17. Utiliza el ejercicio anterior para obtener una versión más general del Teorema 16 de los apuntes.

Ejercicio 18. Da una prueba diferente del teorema 18 de los apuntes usando el Lema de Brezis-Lieb (el lema del término que falta en el lema de Fatou).

Ejercicio 19. Sea $1 < p < \infty$. Demuestra que si

$$\|S_N u\|_{L^p} \leq C(p) \|u\|_{L^p}$$

entonces

$$\|S_N u - u\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

Ejercicio 20. Demuestra que si $f, \varphi \in L^1$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

Ejercicio 21. Demuestra que si $f, g \in \mathcal{S}$ se tiene que $f * g \in \mathcal{S}$.

Ejercicio 22. Demuestra que si $f, g \in L^2$ se tiene que

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$$

Ejercicio 23. Sea $f \in L^1$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = a.$$

Demuestra que

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f(x/\varepsilon)$$

converge en D^* a $a\delta$.

Ejercicio 24 (La derivada débil coincide con la clásica si ésta existe). Calcula la derivada débil de $u(x) = x$.

Ejercicio 25 (La derivada débil de funciones no derivables). Calcula la derivada débil de $u(x) = |x|$.

Ejercicio 26 (Derivada débil de funciones discontinuas). Calcula la segunda derivada débil de $u(x) = |x|$.

Ejercicio 27 (Derivada débil de funciones no acotadas). Calcula la derivada débil de $u(x) = \log(|x|)$.

Ejercicio 28 (Derivada débil de la δ). Calcula la derivada débil de $\delta(x)$.

Ejercicio 29 (Derivada débil de de funciones no integrables). Calcula la derivada débil de $u(x) = 1/|x|$.

4 | ESPACIOS DE SOBOLEV

En el primer capítulo comenzamos viendo los espacios de Lebesgue L^p . De manera intuitiva estos espacios medían orden de decaimiento en el infinito y orden de las posibles singularidades. Sin embargo, son incapaces de medir la *regularidad* de la función más allá de eso. Para medir la regularidad se han desarrollado multitud de diferentes espacios funcionales. Nosotros vamos a presentar aquí los espacios de Sobolev, que son posiblemente los más usados en Análisis.

Decimos intuitivamente porque una función L^p no tiene por qué tener límite en el infinito.

Veamos desde donde encaramos este nuevo capítulo del curso:

De dónde venimos: En capítulos anteriores hemos recordado los espacios de Lebesgue de funciones integrables L^p además de sus propiedades. Estos espacios resultan insuficientes para medir la regularidad de una función entendida ésta como el número de derivadas.

A dónde vamos: En este capítulo vamos a presentar una escala de espacios de funciones diseñados para medir el número de derivadas así como la integrabilidad de las mismas.

Los objetivos de este capítulo son

Objetivos mínimos	Objetivos avanzados
Conocer los espacios de Sobolev H^s así como sus propiedades	Conocer el teorema de compacidad de Rellich
Conocer las principales desigualdades para funciones L^p y H^s	Familiarizarse con el operador de Dirichlet-Neumann y otras integrales singulares

4.1 MOTIVACIÓN Y DEFINICIÓN

En el capítulo anterior habíamos definido la derivada débil como

Definición 15. La función v es la *derivada débil* de u si cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\phi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x)\partial_x\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty.$$

Habíamos visto que, dada una función, la derivada débil puede ser o bien una función o bien una distribución. Vamos a asumir por el momento que $u \in L^2$ es tal que su derivada débil $v \in L^2$ también. Esto por supuesto no tiene por qué pasar en general.

También habíamos visto que, dadas dos funciones en L^2 se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}dy.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\phi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x)\partial_x\phi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)\overline{\widehat{\partial_x\phi}(\xi)}dy.$$

Usando las propiedades vistas en el capítulo anterior para las derivadas se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\phi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x)\partial_x\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} i\xi\hat{u}(\xi)\overline{\widehat{\phi}(\xi)}dy,$$

de donde inferimos que la derivada débil admite la misma representación en términos de la transformada de Fourier

$$\hat{v} = i\xi\hat{u}.$$

Por lo tanto, si bien estaba claro desde el capítulo anterior que podíamos medir el número de derivadas *clásicas* en términos del decaimiento de la transformada de Fourier, lo cierto es que podemos medir el número de derivadas *débiles* de una función en términos del decaimiento de su transformada de Fourier.

La discusión anterior motiva la siguiente definición

$$(24) \quad H^1(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|\partial_x u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty \right\},$$

o, lo que es lo mismo,

$$(25) \quad H^1(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

La definición anterior puede generalizarse a mayor número de derivadas y a un número arbitrario de dimensiones sin más que cambiar los parámetros

$$(26) \quad H^k(\mathbb{R}^d) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^{2k})|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

De esta manera podemos medir cuántas derivadas débiles tiene una función sin más que chequear si está en determinado espacio de Sobolev. Por supuesto, podríamos intentar la misma idea en términos de los espacios L^p . Es decir, podríamos definir los espacios de Sobolev más generales

$$(27) \quad W^{1,p}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}, \|\partial_x u\|_{L^p(\mathbb{R})} < \infty \right\}.$$

Observamos que $W^{1,2} = H^1$ sin más que usar las propiedades de la transformada de Fourier. En este curso hemos elegido presentar solo el caso $p = 2$ porque tiene una vinculación directa y simple con la transformada de Fourier ya estudiada pero también porque es posiblemente el espacio más utilizado dentro de los espacios de Sobolev $W^{1,p}$.

4.2 PROPIEDADES BÁSICAS

Vamos a considerar de momento el espacio $H^1(\mathbb{R})$. Este espacio podemos dotarlo del producto interno

$$\langle f, g \rangle_{H^1} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) + \partial_x f(x)\partial_x g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) + |\xi|^2\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi,$$

y de la norma

$$\|f\|_{H^1} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle f, f \rangle_{H^1}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 + |\partial_x f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Con esta norma se tiene el siguiente resultado

Teorema 23. $H^1(\mathbb{R})$ con la norma anterior es un espacio de Hilbert, es decir, un espacio vectorial normado completo cuya norma viene dada por un producto escalar.

Demostración. La prueba de que $\langle f, g \rangle_{H^1}$ es un producto escalar se deja como ejercicio para el lector. El resultado podemos probarlo usando que estamos en un subconjunto de L^2 . Si f_n es una sucesión de Cauchy en H^1 entonces se tiene que f_n y $\partial_x f_n$ son sucesiones de Cauchy en L^2 . Por lo tanto son convergentes. Digamos que tienen límite f y g . Bastaría ahora con probar que

$$g = \partial_x f.$$

Para ver esto observamos que la convergencia fuerte en L^2 implica la convergencia débil en L^2 y como consecuencia se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x f_n(x) h(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(x) h(x) dx \quad \forall h \in L^2.$$

De la misma manera se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) h(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) h(x) dx \quad \forall h \in L^2.$$

Como $C_c^\infty \subset L^2$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x f_n(x) \phi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty$$

y

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \phi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty.$$

Integrando por partes se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x f_n(x) \phi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \partial_x \phi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty.$$

Observamos ahora que

$$\partial_x \phi \in C_c^\infty$$

y por lo tanto podemos elegirla como función test ϕ . Llegamos entonces a que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \partial_x \phi(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \partial_x \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty,$$

y a que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \partial_x \phi(x) dx \rightarrow - \int_{\mathbb{R}} g(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty.$$

De la unicidad del límite se obtiene entonces que

$$- \int_{\mathbb{R}} g(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \partial_x \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_c^\infty,$$

y se concluye que g es la derivada débil de f :

$$g = \partial_x f.$$

Como consecuencia se obtiene que toda sucesión de Cauchy en H^1 es convergente en H^1 . \square

En cuanto que H^1 es un subconjunto de L^2 no resulta sorprendente que tengamos resultados de densidad similares

Teorema 24. La clase de Schwartz \mathcal{S} es densa en $H^1(\mathbb{R})$.

Demostración. Dada $f \in H^1(\mathbb{R})$ tenemos que

$$(1 + |\xi|^2)^{1/2} |\hat{f}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R})$$

por la definición de H^1 . Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $0 < R < \infty$ tal que

$$\int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \varepsilon.$$

Por lo tanto, por los resultados de densidad vistos en el Capítulo 1 para los espacios de Lebesgue, tenemos que existe $\hat{g} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\|\hat{f} - \hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{\varepsilon}{1 + R^2}.$$

Además, usando que

$$\int_{|\xi| > R} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \varepsilon$$

podemos asumir que g es tal que

$$\hat{g}(\xi) = 0 \text{ para } |\xi| > R.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \left(\int_{|\xi| < R} + \int_{|\xi| > R} \right) (1 + |\xi|^2) |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| < R} (1 + |\xi|^2) |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > R} (1 + |\xi|^2) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Basta ahora tomar ε suficientemente pequeño para conseguir

$$\|f - g\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 < \delta.$$

Por otro lado, como \hat{g} tiene soporte compacto y es C^∞ se tiene que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. \square

Usando este resultado es fácil conseguir probar otros resultados de densidad como el siguiente.

Teorema 25. Las funciones test $C_c^\infty(\mathbb{R})$ son un conjunto denso en $H^1(\mathbb{R})$.

Los mismos resultados se obtienen para los espacios más generales $H^k(\mathbb{R}^d)$ donde el producto escalar viene entonces dado por

$$\langle f, g \rangle_{H^k} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) + |\xi|^{2k} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Observamos que para $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ se tiene el siguiente cálculo

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x f(x)|^2 dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \partial_x^2 f(x) dx \leq \|f\|_{L^2} \|\partial_x^2 f\|_{L^2},$$

es decir, si una función está en H^2 automáticamente está en H^1 y se verifica la siguiente desigualdad de interpolación

$$\|f\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|f\|_{H^2}.$$

Esto motiva el siguiente resultado, parecido a los resultados de interpolación en espacios de Lebesgue:

Teorema 26 (Interpolación). Sea f una función tal que $f \in H^p(\mathbb{R})$ y $f \in H^q(\mathbb{R})$. Entonces $f \in H^r(\mathbb{R})$ para todo $r \in [p, q]$. Además

$$(28) \quad \|f\|_{H^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{R})}^\theta \|f\|_{H^q(\mathbb{R})}^{1-\theta},$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ se define como

$$r = \theta p + (1 - \theta)q$$

Demostración. Vamos a considerar el caso $n = 0$ por simplicidad. Usando las propiedades de la transformada de Fourier se tiene que si definimos

$$I_s = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

podemos estimar

$$\begin{aligned} I_r &= \int_{|\xi| < R} |\xi|^{2r} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > R} |\xi|^{2r} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq R^{2r} \|f\|_{L^2}^2 + \int_{|\xi| > R} \frac{|\xi|^{2m}}{R^{2(m-r)}} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq R^{2r} \|f\|_{L^2}^2 + \frac{I_m}{R^{2(m-r)}}. \end{aligned}$$

Observamos entonces que, dado que R era arbitrario en el cálculo anterior, podemos tomarlo

$$R = \left(\frac{I_m}{\|f\|_{L^2}^2} \right)^{1/2m}$$

y por lo tanto llegamos a

$$I_r \leq C \|f\|_{L^2}^{2(1-r/m)} I_m^{r/m}.$$

Usando que

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^r}^2 &= \|f\|_{L^2}^2 + I_r, \\ I_m &\leq \|f\|_{H^m}^2, \end{aligned}$$

y

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^m},$$

obtenemos que

$$\|f\|_{H^r}^2 = C \|f\|_{L^2}^{2(1-r/m)} \|f\|_{H^m}^{r/m},$$

que era lo que queríamos demostrar. \square

El resultado anterior demuestra que los espacios H^s están unos contenidos en otros en función del tamaño del índice s .

4.3 ESPACIOS DE ÍNDICE NO ENTERO E INTEGRALES SINGULARES

De hecho, el lector atento observara que no hay nada que nos impida definir hasta espacios de índice no entero

(29)

$$H^s(\mathbb{R}^d) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^{2s}) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

donde ahora $s \in \mathbb{R}^+$. Vamos a tratar en más detalle el caso $0 < s < 1$. Vamos a asumir que u es una función en la clase de Schwartz \mathcal{S} . La idea ahora es intentar pasar de la definición usando la transformada de Fourier a una definición nueva que sólo involucre la función u en el espacio físico (en vez de \hat{u}). Como sabemos, la derivada clásica es el límite del cociente incremental por lo que esperamos expresiones similares en este caso. Por ello definimos

$$\mathcal{J} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx.$$

Ahora, usando las propiedades de la transformada de Fourier, calculamos

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+y) - u(y)|^2}{|x|^{1+2s}} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{i\xi \cdot x} - 1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2}{|x|^{1+2s}} d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{|\xi|^{2s}} \int_{\mathbb{R}} \frac{4 \sin^2\left(\frac{\xi \cdot x}{2}\right)}{|x|^{1+2s}} dx \right) |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Ahora observamos que

$$I(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{2s}} \int_{\mathbb{R}} \frac{4 \sin^2\left(\frac{\xi \cdot x}{2}\right)}{|x|^{1+2s}} dx$$

en realidad es una constante. Si cambiamos variables

$$I(\lambda\xi) = \frac{1}{|\lambda\xi|^{2s}} \int_{\mathbb{R}} \frac{4 \sin^2\left(\frac{\xi \cdot \lambda x}{2}\right)}{|\lambda x|^{1+2s}} dx = I(\xi).$$

Por lo tanto basta con considerar ξ tal que $|\xi| = 1$ y

$$I(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{4 \sin^2 \left(\frac{\xi \cdot x}{2} \right)}{|x|^{1+2s}} dx.$$

Usando la simetría de la expresión anterior vemos que $I(\xi) = I(1)$. Concluimos entonces que

$$\mathcal{J} = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{4 \sin^2 \left(\frac{x_1}{2} \right)}{|x|^{1+2s}} dx \right) \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

De manera equivalente se tiene que

$$C\mathcal{J} = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

con

$$C = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{4 \sin^2 \left(\frac{x_1}{2} \right)}{|x|^{1+2s}} dx \right)^{-1}.$$

Por las propiedades de la transformada de Fourier se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{u}(\xi)} d\xi = \langle \widehat{\Lambda^{2s}u}, \hat{u} \rangle_{L^2},$$

donde

$$\widehat{\Lambda^{2s}u}(\xi) = |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi).$$

Observamos ahora que entonces podemos expresar

$$\widehat{\Lambda^{2s}u}(\xi)$$

en términos de u en el espacio físico. En particular

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \Lambda^{2s} u u dx = \langle \Lambda^{2s}u, u \rangle_{L^2}.$$

Usando el cambio $y = x$, $x = y$, podemos calcular lo siguiente

$$\begin{aligned} 2C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+2s}} u(x) dy dx &= -2C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+2s}} u(y) dy dx \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+2s}} u(x) dy dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+2s}} u(y) dy dx \right) \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{1+2s}} dy dx \\ &= C\mathcal{J} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \langle \widehat{\Lambda^{2s}u}, \hat{u} \rangle_{L^2} \\ &= \langle \Lambda^{2s}u, u \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \Lambda^\alpha u(x) u(x) dx = 2C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+\alpha}} dy u(x) dx,$$

y

$$\Lambda^\alpha u(x) = 2C \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+\alpha}} dy.$$

Nos han aparecido unos nuevos operadores integrales singulares Λ^α que son en realidad operadores diferenciales.

Si bien estos operadores han surgido en el estudio de los espacios de Sobolev de índice fraccionario H^s aparecen en muchas más situaciones. Por ejemplo, podemos considerar la siguiente ecuación diferencial

Ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{en } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \\ u &= g && \text{en } \{y = 0\} \end{aligned}$$

Esta ecuación en derivadas parciales se puede resolver explícitamente. Para ello basta con tomar la transformada de Fourier en la variable x para obtener que la EDP anterior es equivalente a la siguiente familia de EDOs

$$\begin{aligned} |\xi|^2 \hat{u}(\xi, y) - \frac{\partial^2 \hat{u}(\xi, y)}{\partial y^2} &= 0 && \text{en } (\xi, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{g} \end{aligned}$$

Estas EDOs se pueden resolver y, si imponemos que

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0,$$

llegamos a

$$\hat{u}(\xi, y) = e^{y|\xi|} \hat{g}(\xi).$$

Definimos el operador, llamado operador de Dirichlet-Neumann,

$$\text{DtN} : g \rightarrow \nabla u \cdot e_2 \Big|_{\{y=0\}}.$$

Es decir, el operador que, dado el dato de borde de tipo Dirichlet g devuelve el dato de borde de tipo Neumann

$$\nabla u \cdot e_2 \Big|_{\{y=0\}}.$$

Entonces es un cálculo sencillo observar que

$$\widehat{\text{DtN}g} = |\xi| \hat{g}.$$

Es decir,

$$\text{DtN}g = \Lambda g.$$

Recordemos que $[s]$ denota la parte entera de s . Aunque su estudio excede el contenido del presente texto, es conveniente notar que usando ideas similares se pueden definir los espacios fraccionarios de Sobolev-Slobodeckij basados en L^p

$$W^{s,p} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}), \partial_x^{[s]} u \in L^p(\mathbb{R}), \frac{|\partial_x^{[s]} u(x) - \partial_x^{[s]} u(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{p} + (s - [s])}} \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \right\},$$

con norma

$$\|u\|_{W^{s,p}}^p \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_{L^p}^p + \|u\|_{\dot{W}^{s,p}}^p,$$

donde

$$\|u\|_{\dot{W}^{s,p}}^p = \|\partial_x^{[s]} u\|_{L^p}^p + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\partial_x^{[s]} u(x) - \partial_x^{[s]} u(y)|^p}{|x - y|^{1 + (s - [s])p}} dx dy.$$

4.4 LA DESIGUALDAD DE SOBOLEV

El teorema fundamental del cálculo establece que, si la derivada en sentido clásico $\partial_x f$ es continua,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x \partial_x f(s) ds.$$

Este resultado, además de ser útil para calcular de manera exacta integrales y para establecer una relación entre funciones primitivas y áreas bajo la curva, se puede entender como un enunciado que establece una cierta equivalencia entre la integrabilidad de ciertas funciones y su control puntual. En efecto, desde este punto de vista, el teorema fundamental del cálculo dice que si una cierta función es integrable, su antiderivada es continua.

La primera pregunta que nos hacemos es si el teorema fundamental del cálculo tiene sentido para derivadas débiles que sean funciones L^2 . Es decir, si dada $f \in H^1(\mathbb{R})$, existe $\tilde{f} \in C(\mathbb{R})$ tal que

$$\tilde{f} = f \text{ en casi todo punto,}$$

y

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a) = \int_a^x \partial_x f(s) ds.$$

Para comprobarlo definimos

$$F(x) = \int_a^x \partial_x f(s) ds.$$

Además podemos calcular la derivada débil de F de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_a^x \partial_x f(s) ds \varphi'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^a \int_a^x \partial_x f(s) ds \varphi'(x) dx + \int_a^{\infty} \int_a^x \partial_x f(s) ds \varphi'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^a \int_x^a \partial_x f(s) ds \varphi'(x) dx + \int_a^{\infty} \int_a^x \partial_x f(s) ds \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular estas integrales en el plano usando el teorema de Fubini y obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} F(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x f(x) \varphi(x) dx.$$

Por otro lado, de que $\partial_x f$ sea la derivada débil de f se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \partial_x f(x) \varphi(x) dx,$$

y entonces se concluye, sin más que igualar ambas expresiones, que

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x) - f(x)) \varphi'(x) dx = 0,$$

de donde inferimos que la diferencia debe ser una constante en casi todo punto

$$F(x) - f(x) = -C \text{ en casi todo punto.}$$

Definimos entonces

$$\tilde{f}(x) = F(x) + C$$

y se tiene que

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ en casi todo punto.}$$

Falta ver ahora que \tilde{f} es en efecto continua. Usando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)| &= \left| \int_x^{x+h} \partial_x f(s) ds \right| \\ &\leq \int_x^{x+h} |\partial_x f(s)| ds \\ &\leq \left(\int_x^{x+h} |\partial_x f(s)|^2 ds \right)^{1/2} \sqrt{h} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_x f(s)|^2 ds \right)^{1/2} \sqrt{h} \end{aligned}$$

y por lo tanto \tilde{f} es una función continua.

Podemos entonces preguntarnos también si este tipo de resultados de intercambio entre integrabilidad de derivadas y control de la función se puede generalizar al marco de las funciones L^p y H^k . En particular tenemos el siguiente resultado

Teorema 27 (Desigualdad de Sobolev). Sea $\varepsilon > 0$. Entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C_\varepsilon \|f\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})}.$$

para toda $f \in H^{1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$. En particular se tiene que

$$H^{1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}).$$

Demostración. La desigualdad

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

es una consecuencia de las propiedades de la transformada de Fourier que ya hemos visto en el capítulo anterior. Vamos a centrarnos en la segunda parte de la cadena de desigualdades. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{|\xi|<1} |\hat{f}(\xi)| d\xi + \int_{|\xi|>1} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{|\xi|<1} |\hat{f}(\xi)| d\xi + \int_{|\xi|>1} |\hat{f}(\xi)| |\xi|^{1/2+\varepsilon/2} |\xi|^{-1/2-\varepsilon/2} d\xi \\ &\leq \sqrt{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi|^{1+\varepsilon} d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{|\xi|>1} |\xi|^{-1-\varepsilon} d\xi \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Hölder. Ahora basta con usar la definición de los espacios de Sobolev y las propiedades de la transformada de Fourier para concluir el resultado. \square

En general se tiene que determinada integrabilidad de la derivada débil de cierto orden de una función se puede utilizar para conseguir demostrar que la función original estaba en un espacio L^p superior. Así se tiene la siguiente desigualdad de Sobolev para el caso H^s

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

donde

$$2 < p < \infty \text{ y } \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d}.$$

Así obtenemos la inclusión

$$H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^p$$

en ciertos rangos de p, s, d .

Es conveniente notar explícitamente que el caso $s = d/2$ es especial. Se le conoce como exponente crítico de Sobolev y la inmersión falla. Para convencerse de que el resultado enunciado anteriormente es falso si $s = d/2$ podemos considerar el siguiente ejemplo

$$f(x) = \log(\log(1 + 1/|x|)) \varphi(x),$$

donde $\varphi(x) \in C_c^\infty$ es una función cut-off tal que $\varphi \equiv 1$ en si $|x| < 1$ y 0 si $|x| > 2$.

Este tipo de ideas pueden usarse para probar desigualdades funcionales muy interesantes como por ejemplo el principio de incertidumbre de Heisenberg. Si $\psi(x)$ es la probabilidad de que una determinada partícula esté en la posición x y $\hat{\psi}(\xi)$ es la probabilidad de que el momento de la partícula esté en ξ , la desigualdad de Heisenberg

$$\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2 \|x\psi\|_{L^2} \|\xi\hat{\psi}\|_{L^2}$$

establece que no pueden estar ambas probabilidades concentradas en un punto.

Teorema 28 (Principio de incertidumbre). Se tiene la siguiente desigualdad

$$\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2 \|x\psi\|_{L^2} \|\xi\hat{\psi}\|_{L^2}.$$

Demostración. Como ψ es una función que toma valores complejos se tiene que

$$\|\psi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\bar{\psi}(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} x\partial_x(\psi(x)\bar{\psi}(x))dx.$$

Entonces podemos calcular que

$$\|\psi\|_{L^2}^2 = -2\text{Re} \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)\partial_x\bar{\psi}(x)dx,$$

y entonces, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2},$$

se tiene que

$$\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)| |\partial_x\bar{\psi}(x)|dx \leq 2 \|x\psi\|_{L^2} \|\partial_x\bar{\psi}\|_{L^2}.$$

Usando las propiedades de la transformada de Fourier vistas anteriormente se tiene que

$$\|\partial_x \psi\|_{L^2}^2 = \|\widehat{\partial_x \psi}\|_{L^2}^2 = \|\xi \hat{\psi}\|_{L^2}^2.$$

Si ahora sustituimos esta igualdad en la estimación anterior llegamos a

$$\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2\|x\psi\|_{L^2}\|\xi\hat{\psi}\|_{L^2}.$$

□

Observamos que la desigualdad de Sobolev nos permite intercambiar integrabilidad de la derivada para concluir una mayor integrabilidad de la función misma pero no establece ningún tipo de relación entre ellas para la misma integrabilidad. Este tipo de desigualdades se conocen como desigualdades de Poincaré

$$\left\| f - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\partial_x f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Estas desigualdades las exploraremos brevemente en los ejercicios de este capítulo y el siguiente.

Finalmente queremos comentar que es posible combinar varias de estas ideas para conseguir desigualdades que interpolan tanto en número de derivadas como en integrabilidad. Estas desigualdades, conocidas como desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, en toda su generalidad exceden el nivel del presente texto. Sin embargo sí que queremos concluir con una desigualdad concreta de esta familia: la conocida como desigualdad de Nash:

Curiosamente, el mismo Nash afirma en el mismo artículo donde apareció por primera vez esta desigualdad que el primero en probarla había sido Stein.

Teorema 29 (Desigualdad de Nash). Se cumple la siguiente desigualdad

$$(30) \quad \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1+2/d} \leq C \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{2/d} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^d),$$

donde

$$\dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\}.$$

Demostración. Comenzamos usando las propiedades de la transformada de Fourier para obtener que

$$(31) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| < R} |\hat{u}|^2 d\xi + \int_{|\xi| > R} \frac{|\xi|^2}{R^2} |\hat{u}|^2 d\xi \\ &\leq \|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 R^d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} + \frac{1}{R^2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^2 R^d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} + \frac{1}{R^2} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned}$$

donde R es arbitrario y hemos usado la desigualdad

$$\|\hat{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Ahora elegimos

$$R = \left(\frac{2\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}{\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^2 \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} d} \right)^{\frac{1}{d+2}}.$$

Por lo tanto tenemos que (30) con

$$(32) \quad C = \left(\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \right)^{\frac{2}{d+2}} \left[\left(\frac{2}{d} \right)^{\frac{d}{d+2}} + \left(\frac{d}{2} \right)^{\frac{2}{d+2}} \right].$$

□

Desde el punto de vista del análisis funcional, la desigualdad de Nash establece la siguiente inclusión entre espacios funcionales

$$L^1(\mathbb{R}^d) \cap \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d),$$

donde \dot{H}^1 quiere decir el espacio de funciones tales que su primera derivada débil es L^2 (pero la función no tiene por qué serlo).

4.5 ESPACIOS DE SOBOLEV EN DOMINIOS ACOTADOS

Una vez que hemos visto los espacios de Sobolev para funciones cuyo dominio es \mathbb{R} o \mathbb{R}^d cabe preguntarse si podemos generalizar estos espacios no solo a índices no enteros o dimensiones mayores (como ya hemos hecho anteriormente), sino en dominios suaves acotados.

El primero de estos dominios por su simplicidad es la circunferencia unidad \mathbb{T} . Este dominio podemos identificarlo con el intervalo $[-\pi, \pi]$ con condiciones de borde periódicas y por lo tanto podemos usar las series de Fourier vistas en el capítulo 2 para definir los espacios de Sobolev. Así obtenemos

$$(33) \quad H^s(\mathbb{T}^d) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{clases de equivalencia } u \text{ t.q. } \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (1 + |k|^{2s}) |\hat{u}_k|^2 < \infty \right\},$$

donde \hat{u}_k es el coeficiente de Fourier correspondiente a la frecuencia k . De manera similar se obtienen los espacios más generales

$$W^{s,p}(\mathbb{T}^d) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{T}^d), \partial_x^{[s]} u \in L^p(\mathbb{T}^d), \frac{|\partial_x^{[s]} u(x) - \partial_x^{[s]} u(y)|}{|x - y|^{\frac{d}{p} + (s - [s])p}} \in L^p(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d) \right\},$$

con norma

$$\|u\|_{W^{s,p}}^p = \|u\|_{L^p}^p + \|u\|_{\dot{W}^{s,p}}^p,$$

donde

$$\|u\|_{\dot{W}^{s,p}}^p = \|\partial_x^{[s]} u\|_{L^p}^p + \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|\partial_x^{[s]} u(x) - \partial_x^{[s]} u(y)|^p}{|x - y|^{d + (s - [s])p}} dx dy.$$

Habíamos visto en el primer capítulo que la convergencia fuerte en espacios L^p era más escasa que en el caso de \mathbb{R}^d . Por ejemplo, al contrario que el caso

Tal cual vimos en el capítulo 1, la acotación de la sucesión en L^p en el rango $1 < p < \infty$ es suficiente para concluir la convergencia débil en dicho espacio. También habíamos visto que para que dicha convergencia débil fuese fuerte debían darse hipótesis adicionales.

de los vectores en \mathbb{R}^d , habíamos visto que la mera acotación de una sucesión no era suficiente para concluir la existencia de una subsucesión convergente en sentido fuerte en L^p para $1 < p < \infty$. Cabe entonces preguntarse si podemos usar estos nuevos espacios de Sobolev para conseguir convergencia fuerte en L^p . Es aquí donde entra el teorema de Rellich que asegura que podemos usar la acotación en $H^s(\mathbb{T})$ para obtener convergencia fuerte en $L^p(\mathbb{T})$ (siempre en ciertos rangos de p, s, d):

Teorema 30 (Rellich). Sea $s, \sigma > 0$ y f_n una sucesión acotada en $H^s(\mathbb{R})$

$$\|f_n\|_{H^{s+\sigma}(\mathbb{T})} \leq C.$$

Entonces existe $f \in H^s$ y una subsucesión f_{n_k} tal que

$$\|f - f_{n_k}\|_{H^s(\mathbb{T})} \rightarrow 0.$$

Demostración. Para la prueba necesitaremos de las herramientas vistas en el capítulo 1. Fijamos $\epsilon > 0$ y para

$$f_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n(k) e^{ikx}$$

definimos la regularización

$$f_n^\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n(k) e^{ikx} e^{-\epsilon|k|}.$$

Sin más que recordar las propiedades de las series de Fourier es fácil convenirse de que este operador no es más que un mollifier similar a los vistos en el capítulo 1. En particular, observamos que

$$f_n - f_n^\epsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n(k) e^{ikx} [1 - e^{-\epsilon|k|}]$$

y entonces el teorema de la convergencia dominada (para series) junto con las propiedades de las series de Fourier nos dicen que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f_n - f_n^\epsilon\|_{L^2}^2 \leq C \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \epsilon^\alpha |k|^\alpha |\hat{f}_n(k)|^2 \left[\frac{1 - e^{-\epsilon|k|}}{\epsilon^\alpha |k|^\alpha} \right]^2 = 0.$$

En particular, tomando $\alpha \leq 2s + 2\sigma$, podemos elegir $\epsilon \ll 1$ tal que

$$\|f_n - f_n^\epsilon\|_{L^2} \leq \delta \quad \forall n.$$

En lo que sigue consideraremos solo este valor de ϵ . Se tiene entonces que

$$\|f_n^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_\epsilon \|f_n\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

$$\|\partial_x f_n^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_\epsilon \|f_n\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Entonces, podemos usar el teorema de Ascolí-Arzelá para concluir que existe una subsucesión $f_{n_k}^\epsilon$ y un límite f^ϵ tal que

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|f_{n_\ell}^\epsilon - f^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 0.$$

En particular, dado que toda sucesión convergente es de Cauchy, se tiene que dicha subsucesión cumple

$$\lim_{\ell, m \rightarrow \infty} \|f_{n_\ell}^\epsilon - f_{n_m}^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0.$$

De esta manera, usando la interpolación entre espacios de Sobolev vista anteriormente, podemos concluir que

$$\lim_{\ell, m \rightarrow \infty} \|f_{n_\ell}^\epsilon - f_{n_m}^\epsilon\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq C \lim_{\ell, m \rightarrow \infty} \|f_{n_\ell}^\epsilon - f_{n_m}^\epsilon\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{\sigma}{s+\sigma}} = 0.$$

En particular, existe N tal que

$$\|f_{n_\ell}^\epsilon - f_{n_m}^\epsilon\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \delta \quad \forall \ell, m > N.$$

Ahora podemos calcular lo siguiente

$$\begin{aligned} \|f_{n_\ell} - f_{n_m}\|_{H^s(\mathbb{T})} &= \|f_{n_\ell} - f_{n_\ell}^\epsilon + f_{n_\ell}^\epsilon - f_{n_m}^\epsilon + f_{n_m}^\epsilon - f_{n_m}\|_{H^s(\mathbb{T})} \\ &\leq \|f_{n_\ell} - f_{n_\ell}^\epsilon\|_{H^s(\mathbb{T})} + \|f_{n_\ell}^\epsilon - f_{n_m}^\epsilon\|_{H^s(\mathbb{T})} + \|f_{n_m}^\epsilon - f_{n_m}\|_{H^s(\mathbb{T})} \\ &\leq 3\delta. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que f_{n_ℓ} es una sucesión de Cauchy en $H^s(\mathbb{T})$ y por lo tanto, sin más que usar la desigualdad de Sobolev se concluye que también es una sucesión de Cauchy en L^p para $2 < p < \infty$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - s.$$

□

Como veremos luego este teorema es muy útil para estudiar ecuaciones en derivadas parciales porque permite obtener convergencia fuerte de conocer sólo la acotación de la sucesión en un cierto espacio de Sobolev.

Dado un dominio con frontera suave $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ más general definimos los espacios de Sobolev con índice entero

$$W^{k,p}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in L^p(\Omega), \partial^k u \in L^p(\Omega) \right\},$$

con la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}}^p = \|u\|_{L^p}^p + \|\partial^k u\|_{L^p}^p.$$

Observamos ahora que las funciones en este espacio de Sobolev no tienen por qué satisfacer ninguna condición de borde en particular, de hecho, *a priori* su restricción a $\partial\Omega$ no tiene por qué tener sentido siquiera como función. Surge así el concepto de *traza de una función*. Este concepto en toda su generalidad excede el nivel de este texto y por lo tanto no vamos a entrar en detalles. El lector interesado podrá encontrar referencias en la sección de *Otras fuentes* más abajo. Sin embargo, sí que vamos a tratar un caso especial de valor de frontera, el de las funciones que se anulan en $\partial\Omega$.

Definimos así

$$W_0^{1,p}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \text{la clausura de } C_c^\infty(\Omega) \text{ en la norma } \|\cdot\|_{W^{1,p}} \right\}.$$

De esta manera conseguimos dos cosas: la primera es asegurar un conjunto donde $C_c^\infty(\Omega)$ sea denso y al tiempo que las funciones se anulan en $\partial\Omega$. Obviamente

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Esto es así ya que las funciones en L^p se puede redefinir en conjuntos de medida cero.

4.6 CONCLUSIONES

En este capítulo, además de presentar unos espacios de funciones, los espacios de Sobolev, que nos permiten medir la regularidad de las funciones, hemos presentado unas desigualdades (concretamente las desigualdades de Sobolev y de Poincaré) que serán muy importantes en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales no-lineales. Conviene citar unas palabras del gran matemático Louis Nirenberg [23] sobre la importancia de las desigualdades

Also, Friedrichs was a great lover of inequalities, and that affected me very much. The point of view was that the inequalities are more interesting than the equalities, the identities.

En concreto hemos probado que podemos intercambiar la integrabilidad en el sentido de Lebesgue de determinado número de derivadas débiles de una función por el control puntual de dicha función.

También hemos demostrado que podemos usar la integrabilidad de las derivadas débiles de una sucesión de funciones a la hora de obtener la convergencia fuerte en sentido L^p de una subsucesión de sucesión.

Ambas propiedades serán muy útiles a la hora de estudiar ecuaciones en derivadas parciales no-lineales.

4.7 OTRAS FUENTES

El lector interesado en profundizar más puede consultar [1, 2, 3, 4, 11, 14, 21, 25].

Siendo los espacios de Sobolev los espacios funcionales más utilizados en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales no resulta sorprendente que las referencias tratando estos espacios sean abundantes (ver [1] y sus referencias).

En particular conviene leer los libros de Brezis [3] y [4]. En ellos se tratan las definiciones de los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ y $W_0^{1,p}(\Omega)$ en los capítulos VIII y IX de [3] y 8 y 9 de [4].

El lector que quiera leer más concretamente sobre los espacios de Sobolev fraccionarios puede consultar el artículo de Di Nezza, Palatucci & Valdinoci [12]. De la misma manera el lector más avanzado puede consultar [25] y en concreto las lecciones 5,8,9,13 y 16, los capítulos 2,3 y 4 de [11] o el capítulo 5 de [14]. También puede estudiar el capítulo 3 de [2] o los capítulos 7 y 8 de [21].

En concreto, la desigualdad de Sobolev se puede ver en 3.1.1.4 de [2], el teorema 8.8 y la sección 9.3 de [4], el teorema VIII.7 y la sección IX.3 de [3] y la sección 5.6 de [14].

El teorema de Rellich se encuentra en los teoremas 8.8 y 9.16 de [4], VIII.7 y IX.16 de [3], en la sección 3.1.1.6 de [2] y en la 5.7 de [14].

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ se estudia en la sección IX.4 de [3] y la sección 9.4 de [4]. La desigualdad de Poincaré se trata en 3.1.3.4 de [2], el corolario 9.19 de [4] y el IX.19 de [4] y la sección 5.8.1 de [14].

Por otro lado, el lector puede optar por estudiar las notas de clase de multitud de cursos en diversas universidades. Algunas opciones son los textos de Juha Kinnunen https://math.aalto.fi/~jkkinnun/files/sobolev_spaces.pdf, o el capítulo 3 de estas notas de Volker John https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/NUM_KONV_PROB_16/num_pde_fem.pdf.

Finalmente también se puede consultar el blog de Terence Tao <https://terrytao.wordpress.com/2009/04/30/245c-notes-4-sobolev-spaces/>

4.8 EJERCICIOS SUGERIDOS

Ejercicio 30. Se considera la función $u(x) = |x|e^{-|x|}$. ¿Está la función $u \in H^1$?

Ejercicio 31. Se considera la función $u(x) = |x|e^{-|x|}$. ¿Está la función $u \in H^2$?

Ejercicio 32. Se considera la función $u(x) = |x|e^{-|x|}$. ¿Para qué p está la función $u \in W^{1,p}$?

Ejercicio 33. Se consideran las funciones $u \in H^1$ y $g(y) \in C^1$. ¿Está la función $g(u(x)) \in H^1$?

Ejercicio 34. Demuestra la desigualdad de interpolación siguiente

$$\|\partial_x f\|_{L^4(\mathbb{R})}^2 \leq C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\partial_x^2 f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Ejercicio 35. ¿Es cierta la desigualdad de interpolación siguiente

$$\|\partial_x f\|_{L^4([0,1])}^2 \leq C \|f\|_{L^\infty([0,1])} \|\partial_x^2 f\|_{L^2([0,1])}$$

para funciones tales que

$$f(0) = f(1) = 0?$$

Ejercicio 36. Demuestra que $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach si $s > 1/2$, *i.e.*

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \|g\|_{H^s(\mathbb{R})}$$

Ejercicio 37. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo acotado de \mathbb{R} y definamos

$$\|f\|_{\dot{H}^1(I)}^2 = \int_I |\nabla f(x)|^2 dx.$$

Demuestra que, para toda función tal que

$$\int_I f(s) ds = 0,$$

$$\|f\|_{L^\infty(I)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^1(I)}.$$

Concluye entonces que

$$\|f\|_{L^2(I)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^1(I)}.$$

Ejercicio 38. Sea \mathbb{T}^d el toro d -dimensional entendido como el cubo $[-\pi, \pi]^d$ con condiciones de borde periódicas y definamos

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^d)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2.$$

Demuestra que

$$\left\| f - \frac{1}{|\mathbb{T}^d|} \int f(x) dx \right\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^d)}.$$

Ejercicio 39. ¿Para qué funciones f es cierta la desigualdad siguiente

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^d)}?$$

Ejercicio 40. Demuestra que la función

$$f(x) = \log(\log(1 + 1/|x|)).$$

está en $H^1(B(0,1))$. Es decir, demuestra que está en L^2 , que tiene derivada débil dada por la derivada en sentido clásico (salvo en el origen) y que dicha derivada está en L^2 .

5 LES

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIA-

Ya en el primer curso de ecuaciones en derivadas parciales se estudia la clasificación de un operador diferencial de segundo orden general

$$\mathcal{L}[u] = Au_{xx}(x, y) + Bu_{xy}(x, y) + Cu_{yy}(x, y) + Du_x(x, y) + Eu_y(x, y) = f,$$

con $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ y $\min\{|A|, |B|, |C|\} > 0$, en los tres tipos principales: ecuaciones elípticas, ecuaciones parabólicas y ecuaciones hiperbólicas.

Así teníamos que la ecuación anterior es

- parabólica si $B^2 - 4AC = 0$. El ejemplo principal es la ecuación del calor $A = -1, E = 1, B = C = D = 0$,

$$\partial_y u = \partial_x^2 u + f,$$

- hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$. El ejemplo principal es la ecuación de ondas $A = -1, C = 1, B = D = E = 0$,

$$\partial_y^2 u = \partial_x^2 u + f,$$

- elíptica si $B^2 - 4AC < 0$. El ejemplo principal es la ecuación de Laplace $A = 1, C = 1, B = D = E = 0$,

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = f.$$

Nosotros vamos a presentar aquí algunos resultados para unos problemas de ecuaciones en derivadas parciales paradigmáticos.

Veamos desde donde encaramos este nuevo capítulo del curso:

De dónde venimos: En capítulos anteriores hemos estudiado unas herramientas básicas como son diferentes espacios funcionales para medir diversas propiedades de las funciones, las distribuciones así como la transformada de Fourier y las derivadas débiles. Estas técnicas nos serán de gran ayuda para estudiar las ecuaciones en derivadas parciales.

A dónde vamos: En este capítulo vamos a presentar unos resultados básicos para el estudio de la existencia de solución de ecuaciones en derivadas parciales. El resultado principal de este capítulo es el Lema de Lax-Milgram. Aunque vamos a ver el Lema de Lax-Milgram en bastante generalidad, presentaremos las ideas principales usando ejemplos concretos de ecuaciones en derivadas parciales. En particular, veremos

1. Cómo probar la existencia y unicidad de solución débil para una ecuación elíptica tanto en un dominio acotado Ω como en todo el espacio \mathbb{R}^d . Para ello usaremos el Lema de Lax-Milgram. Este problema será

Estos nombres vienen de la analogía entre los coeficientes de las derivadas y los coeficientes de las curvas cónicas.

Una ecuación diferencial está bien propuesta cuando existe una única solución y además dicha solución depende de manera continua de los datos iniciales y de borde.

nuestra base para construir la teoría de existencia y unicidad para otros problemas de ecuaciones diferenciales de evolución. De igual manera veremos cómo tratar el caso de problemas no-lineales mediante el teorema de punto fijo de Schauder.

2. Cómo probar la existencia y unicidad de solución débil para una ecuación parabólica. Para ello vamos a aproximar el problema parabólico por una familia de problemas elípticos cuya solución vamos a demostrar usando el Lema de Lax-Milgram. De esta manera, estudiaremos cómo usar la teoría elíptica del punto anterior para demostrar que un problema de evolución está bien propuesto. Veremos también una propiedad muy importante de los problemas parabólicos como es la *difusión*. De manera similar al punto anterior, también veremos cómo tratar el caso de problemas no-lineales mediante el teorema de punto fijo de Banach.

Por lo tanto el propósito de este capítulo es intentar construir una teoría de existencia y unicidad de solución para varias ecuaciones en derivadas parciales clásicas usando el Lema de Lax-Milgram y los teoremas de punto fijo de Banach y Schauder como elemento básico así como diversos esquemas de aproximación y regularización. Creemos que esta forma de hacerlo es *elemental* en el sentido de que requiere pocas herramientas teóricas y al mismo tiempo permite presentar varias formas de aproximación de un problema y posterior paso al límite.

Los objetivos de este capítulo son

Objetivos mínimos	Objetivos avanzados
Conocer la formulación débil de una ecuación diferencial	Conocer el teorema de punto fijo de Schauder
Dominar el Lema de Lax-Milgram para aplicarlo a problemas elípticos	Conocer el teorema de punto fijo de Banach
Dominar el Lema de Lax-Milgram para aplicarlo a problemas parabólicos	Conocer el decaimiento de la ecuaciones parabólicas
Conocer diversos procedimientos de aproximación para construir soluciones	
Saber realizar estimaciones de energía en espacios L^p y H^k	Conocer el método iterativo de Moser

5.1 ECUACIONES ELÍPTICAS

5.1.1 El lema de Lax-Milgram y las soluciones débiles de la ecuación de Helmholtz

EL objetivo de esta sección es conseguir demostrar la existencia y unicidad de solución para problemas elípticos. En concreto nos vamos a centrar en demostrar que la ecuación

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Helmholtz.

$$u - \Delta u = f$$

está bien puesta.

En esta sección usaremos el teorema de representación de Riesz

Teorema 31. Sea H un espacio de Hilbert cuyo producto interno lo denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ y H^* su dual. Entonces, dada $\varphi \in H^*$, se tiene que existe un único elemento $f \in H$ tal que

$$(\varphi, u) = \langle f, u \rangle_H \quad \forall u \in H.$$

Vamos a presentar las principales ideas con dos ejemplos concretos. Primero un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y luego una EDO.

Comencemos por un momento considerando el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$Au = f,$$

donde $A \in \mathbb{M}_{2 \times 2}$ es una matriz simétrica, $f \in \mathbb{R}^2$ es un vector y $u \in \mathbb{R}^2$ es el vector que contiene las incógnitas. Así el problema es, dado el vector f y la matriz A , conseguir determinar el vector de incógnitas u . Para ello bastaría con demostrar que la matriz A es invertible. Esto, como bien sabemos, no siempre puede hacerse y por ejemplo en ocasiones puede haber más de una solución.

Comenzamos observando que se tiene que

$$Au \cdot v = f \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Esto se conoce como formulación débil del problema.

Notamos ahora que se tiene que

$$a(u, v) = Au \cdot v : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

es una forma bilineal que satisface

$$|Au \cdot v| \leq C_1 |u| |v|.$$

Esta desigualdad expresa la continuidad de la forma bilineal. La continuidad de la forma bilineal, si bien es totalmente evidente en el caso de vectores, será muy importante cuando generalicemos estas ideas a ecuaciones diferenciales. Por otro lado, para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales anterior, sabemos que necesitamos una matriz invertible. Es decir, una matriz tal que tenga todos sus autovalores diferentes de cero. Si ese es el caso, entonces se ha de tener forzosamente que

$$Au \cdot u \geq C_2 |u|^2.$$

Esta propiedad, que se conoce como coercividad, garantiza la invertibilidad de la matriz.

Nuestro objetivo ahora es intentar aplicar estas ideas a demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales.

Consideramos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$(34) \quad u(x) - \partial_x^2 u(x) = \varphi \quad x \in \mathbb{R},$$

donde $\varphi \in (H^1)^*(\mathbb{R})$. Un ejemplo de tales φ es

$$(\varphi, v) = \int_{\mathbb{R}} F(x)v(x)dx$$

Recordamos que

$$(\varphi, v) = \int_{\mathbb{R}} F(x)v(x)dx$$

denota la acción del funcional φ sobre la función v .

para $F \in L^2$ aunque se podrían admitir distribuciones φ más generales. Además, podemos usar el teorema de representación de Riesz para asegurar que se tiene

$$((\varphi, v)) = \langle f, v \rangle_{H^1}$$

para cierta $f \in H^1$.

De hecho, si φ es suficientemente regular, entonces la EDO anterior puede resolverse explícitamente de manera sencilla usando la transformada de Fourier y notando que la solución ha de cumplir

$$(1 + |\xi|^2)\hat{u}(\xi) = \hat{\varphi},$$

por lo que bastaría con dividir por $(1 + |\xi|^2)$ e aplicar la transformada de Fourier inversa.

Si bien se trata de una EDO y por lo tanto es un problema en principio sencillo, dejando de lado las técnicas de Fourier, no podemos aplicar la teoría estudiada en cursos previos porque no es un problema de valores iniciales ni tampoco un problema de datos de borde. De hecho, esta EDO ya nos va a permitir poner a prueba las ideas anteriores.

Comenzamos observando que, al tratarse de una ecuación diferencial, debemos entender la ecuación como una igualdad entre funciones en un cierto espacio L^p y, por lo tanto, en principio solo tiene sentido en casi todo punto. Recordando la idea de los *test integrales* e integrando por partes, tenemos que la formulación débil de la EDO anterior es

$$(35) \quad \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x)dx + \partial_x u(x)\partial_x v(x)dx = ((\varphi, v)), \forall v \in H^1(\mathbb{R}).$$

Es decir, vamos a decir que u es una **solución débil** de la EDO (34) si cumple (35).

Si ahora intentamos seguir la idea que desarrollamos para el caso matricial podemos definir la forma bilineal

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x)dx + \partial_x u(x)\partial_x v(x)dx$$

de manera que

$$a(u, v) : H^1 \times H^1 \mapsto \mathbb{R}.$$

Esta forma bilineal, que no es más que el producto interno del espacio de Hilbert $H^1(\mathbb{R})$ es continua y se tiene

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

Observamos ahora que la continuidad tan obvia en el caso matricial anterior, en el caso de ecuaciones diferenciales pasa a estar relacionada con la definición de los operadores diferenciales involucrados. Así, la forma bilineal a es continua con los espacios usados en la definición anterior pero no lo es por ejemplo si la intentamos definir

$$a(u, v) : L^2 \times L^2 \mapsto \mathbb{R}.$$

La coercividad también la tenemos en este caso ya que

$$|a(u, u)| = \|u\|_{H^1}^2.$$

Queremos ver que, dado que a es una forma bilineal continua y coerciva existe una única solución para el problema

$$a(u, v) = (\varphi, v) \quad \forall v \in H^1.$$

Si ahora fijamos u y definimos el operador

$$(\varphi_u, v) = a(u, v) : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

podemos observar que φ_u es un funcional lineal y continuo y por lo tanto está en el espacio dual $\varphi_u \in (H^1)^*$. Esto nos permite entonces invocar el teorema de representación de Riesz y obtenemos entonces que existe un único elemento $f_u \in H^1$ tal que

$$a(u, v) = (\varphi_u, v) = \langle f_u, v \rangle_{H^1}.$$

De esta manera podemos definir la aplicación

$$Tu : H^1 \rightarrow H^1$$

tal que

$$Tu = f_u.$$

Por otro lado, y de nuevo por el teorema de Riesz, se tiene que

$$(\varphi, v) = \langle f, v \rangle_{H^1},$$

para cierta $f \in H^1$ única.

El problema de encontrar una solución de la EDO anterior ha pasado entonces a poderse reformular de la manera siguiente:

$$\text{Dada } f, \text{ queremos encontrar } u \text{ tal que } Tu = f$$

Debemos entonces asegurar que la aplicación

$$Tu = f_u$$

es invertible. Si bien así dicho parece sencillo, lo cierto es que la definición del operador T parece algo *oscura*. Conviene por tanto estudiarla un poco mejor. Comenzamos observando que T es un operador lineal. En efecto, usando la definición y el teorema de representación de Riesz tenemos que

$$\begin{aligned} \langle T(\alpha u + \beta w), v \rangle_{H^1} &= \langle f_{\alpha u + \beta w}, v \rangle_{H^1} \\ &= (\varphi_{\alpha u + \beta w}, v) \quad (\text{por la definición de } f_u) \\ &= a(\alpha u + \beta w, v) \quad (\text{por la definición de } \varphi_u) \\ &= \langle \alpha u + \beta w, v \rangle_{H^1} \quad (\text{por la definición de } a) \\ &= \alpha \langle u, v \rangle_{H^1} + \beta \langle w, v \rangle_{H^1} \\ &= \alpha a(u, v) + \beta a(w, v) \\ &= (\alpha \varphi_u, v) + \beta (\varphi_w, v) \\ &= \langle \alpha Tu, v \rangle_{H^1} + \beta \langle Tw, v \rangle_{H^1} \\ &= \langle \alpha Tu + \beta Tw, v \rangle_{H^1}. \end{aligned}$$

Como $v \in H^1(\mathbb{R})$ es arbitraria entonces se ha de tener forzosamente que

$$T(\alpha u + \beta w) = \alpha Tu + \beta Tw.$$

De la misma manera tenemos que

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{H^1}^2 &= \|f_u\|_{H^1}^2 \\ &= \langle f_u, f_u \rangle_{H^1} \\ &= (\varphi_u, f_u) \quad (\text{por la definición de } f_u \text{ con } v = f_u) \\ &= a(u, f_u) \quad (\text{por la definición de } \varphi_u) \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|f_u\|_{H^1} \quad (\text{por la continuidad de } a) \end{aligned}$$

de donde

$$\|Tu\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H^1,$$

y obtenemos que T es un operador continuo. Gracias a que a es coerciva se tiene que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1}^2 &\leq a(u, u) \\ &= (\varphi_u, u) \quad (\text{por la definición de } \varphi_u \text{ con } v = u) \\ &= \langle u, f_u \rangle_{H^1} \quad (\text{por la definición de } f_u \text{ con } v = u) \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|f_u\|_{H^1} \\ &\leq \|u\|_{H^1} \|Tu\|_{H^1}, \end{aligned}$$

de donde el operador T está acotado inferiormente

$$\|u\|_{H^1} \leq \|Tu\|_{H^1} \quad \forall u \in H^1.$$

De la desigualdad anterior obtenemos que el operador T es inyectivo con el argumento clásico de contradicción y el uso de la linealidad de T . Para ello basta con notar que se tiene

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1} \leq \|T(u_1 - u_2)\|_{H^1} \leq \|Tu_1 - Tu_2\|_{H^1},$$

de donde $Tu_1 = Tu_2$ implicaría que $u_1 = u_2$. La inyectividad de T nos permite hablar del operador inverso T^{-1}

$$T^{-1} : R \subset H^1 \rightarrow H^1,$$

donde R es el rango de T . Además observamos que el operador T^{-1} es continuo ya que si $Tu = f_u$ entonces

$$\|T^{-1}f_u\|_{H^1} = \|u\|_{H^1} \leq \|Tu\|_{H^1} \leq \|f_u\|_{H^1}.$$

Hasta aquí lo que hemos probado es que, *dada* $f \in R$ entonces existe una solución de

$$a(u, v) = (\varphi, v) \quad \forall v \in H^1,$$

donde $\varphi \in (H^1)^*$ es la distribución vinculada a $f \in H^1$.

Si demostramos que $R = H^1$ entonces concluimos el resultado deseado. Estas propiedades de T nos permiten asegurar que R es cerrado. Para ello vamos a ver que contiene a todos sus puntos de acumulación. Es decir, que si

$$f_n \in R \rightarrow f \in H^1$$

entonces $f \in R$. Basta con notar que, por estar T acotado inferiormente, se tiene

$$\|f_n - f_m\|_{H^1} = \|Tu_n - Tu_m\|_{H^1} = \|T(u_n - u_m)\|_{H^1} \geq \|u_n - u_m\|_{H^1}.$$

Por lo tanto, dado que f_n es una sucesión convergente, u_n es una sucesión de Cauchy y, como H^1 es un espacio de Hilbert, entonces u_n es convergente. Si escribimos u para el límite de esta sucesión u_n entonces, por la continuidad de T se tiene que

$$Tu = \lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f,$$

por lo que $f \in R$ y se tiene que R es cerrado. Ahora argumentamos por contradicción. Si $R \neq H^1$, al ser R un cerrado, entonces podemos definir el conjunto R^\perp y dicho conjunto no es vacío. Es decir, se tiene que existe $0 \neq g \in H^1$ tal que

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = 0 \forall f \in R.$$

Entonces, gracias a la coercividad de a , podemos calcular que

$$\|g\|_{H^1}^2 \leq a(g, g) = \langle g, Tg \rangle_{H^1} = 0$$

por la hipótesis en g ya que $Tg \in R$. Esto es una contradicción con que $g \neq 0$ por lo que $R = H^1$ y podemos invertir T para toda $f \in H^1$ lo que garantiza la existencia de u solución débil de (34). Además, dicha solución cumple (sin más que tomar $v = u$ en la definición de solución débil (35))

$$\|u\|_{H^1}^2 = (\varphi, u) \leq \|\varphi\|_{(H^1)^*} \|u\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{(H^1)^*} \|u\|_{H^1},$$

por lo que

$$\|u\|_{H^1} \leq \|\varphi\|_{(H^1)^*}.$$

Y además tiene que ser única ya que si hubiese dos la diferencia verificaría (de nuevo tomando $v = u_1 - u_2$)

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1}^2 = 0.$$

Podemos resumir el proceso anterior de la siguiente manera: Dado un espacio de Hilbert H y una forma bilineal a que sea continua y coerciva entonces

1. Podemos usar el teorema de representación de Riesz para definir el operator

$$T : H \rightarrow H$$

tal que a cada u le asocia el elemento de H vinculado (gracias al teorema de Riesz) al funcional $\varphi_u = a(u, \cdot) \in H^*$.

2. La continuidad y la coercividad de a entonces permiten demostrar que T es lineal, continuo y acotado inferiormente. Por lo tanto existe T^{-1} y es continuo.
3. Las propiedades anteriores de T y T^{-1} garantizan que R es cerrado y por lo tanto $R = H$.

En realidad los pasos anteriores son idénticos no importa que espacio de Hilbert H o que forma bilineal se tenga (siempre que la forma bilineal sea continua y coerciva en H). Por lo tanto puede repetirse el argumento y obtener el conocido como Lema de Lax-Milgram

Teorema 32 (Lax-Milgram). Sea H un espacio de Hilbert, a una forma bilineal continua y coerciva en H y sea $\varphi \in H^*$. Entonces existe una única $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = (\varphi, v) \quad \forall v \in H.$$

De esta manera si consideramos la EDP (conocida como ecuación de Helmholtz)

$$(36) \quad u(x, y) - \Delta u(x, y) = f(x) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, podemos encontrar una solución débil, es decir, una u que cumple

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, y)v(x, y)dxdy + \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)v(x, y)dxdy, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Para ello basta con definir

$$a(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y)v(x, y)dxdy + \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y)dxdy,$$

y φ tal que

$$(\varphi, v) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)v(x, y)dxdy,$$

y comprobar que a es una forma bilineal continua y coerciva y φ un funcional lineal y continuo.

Comprobamos así que el Lema de Lax-Milgram es una herramienta sencilla pero potente para establecer la existencia de solución débil de ecuaciones en derivadas parciales de tipo *elíptico*.

Para ello los pasos a seguir son los siguientes

- Dado una EDP elíptica, se define la forma bilineal a y el funcional lineal φ .
- Se definen asimismo los espacios de funciones de manera que a sea continua y coerciva y φ sea un funcional continuo.
- Se aplica el Lema de Lax-Milgram.

Tras estos pasos podría seguirse el análisis del problema para garantizar que la solución tiene en realidad más regularidad y el problema no sólo tiene solución débil sino que dicha solución débil es, en realidad, una solución fuerte con sentido en todo punto. Esa parte es más delicada y la vamos a posponer.

5.1.2 El problema de Dirichlet

Si bien en la sección anterior hemos visto como usar el Lema de Lax-Milgram para demostrar la existencia y unicidad de solución débil para ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico donde el dominio era \mathbb{R}^d , en la mayor parte de los problemas del mundo real el dominio es un conjunto del espacio \mathbb{R}^3 o del plano \mathbb{R}^2 . En estos casos el problema necesita condiciones de borde para poder estar bien determinado. Es decir, además de la ecuación diferencial, el problema para estar bien puesto necesita imponer unas condiciones de borde a la incógnita a determinar. Normalmente estas condiciones de borde para la incógnita imponen el valor de la propia incógnita (en este caso se llaman condición de borde de tipo Dirichlet) o de la derivada normal (en este caso se llaman condición de borde de tipo Neumann). En esta sección vamos a explicar brevemente como tratar el primer caso.

Así, un ejemplo de estos problemas es

$$(37) \quad u - \Delta u = f \quad \text{en } \Omega$$

$$(38) \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto abierto con frontera $\partial\Omega$ suave. Es en estos problemas donde se ve la utilidad de los espacios de Sobolev en dominios acotados $H^s(\Omega)$ y más concretamente del espacio $H_0^1(\Omega)$.

Si multiplicamos la ecuación por una función test $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos por partes obtenemos la formulación débil

$$\int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observamos entonces que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

es una forma bilineal. Además, si la definimos

$$a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

se tiene que es continua y coerciva. Por lo tanto, podríamos aplicar el Lema de Lax-Milgram de manera análoga a la usada en la sección anterior sin más que reemplazar apropiadamente los espacios funcionales $H^1(\mathbb{R}^d)$ por $H_0^1(\Omega)$.

5.1.3 Ecuaciones no-lineales

En esta sección vamos a necesitar un resultado de punto fijo conocido como Teorema de punto de fijo de Schauder

Teorema 33 (Punto fijo de Schauder). Sea X un espacio de Banach y sea $M \subset X$ un conjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío. Si $\mathcal{T} : M \rightarrow M$ es un operador compacto, esto es que sea continuo y que $\overline{\mathcal{T}(B)}$ sea compacto para todo B acotado, entonces \mathcal{T} tiene un punto fijo.

En la sección anterior hemos visto cómo se podía usar el lema de Lax-Milgram para demostrar la existencia y unicidad de soluciones débiles para

problemas de tipo elíptico. Sin embargo, anteriormente hemos considerado siempre ecuaciones lineales. Esto es una seria limitación ya que las ecuaciones diferenciales relevantes en la práctica totalidad de las aplicaciones al mundo real son no-lineales.

El propósito de esta sección es estudiar cómo se puede utilizar nuestra teoría para problemas lineales unida a un teorema de punto fijo para probar la existencia de solución para un problema elíptico no-lineal. Esta técnica la vamos a ejemplificar con el siguiente problema

$$(39) \quad u - \Delta u = \sin(u) \quad \text{en } \Omega$$

$$(40) \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto con frontera $\partial\Omega$ suave.

Este problema queremos resolverlo usando un punto fijo. Para ello, fijamos $U \in L^2$ y definimos el siguiente problema lineal

$$(41) \quad u - \Delta u = \sin(U) \quad \text{en } \Omega$$

$$(42) \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

Observamos que la no-linealidad cumple

$$F(U) = \sin(U) : L^2 \rightarrow L^2,$$

sin más que notar que

$$\int_{\Omega} |F(U)|^2 dx \leq |\Omega|.$$

Por lo tanto, $F(U)$ nos permite definir un funcional y, por lo tanto, obtenemos que este problema tiene una solución débil única $u \in H_0^1$ sin más que aplicar el lema de Lax-Milgram tal cual hemos visto en la sección anterior. Podemos entonces definir el operador \mathcal{T} tal que

$$\mathcal{T} : U \mapsto u,$$

donde $u \in H_0^1(\Omega)$ satisface

$$\int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} \sin(U)v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Si ahora conseguimos probar que \mathcal{T} tiene un punto fijo entonces demostramos la existencia de soluciones débiles al problema anterior.

Tenemos entonces que

$$\mathcal{T} : L^2 \rightarrow H_0^1 \subset L^2.$$

Como la identidad anterior se cumple para toda $v \in H_0^1$ se tiene que se cumple para la propia u . Usando

$$|\sin(U)| \leq |U|,$$

llegamos así a

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} \sin(U)u dx \leq \|U\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \|U\|_{L^2} \|u\|_{H^1},$$

de donde

$$\|u\|_{L^2} = \|TU\|_{L^2} \leq \|TU\|_{H^1} \leq \|U\|_{L^2},$$

y concluimos que \mathcal{T} es un operador continuo.

Además, si usamos la cota

$$|\sin(U)| \leq 1,$$

obtenemos

$$\|u\|_{H^1}^2 = \int \sin(U)u dx \leq \sqrt{|\Omega|} \|u\|_{L^2} \leq \sqrt{|\Omega|} \|u\|_{H^1},$$

de donde

$$\|u\|_{L^2} = \|TU\|_{L^2} \leq \|TU\|_{H^1} \leq \sqrt{|\Omega|}.$$

Por lo tanto podemos definir

$$M = \{U \in L^2, \text{ t.q. } \|U\|_{L^2} \leq \sqrt{|\Omega|}\}.$$

Este conjunto es cerrado, convexo, acotado y no vacío y además, por la estimación anterior se tiene que

$$\mathcal{T} : M \rightarrow M.$$

Es más, hemos visto que se tiene

$$\mathcal{T}(M) \subset \{U \in H_0^1, \text{ t.q. } \|U\|_{H^1} \leq \sqrt{|\Omega|}\}.$$

Debido al teorema de Rellich (teorema 30) se tiene que la inmersión de H^1 en L^2 es compacta y por lo tanto $\mathcal{T}(M)$ es compacto en L^2 .

Hemos deducido entonces que el operador \mathcal{T} cumple las hipótesis del teorema de Schauder y por lo tanto tiene un punto fijo (no necesariamente único).

5.2 ECUACIONES PARABÓLICAS

5.2.1 El lema de Lax-Milgram y las soluciones débiles de la ecuación del calor

En esta sección vamos a estudiar ecuaciones parabólicas. El caso paradigmático de ecuación parabólica es la ecuación del calor

$$(43) \quad \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \text{ con } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T),$$

y dato inicial

$$u(x, 0) = f(x) \in L^2.$$

De nuevo el concepto de solución que manejamos es el de solución débil. Es decir, u es solución débil de (43) si

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(x, s) \cdot \nabla v(x, t) dx ds \\ - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} u(x, s) \partial_t v(x, t) dx ds = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) v(x, 0) dx, \end{aligned}$$

para toda

$$v \in C_c^1([0, T], L^2) \cap L^2(0, T; H^1).$$

Es decir, para toda v tal que

$$v, \partial_t v, \nabla v \in L^2(\mathbb{R}^d \times [0, T]).$$

Si bien el término Δu nos remite al tipo de ecuaciones que estábamos resolviendo en la sección anterior, el hecho de que aparezca la deriva temporal cambia totalmente el carácter del problema. Eso hace imposible aplicar el lema de Lax-Milgram tal cual veníamos haciendo.

El propósito de esta sección es estudiar cómo aproximar el problema (43) por problemas más sencillos de manera que podamos resolver los problemas aproximados con las técnicas ya estudiadas en la sección previa. Así se consigue una sucesión de funciones solución de los problemas aproximados

$$u^h.$$

El argumento concluye mediante un paso al límite en las soluciones de los problemas aproximados de manera que u , la solución de (43), se recupera como

$$\lim_{h \rightarrow 0} u^h = u,$$

en algún sentido todavía por precisar.

Observamos que si en vez de $\partial_t u$ hubiese una u , la ecuación sería la estudiada en la sección anterior. Por lo tanto, vamos a intentar usar esta idea de cara a construir los problemas aproximados. Para ello observamos que

$$\partial_t u(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, t) - u(x, t - h)}{h}.$$

Así, fijamos h suficientemente pequeño y definimos la siguiente familia de problemas elípticos lineales

$$(44) \quad \frac{u_k(x) - u_{k-1}(x)}{h} - \Delta u_k(x) = 0 \text{ con } x \in \mathbb{R},$$

con

$$u_0(x) = f(x).$$

Esta familia de problemas lineales se pueden resolver recursivamente sin más que aplicar el lema de Lax-Milgram de la forma vista en la sección anterior a las diferentes ecuaciones

$$\frac{u_1(x) - f(x)}{h} - \Delta u_1(x) = 0 \text{ con } x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{u_2(x) - u_1(x)}{h} - \Delta u_2(x) = 0 \text{ con } x \in \mathbb{R},$$

y así sucesivamente.

Así conseguimos una familia de funciones $u_k \in H^1(\mathbb{R}^d)$ que son soluciones débiles, es decir, que cumplen que

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(x) \frac{u_k(x) - u_{k-1}(x)}{h} ds + \nabla u_k(x) \cdot \nabla v(x) dx = 0 \forall v \in H^1(\mathbb{R}), k > 0.$$

Si ahora cogemos $v = u_k$ entonces llegamos a

$$\|u_k\|_{L^2}^2 + h\|\nabla u_k\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} u_k(x)u_{k-1}(x)dx \leq \|u_k\|_{L^2}\|u_{k-1}\|_{L^2}.$$

Usando

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

obtenemos que

$$\frac{\|u_k\|_{L^2}^2}{2} + h\|\nabla u_k\|_{L^2}^2 \leq \frac{\|u_{k-1}\|_{L^2}^2}{2}.$$

Como consecuencia, sin más que iterar, se obtiene que

$$\|u_k\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Por otro lado,

$$h\|\nabla u_k\|_{L^2}^2 \leq \frac{\|u_{k-1}\|_{L^2}^2}{2} - \frac{\|u_k\|_{L^2}^2}{2}.$$

Si sumamos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K h\|\nabla u_k\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{k=1}^K \left(\frac{\|u_{k-1}\|_{L^2}^2}{2} - \frac{\|u_k\|_{L^2}^2}{2} \right) \\ &= \frac{\|u_0\|_{L^2}^2}{2} - \frac{\|u_1\|_{L^2}^2}{2} + \frac{\|u_1\|_{L^2}^2}{2} - \frac{\|u_2\|_{L^2}^2}{2} + \dots \\ &= \frac{\|u_0\|_{L^2}^2}{2} - \frac{\|u_K\|_{L^2}^2}{2} \\ &\leq \frac{\|u_0\|_{L^2}^2}{2}. \end{aligned}$$

Hasta aquí todo ha sido similar a lo ya estudiado en la sección anterior. Sin embargo, sigue habiendo un problema crucial: estas funciones u_k dependen de x pero *no* dependen de t , por lo que no parece claro cómo van a poder servir para aproximar un problema con ambas variables. Para resolverlo fijamos $T > 0$ y definimos

$$\frac{T}{K} = h, \quad t_k = kh, \quad u^h(x, t) = u_k(x) \text{ si } t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Entonces las estimaciones anteriores se pueden reescribir como

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^h(t)\|_{L^2} = \max_{0 \leq k \leq K} \|u_k\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla u^h(s)\|_{L^2}^2 ds &= \sum_{k=1}^K h\|\nabla u_k\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{\|u_0\|_{L^2}^2}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos las siguientes cotas uniformes en h

$$u^h \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1).$$

Ahora, dada $v \in C_c^1([0, T], L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$, podemos definir

$$v_k(x) = v(x, t_k),$$

y entonces tenemos que

$$\sum_{k=1}^K \int_{\mathbb{R}^d} v_{k-1}(x) \frac{u_k(x) - u_{k-1}(x)}{h} dx + \nabla u_k(x) \cdot \nabla v_{k-1}(x) dx = 0.$$

Usando que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \int_{\mathbb{R}^d} v_{k-1}(u_k - u_{k-1}) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^d} v_0(u_1 - u_0) + v_1(u_2 - u_1) + v_2(u_3 - u_2) \\ + \dots v_{K-1}(u_K - u_{K-1}) dx, \end{aligned}$$

podemos reordenar la suma anterior para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \int_{\mathbb{R}^d} v_{k-1}(u_k - u_{k-1}) dx \\ = \int_{\mathbb{R}^d} -v_0 u_0 + u_1(v_0 - v_1) + u_2(v_1 - v_2) + \dots u_K v_{K-1} dx, \end{aligned}$$

Por lo tanto, la identidad anterior se puede reescribir como

$$\int_{\mathbb{R}^d} v_{K-1} u_K - v_0 u_0 dx + \sum_{k=1}^{K-1} \int_{\mathbb{R}^d} (v_{k-1} - v_k) u_k dx + \sum_{k=1}^K h \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u_k(x) \cdot \nabla v_{k-1}(x) dx = 0.$$

Si ahora definimos

$$v_h(x, t) = v_{k-1}(x) \text{ si } t \in [t_k, t_{k+1}),$$

y

$$v^h(x, t) = \frac{t_{k+1} - t}{h} v_k(x) + \frac{t - t_k}{h} v_{k+1}(x) \text{ si } t \in [t_k, t_{k+1}),$$

conseguimos

$$\partial_t v^h(x, t) = \frac{v_{k+1}(x) - v_k(x)}{h}.$$

Observamos que como

$$v \in C_c^1([0, T], L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$$

esta nueva v^h cumple que

$$v^h \in C_c^1([0, T], L^2) \cap L^2(0, T; H^1).$$

Por otro lado, la identidad anterior se puede reescribir en términos de u^h y v^h como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} v^h(x, T) u^h(x, T) - v^h(x, 0) f(x) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t v^h u^h dx ds \\ + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u^h \cdot \nabla v_h dx ds = 0. \end{aligned}$$

Como se tiene que u^h tenía cotas uniformes en $L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ podemos, por los resultados estudiados en los Capítulos 2 y 3, extraer una subsucesión que converge

$$u^{h_j} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ en } L^\infty(0, T; L^2)$$

ya que

$$L^\infty(0, T; L^2)$$

es el espacio dual de

$$L^1(0, T; L^2).$$

Además

$$u^{h_j} \rightharpoonup u \text{ en } L^2(0, T; H^1).$$

Por construcción y por la regularidad de v se tiene que

$$\partial_t v^h \rightarrow \partial_t v.$$

Además

$$v_h \rightarrow v.$$

Por lo tanto, podemos pasar al límite y obtener, usando el soporte compacto en tiempo de v , que el límite u satisface la siguiente identidad

$$(45) \quad - \int_{\mathbb{R}^d} v(x, 0) f(x) dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t v u dx ds + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla v dx ds = 0,$$

para toda

$$v \in C_c^1([0, T], L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$$

y por lo tanto u es *solución débil* de la ecuación del calor.

5.2.2 Disipación

En la sección anterior habíamos probado la existencia de soluciones débiles de la ecuación del calor (43) al ver dicha ecuación como un cierto límite de problemas elípticos de tipo Helmholtz. Esta aproximación nos ha sido útil ya que hemos obtenido resultados para una nueva ecuación desde lo ya estudiado para problemas elípticos.

En lo que sigue vamos a *asumir* que tal solución es

$$u \in L^\infty(0, T; H^k(\mathbb{R}^d)).$$

Aunque de momento esta regularidad la vamos a asumir, lo cierto es que las técnicas de la próxima sección pueden utilizarse para demostrarla. Por lo tanto, el lector impaciente y riguroso puede avanzar a la sección siguiente para ver cómo es la prueba y luego retornar a este punto.

Usando entonces Plancherel podemos hablar de la transformada de Fourier (en x) de dicha solución y obtener

$$\hat{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^d)).$$

Cabe entonces preguntarse por la ecuación que resuelve \hat{u} . Usando las propiedades estudiadas en el Capítulo 3 en (43) llegamos a que

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t).$$

Si resolvemos esta EDO y usamos el dato inicial llegamos a que

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t},$$

de donde se infiere el decaimiento de la solución.

Tomando la transformada de Fourier inversa podemos obtener la solución explícita de la ecuación del calor

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy.$$

Esta fórmula establece que la solución de la ecuación del calor u viene dada por la convolución entre el dato inicial $f \in H^k$ y una cierta función gaussiana

$$\Phi(z) = e^{-|z|^2}$$

reescalada en función del tiempo que ha pasado. Se ve entonces que existe un cierto parecido entre los mollifiers del Capítulo 2 y la solución de la ecuación del calor, siendo la única diferencia que la gaussiana no tiene soporte compacto. Sin embargo, esta falta de soporte compacto no impide que, si $t > 0$, podamos tomar tantas derivadas como queramos de u sin más que pasárselas a la gaussiana de la manera vista al principio del curso. Esto nos hace pensar en que las soluciones de las ecuaciones parabólicas experimentan un *efecto regularizante* e incluso ganan derivadas con respecto al dato inicial. Es decir, que si el dato inicial es $L^2(\mathbb{R}^d)$, la solución u es $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ o incluso $C^2(\mathbb{R}^d)$ si $t > 0$.

Esto podía deducirse también de la expresión para \hat{u} ya que la gaussiana permitiría absorber multiplicadores de tipo polinómico $|\xi|^n$.

En el resto de esta sección vamos a explicar un argumento clásico para probar ese efecto regularizante. Este argumento se llama iteración de Moser y se basa en realizar una serie de estimaciones para $\|u\|_{L^p}$ de manera que al final se pueda pasar al límite en p para concluir que, si $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ y además decae. El argumento puede describirse de la siguiente manera

1. Se estima la evolución de la norma L^1 .
2. Se usa la información sobre la norma L^1 junto con la desigualdad de Nash para conseguir una estimación de la norma L^2 .
3. Se utiliza la cota de la norma L^2 para inferir el comportamiento de la norma L^4 .
4. Ahora se itera de manera que se utiliza el conocimiento sobre el comportamiento de la norma $L^{2^{k-1}}$ para acotar la norma L^{2^k} .
5. El último paso es pasar al límite en k para concluir el comportamiento de la norma L^∞ .

Lo importante de esta técnica es que puede implementarse para problemas no-lineales bastante generales lo que, úniado a su sencillez, la hace una de las herramientas básicas en el estudio de este tipo de ecuaciones en derivadas parciales.

Vamos a considerar (43) en el caso $d = 1$ aunque podría modificarse para considerar cualquier dimension d . Recordamos que estamos *asumiendo* que la solución de (43) existe, es regular y además decae suficientemente rápido para $|x| \gg 1$.

De esta manera, si $f > 0$ durante un cierto tiempo al menos $u > 0$ por continuidad y se tiene que

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u(x, t) dx = 0,$$

de donde

$$\|u(t)\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}.$$

Si multiplicamos la ecuación por u e integramos en espacio obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 u u dx = \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x, t)|^2 dx$$

Si ahora usamos la desigualdad de Nash (30) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq -c \frac{\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^6}{\|u\|_{L^1(\mathbb{R})}^4} = -c \frac{\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^6}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^4}.$$

Por lo tanto podemos integrar y así obtenemos

$$(46) \quad \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{\sqrt{1 + c \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^4}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^4} t}} \leq \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^2}{\sqrt{c} \sqrt{t}},$$

y entonces podemos escribir

$$(47) \quad \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_1 \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\sqrt[4]{t}}.$$

Hemos obtenido así una estimación del decaimiento de la norma L^2 de la solución. Cabe entonces preguntarse por el comportamiento de otras normas. Si nos fijamos ahora en el caso de la norma L^4 podemos calcular

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 = \int_{\mathbb{R}} (u(x, t))^3 \partial_t u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} (u(x, t))^3 \partial_x^2 u(x, t) dx.$$

Si integramos por partes y usamos la desigualdad de Nash (30) conseguimos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (u(x, t))^3 \partial_x^2 u(x, t) dx &= -3 \int_{\mathbb{R}} (u(x, t))^2 (\partial_x u(x, t))^2 dx \\ &= -\frac{3}{4} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x (u^2)|^2 dx \\ &\leq -C \frac{3 \|u^2\|_{L^2(\mathbb{R})}^6}{4 \|u^2\|_{L^1(\mathbb{R})}^4}. \end{aligned}$$

Si ahora expresamos el lado derecho en términos de normas de u en vez de en normas de potencias de u llegamos a

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 \leq -c \frac{\|u\|_{L^4(\mathbb{R})}^{12}}{\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^8}.$$

Entonces se tiene que

$$c \frac{\|u\|_{L^4(\mathbb{R})}^{12}}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^8} t^2 \leq \frac{\|u\|_{L^4(\mathbb{R})}^{12}}{\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^8},$$

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^4(\mathbb{R})}^4 \leq -c \frac{\|u\|_{L^4(\mathbb{R})}^{12}}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^8} t^2,$$

y finalmente

$$(48) \quad \|u(t)\|_{L^4(\mathbb{R})} \leq C_2 \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{t^{3/8}}.$$

Reparamos entonces en que nuestro conocimiento de la evolución de L^1 nos permitió estimar el decaimiento de la norma L^2 y fue este decaimiento de la norma L^2 el que nos permitió calcular una cota para la norma L^4 . Cabe entonces preguntarse si esto que sabemos sobre la norma L^4 puede usarse para la norma L^{16} , y así sucesivamente con el fin último de conseguir información sobre la evolución de la norma L^∞ . A esta iteración se le conoce como *iteración de Moser*.

En general, para $p \geq 2$, tenemos que

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p = \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^{p-2} u(x,t) \partial_t u(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^{p-2} u(x,t) \partial_x^2 u(x,t) dx.$$

Integrando por partes podemos calcular

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^{p-2} u(x,t) \partial_x^2 u(x,t) dx &= - \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^{p-2} |\partial_x u(x,t)|^2 dx \\ &\quad - (p-2) \int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^{p-2} |\partial_x u(x,t)|^2 dx \\ &= - \frac{4(p-1)}{p^2} \int_{\mathbb{R}} |\partial_x (u^{p/2})|^2 dx \\ &\leq -4C \frac{p-1}{p^2} \frac{\|u^{p/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^6}{\|u^{p/2}\|_{L^1(\mathbb{R})}^4}, \end{aligned}$$

donde hemos usado (30). Se tiene que

$$\|u^{p/2}\|_{L^2(\mathbb{R})}^6 = \left[\int_{\mathbb{R}} u^p(x) dx \right]^3 = \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^{3p},$$

$$\|u^{p/2}\|_{L^1(\mathbb{R})}^4 = \left[\int_{\mathbb{R}} u^{p/2}(x) dx \right]^4 = \|u\|_{L^{p/2}(\mathbb{R})}^{2p}.$$

Entonces la evolución de la norma podemos estimarla como

$$(49) \quad \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq -4C \frac{p-1}{p} \frac{\|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^{3p}}{\|u\|_{L^{p/2}(\mathbb{R})}^{2p}}.$$

Tras observar detenidamente (46) y (48), nos damos cuenta de que parece que la norma L^p con $p = 2^k$ satisface

$$(50) \quad \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_k \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}},$$

donde C_k es una constante que depende de p . Observamos que, aún siendo esta desigualdad cierta, no podemos pasar al límite en k (y por lo tanto al límite en p) para concluir el decaimiento de la norma L^∞ ya que no tenemos control del comportamiento de C_k conforme k crece. Es decir, es en principio posible que C_k diverja conforme k crece.

Para probar (50) para $p = 2^k$ vamos a razonar por inducción en k . Usando (50) con $p = 2^{k-1}$ como hipótesis de inducción, tenemos que (49) para $p = 2^k$ se reduce a

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq -\frac{4C}{C_{k-1}^{2p}} \frac{p-1}{p} t^{p-2} \frac{\|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^{3p}}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^{2p}}.$$

De donde se concluye la cota

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq \frac{\sqrt{p} C_{k-1}^p \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^p}{\sqrt{8C} t^{p/2-1/2}},$$

y, equivalentemente,

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{p}{8C}\right)^{\frac{1}{2p}} C_{k-1} \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}}.$$

Podemos entonces definir las constantes de forma recursiva como

$$(51) \quad C_k = \left(\frac{2^k}{8C}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}} C_{k-1}, \quad k > 2,$$

con las anteriores C_1 y C_2 .

Para pasar al límite $k \rightarrow \infty$ y concluir el decaimiento de la norma L^∞ debemos asegurar que las constantes C_k están uniformemente acotadas, *i.e.*

$$C_k \leq L < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Para resolver la recurrencia (51) observamos que si definimos

$$b_k = \left(\frac{2^k}{8C}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}},$$

y

$$a_k = \frac{C_k}{\prod_{j=2}^k b_j},$$

(51) se puede escribir como

$$C_k = b_k C_{k-1}, \quad k > 2,$$

y además se tiene

$$a_k - a_{k-1} = \frac{C_k}{\prod_{j=2}^k b_j} - \frac{C_{k-1}}{\prod_{j=2}^{k-1} b_j} = \frac{C_k}{\prod_{j=2}^k b_j} - b_k \frac{C_{k-1}}{\prod_{j=2}^k b_j} = 0.$$

Entonces,

$$a_k = a_2 = \frac{C_2}{b_2},$$

y

$$C_k = C_2 \prod_{j=3}^k b_j,$$

de donde se consigue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \log \left(\frac{C_k}{C_2} \right) = \sum_{j=3}^{\infty} \log(b_j) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\log \left(\frac{2^j}{8C} \right)}{2^{j+1}} = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{j \log(2) - \log(8C)}{2^{j+1}} \leq \log(L) < \infty,$$

para cierto L suficientemente grande. Como consecuencia obtenemos que existe M suficientemente grande tal que

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq M \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\sqrt{t}}.$$

5.2.3 Ecuaciones no-lineales

En esta sección vamos a considerar un tipo concreto de problema no-lineal que nos sirva para introducir tanto un nuevo concepto de solución (la llamada solución *mild*).

Este concepto de solución fue introducido por Browder en 1964.

El propósito de esta sección es estudiar cómo se puede el teorema de punto fijo de Banach para probar la existencia de solución para un problema parabólico no-lineal. Esta técnica la vamos a ejemplificar con el siguiente problema

$$(52) \quad \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = -u \partial_x u \text{ con } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T),$$

y dato inicial

$$u(x, 0) = f(x) \in L^2.$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Burgers. Así, nuestro objetivo es demostrar la existencia de solución para este problema.

Si fijamos $U \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$, podemos entonces definir el siguiente problema lineal

$$(53) \quad \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = -U \partial_x u \text{ con } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T),$$

y dato inicial

$$u(x, 0) = f(x) \in L^2.$$

Este problema lineal tiene solución explícita usando el principio de Duhamel. En efecto, si tomamos la transformada de Fourier de la ecuación obtenemos una familia de EDOs que podemos resolver mediante un factor integrante para conseguir

$$(54) \quad \hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{f}(\xi) + \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)} i \xi \hat{F}(\xi, s) ds,$$

donde

$$F = -\frac{U^2}{2}.$$

Decimos que u es una solución *mild* del problema (53) si cumple (54). Además observamos que se tiene la siguiente estimación

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} -U \partial_x U u dx$$

e, integrando por partes y usando la desigualdad de Hölder, se llega a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \|\partial_x u\|_{L^2} \|U^2\|_{L^2} \leq \frac{1}{4} \|\partial_x u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|U\|_{L^4}^2.$$

Si ahora usamos la desigualdad de interpolación entre espacios de Lebesgue

$$\|U\|_{L^4}^4 \leq \|U\|_{L^\infty}^2 \|U\|_{L^2}^2,$$

junto con la desigualdad

$$U^2(x) = \int_{-\infty}^x \partial_y (U^2) dy = \int_{-\infty}^x 2U \partial_y U dy \leq 2 \|U\|_{L^2} \|\partial_x U\|_{L^2}$$

llegamos a

$$\|U\|_{L^4}^4 \leq 2 \|\partial_x U\|_{L^2} \|U\|_{L^2}^3.$$

Por lo tanto se obtiene que

$$\|U\|_{L^4}^2 \leq 2 \|\partial_x U\|_{L^2}^{1/2} \|U\|_{L^2}^{3/2} \leq \|\partial_x U\|_{L^2} + \|U\|_{L^2}^3.$$

Insertando esta cota en la estimación anterior se consigue que

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2} \|\partial_x u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} (\|\partial_x U\|_{L^2} + \|U\|_{L^2}^3).$$

Integrando en tiempo se concluye que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{3}{2} \int_0^t \|\partial_x u(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\partial_x U(s)\|_{L^2} + \|U(s)\|_{L^2}^3 ds \\ &\leq \|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \sqrt{t} \left(\int_0^t \|\partial_x U(s)\|_{L^2}^2 ds \right)^{1/2} + t \sup_{0 \leq s \leq t} \|U(s)\|_{L^2}^3. \end{aligned}$$

La fórmula (54) y las estimaciones anteriores nos permiten definir el operador

$$\mathcal{T} : L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1) \rightarrow L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$$

tal que

$$\mathcal{T}U = u.$$

Nuestro objetivo es entonces demostrar la existencia un punto fijo para este operador \mathcal{T} . Si conseguimos demostrar la existencia de un punto fijo para \mathcal{T} habremos concluido la existencia de solución mild para la ecuación anterior. Antes de seguir debemos recordar un resultado de punto fijo conocido como Teorema de punto de fijo de Banach

Teorema 34 (Punto fijo de Banach). Sea X un espacio de Banach y sea $\mathcal{T} : X \rightarrow X$ una aplicación tal que

$$\|\mathcal{T}(u) - \mathcal{T}(v)\|_X \leq K\|u - v\|_X$$

con $K < 1$. Entonces \mathcal{T} tiene un único punto fijo.

Este teorema puede utilizarse para demostrar el siguiente resultado

Teorema 35 (Punto fijo). Sea X un espacio de Banach y sea $B : X \times X \rightarrow X$ un operador bilineal tal que

$$\|B(u, v)\|_X \leq C_0\|u\|_X\|v\|_X.$$

Entonces, si

$$\|u_0\|_X \leq \frac{1}{4C_0}$$

el problema

$$u = u_0 + B(u, u)$$

tiene una solución única en X tal que

$$\|u\|_X \leq 2\|u_0\|_X.$$

Demostración. Definimos el operador

$$\mathcal{F}(u) = u_0 + B(u, u),$$

y consideramos la bola

$$B(0, R) \subset X$$

donde R viene dado por

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_0\|u_0\|_X}}{2C_0}.$$

Es conveniente notar que R es solución de la ecuación de segundo grado

$$0 = \|u_0\|_X - x + C_0x^2.$$

Se tiene que

$$\|\mathcal{F}(u)\|_X \leq \|u_0\|_X + \|B(u, u)\|_X \leq \|u_0\|_X + C_0\|u\|_X^2.$$

Y si $u \in B(0, R)$ entonces

$$\|\mathcal{F}(u)\|_X \leq \|u_0\|_X + C_0R^2 = R,$$

y por lo tanto

$$\mathcal{F} : B(0, R) \subset X \rightarrow B(0, R) \subset X.$$

Ahora queremos aplicar el teorema del punto fijo de Banach. Para ello debemos ver que \mathcal{F} es un operador contractivo en la bola $B(0, R)$. Usando que B es bilineal podemos estimar

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_X &= \|B(u, u) - B(v, v)\|_X \\ &= \|B(u, u) - B(u, v) + B(u, v) - B(v, v)\|_X \\ &= \|B(u, u - v) + B(u - v, v)\|_X \\ &\leq \|B(u, u - v)\|_X + \|B(u - v, v)\|_X \\ &\leq 2C_0R\|u - v\|_X. \end{aligned}$$

Ahora observamos que por la definición de R se tiene que

$$2C_0R < 1$$

y el operador \mathcal{F} es una contracción de donde se infiere la existencia del punto fijo. \square

Para aplicar este resultado y concluir la existencia de soluciones a nuestra ecuación (54), debemos definir

$$\widehat{B(u, v)}(\xi, t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)} (i\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\chi, s) \hat{v}(\xi - \chi, s) d\chi \right) ds,$$

y el espacio

$$X = L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1).$$

Ahora basta con demostrar que B es acotada en este espacio. Es decir, queremos conseguir la estimación

$$\|B(u, v)\|_X \leq C_0 \|u\|_X \|v\|_X,$$

donde

$$\|f\|_X = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x f\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R})}.$$

Para ello comenzamos observando que como L^2 es un espacio de Hilbert se tiene que

$$\|u\|_{L^2}^2 = \langle u, u \rangle_{L^2},$$

de donde

$$\|u\|_{L^2} = \sup_{\|v\|_{L^2}=1} \langle u, v \rangle_{L^2}.$$

Entonces, usando la desigualdad de Young para convoluciones para la integral en tiempo con $p = q = 2$ y $r = \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)} i\xi \hat{F}(\xi, s) ds \right\|_{L^2} &= \sup_{\|\hat{v}\|_{L^2}=1} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)} i\xi \hat{F}(\xi, s) ds \hat{v}(\xi) d\xi \right| \\ &= \sup_{\|\hat{v}\|_{L^2}=1} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)} i\xi \hat{v}(\xi) \hat{F}(\xi, s) ds d\xi \right| \\ &\leq \sup_{\|\hat{v}\|_{L^2}=1} \int_0^t \|e^{-|\cdot|^2(t-s)} |\xi| \hat{v}(\xi)\|_{L^2} \|\hat{F}(s)\|_{L^2} ds \\ &\leq \|F\|_{L^2(0, T; L^2)} \|G\|_{L^2(0, T; L^2)}, \end{aligned}$$

donde

$$\hat{G}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} i\xi \hat{v}(\xi)$$

y por lo tanto

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)} i\xi \hat{F}(\xi, s) ds \right\|_{L^2} \leq C \|F\|_{L^2(0, T; L^2)}.$$

De manera similar

$$\left\| \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-s)} |\xi|^2 \hat{F}(\xi, s) ds \right\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R})} \leq C \|F\|_{L^2(0, T; L^2)}.$$

Usando ahora la forma de B y de F junto con las desigualdades anteriores obtenemos

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|B(u, v)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_x B(u, v)\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R})} \leq C \|\hat{u} * \hat{v}\|_{L^2(0, T; L^2)}.$$

Usando la desigualdad de Young llegamos a

$$\begin{aligned} \|\hat{u} * \hat{v}\|_{L^2(0, T; L^2)} &\leq \|\hat{u}\|_{L^2(0, T; L^1)} \|\hat{v}\|_{L^2(0, T; L^2)} \\ &\leq \|\hat{u}\|_{L^2(0, T; L^1)} \|v\|_{L^2(0, T; L^2)} \\ &\leq C\sqrt{T} \|u\|_{L^2(0, T; H^1)} \|v\|_{L^\infty(0, T; L^2)}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Sobolev.

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \|B(u, v)\|_X &\leq C \|u\|_{L^2(0, T; H^1)} \|v\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \\ &\leq C\sqrt{T} \|u\|_X \|v\|_X, \end{aligned}$$

y se concluye el la existencia de un punto fijo sin más que considerar $0 < T \ll 1$ y aplicar el teorema 35.

5.3 CONCLUSIONES

En esta sección hemos estudiado algunas ecuaciones en derivadas parciales lineales. Concretamente hemos considerado la ecuación de Helmholtz, del calor y de Airy. En este estudio hemos hecho uso de todas las ideas y los resultados de los capítulos anteriores.

Los principales conceptos introducidos han sido las soluciones débiles y las soluciones mild. Estas nuevas nociones de solución son más generales que la solución clásica y, por lo tanto, en principio es más fácil demostrar la existencia de dicha solución débil o mild.

Hemos estudiado además el lema de Lax-Milgram para demostrar la existencia de solución débil tanto de problemas elípticos como de problemas parabólicos lineales. Para el caso de problemas no-lineales hemos visto varios resultados de punto fijo con los que la existencia de solución para el problema no-lineal se reducía a una aplicación de los resultados de existencia de un problema lineal y un esquema de punto fijo.

De la misma manera hemos visto ciertas propiedades cualitativas de las ecuaciones parabólicas como es el decaimiento de la solución conforme avanza el tiempo.

5.4 OTRAS FUENTES

El lector interesado en profundizar más puede consultar [2, 3, 4, 14, 17, 22, 20] Uno de los libros básicos (pero al mismo tiempo muy completo) sobre ecuaciones en derivadas parciales es el libro de Evans [14]. En este libro se encuentra básicamente todo lo visto en este curso (quizá algunas partes con menor nivel de detalle) y además contiene más material. Así puede estudiarse

desde los espacios de Sobolev a la ecuación del calor pasando por el Lema de Lax Milgram sin más que leer el capítulo adecuado.

Un libro un poco más moderno y con un enfoque diferente es el de Alazard y Zuily [2]. Este libro tiene un primer capítulo *resumen* del material que va a utilizar como por ejemplo los espacios L^p , etc, para luego centrarse en el estudio práctico de las ecuaciones. Así en 7.2 se puede estudiar la teoría correspondiente a los problemas elípticos mientras que en 7.3 está la teoría de los problemas parabólicos. Es conveniente notar que la ecuación de Burgers tiene su propia sección en 7.6.

Uno de los libros clásicos para problemas elípticos es el Gilbarg y Trudinger [17]. Este libro contiene gran parte de la teoría clásica para este tipo de ecuaciones en derivadas parciales. De la misma forma el lector interesado puede encontrar el Lema de Lax-Milgram y una aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales en los libros de Brezis [3, 4]

Un libro que trata un problema tan concreto como es el problema de las ecuaciones de Navier-Stokes con técnicas muy útiles es el de Lemarié-Rieusset [20]. En él se puede conocer más sobre resultados e ideas muy adaptados a problemas parabólicos no-lineales. El lector interesado en métodos avanzados para problemas de evolución tanto parabólicos como elípticos puede consultar el libro de Majda y Bertozzi [22]. En particular en su capítulo 3 se estudia el método de Leray para probar la existencia de soluciones fuertes a un problema de evolución.

Hay multitud de notas de clase de diferentes cursos de ecuaciones en derivadas parciales disponibles en la web. Por ejemplo, el lector interesado puede acudir a las notas de John Hunter [18] <https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/pdes/pdes.html>

Además, el lector que quiera saber más de ecuaciones dispersivas puede consultar las notas de Willie Wong [26] https://qnlw.info/course-notes/dispersive_notes/dispersive_notes.pdf o las notas de Terence Tao <https://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/chapter.pdf>.

5.5 EJERCICIOS SUGERIDOS

Ejercicio 41. Se considera $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto con frontera $\partial\Omega$ suave y se define el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

¿Puede aplicarse el lema de Lax-Milgram para demostrar la existencia de soluciones?

Ejercicio 42. Se considera $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto con frontera $\partial\Omega$ suave y se define el problema

$$\begin{aligned} u + \partial_x u + \partial_y u - \Delta u &= f && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

¿Puede aplicarse el lema de Lax-Milgram para demostrar la existencia de soluciones?

Ejercicio 43. Se define el problema

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$

¿Puede aplicarse el lema de Lax-Milgram para demostrar la existencia de soluciones?

Ejercicio 44. Se define la forma bilineal

$$\gamma \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d b_j^2 \partial_{x_j} u(x) \partial_{x_j} v(x) dx$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^d$ ¿Bajo qué condiciones en γ y b_j es una forma bilineal coerciva en $H^1(\Omega)$?

Ejercicio 45. Se define la forma bilineal

$$\gamma \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d b_j^2 \partial_{x_j} u(x) \partial_{x_j} v(x) dx$$

Si Ω es un conjunto acotado en \mathbb{R}^d con frontera regular ¿Bajo qué condiciones en γ y b_j es una forma bilineal coerciva en $H_0^1(\Omega)$?

Ejercicio 46. Se define el problema

$$\partial_t u - \Delta u = -u \quad \text{con } x \text{ en } \mathbb{R}^2$$

y dato inicial

$$u(x,0) = f(x) \in L^1 \cap L^\infty.$$

Da una estimación del decaimiento de la solución.

Índice alfabético

- Aproximación de mínimos cuadrados, 42
- Clase de Schwartz, 55, 70
- Condición Dirichlet, 93
- Condición Neumann, 93
- Convergencia L^p , 24
- Convergencia débil, 24
- Convergencia débil-*, 60
- Convergencia en espacios de funciones, 24
- Convergencia fuerte, 24
- Convergencia puntual, 24
- Convergencia series de Fourier, L^2 , 43, 46
- Convergencia series de Fourier, puntual, 45
- Convergencia series de Fourier, uniforme, 44
- Convergencia uniforme, 24
- Convolución, 26, 28, 61
- Delta de Dirac, 58, 59
- Delta de Kronecker, 46
- Densidad, 70
- Derivada bajo la integral, 28, 29
- Derivada débil, 61, 67
- Desigualdad de Bessel, 43, 47
- Desigualdad de Hölder, 20
- Desigualdad de Nash, 78, 101
- Desigualdad de Poincaré, 78
- Desigualdad de Sobolev, 75, 77
- Desigualdad de Young, 27
- Desigualdad integral de Minkowski, 30
- desigualdades de Gagliardo-Nirenberg, 78
- Disipación, 99
- Dispersión, 112, 114
- Distribuciones, 58, 60
- Distribuciones temperadas, 62
- Ecuación de Airy, 109
- Ecuación de Burgers, 104, 115
- Ecuación de ondas, 108
- Ecuación del calor, 95
- Ecuaciones no-lineales, 93, 104
- Espacio L^1 , 15
- Espacio L^2 , 18
- Espacio L^∞ , 21
- Espacio L^p , 20
- Espacio de Banach, 15
- Espacio de Hilbert, 19, 69
- Espacio dual de L^p , 22
- Espacios L^p , 11
- Espacios de Sobolev, 67
- Espacios de Sobolev en dominios acotados, 79, 93
- Espacios de Sobolev fraccionarios, 72
- Espacios de Sobolev-Slobodeckij, 74
- Fenómeno de Gibbs, 46
- Forma bilineal, 87
- Formulación débil, 87, 88, 92, 93
- Función cut-off, 31
- Funcional, 59
- Funciones test, 61
- Integrales singulares, 74
- Interpolación entre espacios H^s , 71
- Interpolación entre espacios L^p , 20
- Iteración de Moser, 100, 102
- Laplaciano fraccionario, 74
- Lema de Fatou, 12
- Lema de Lax-Milgram, 87, 95
- Lema de Riemann-Lebesgue, 43, 49
- Leyes de conservación, 109
- Mollifier, 54, 80, 100
- mollifier, 54
- Núcleo de Dirichlet, 40
- Operador de Dirichlet-Neumann, 74

- Partición de la unidad, 31
- Principio de Duhamel, 105
- Principio de incertidumbre, 77
- Problema bien propuesto, 85, 86

- Relación de dispersión, 114

- Serie de Fourier, 37
- Solución débil, 87, 88, 92, 95, 96, 99
- Solución mild, 104, 105
- Sucesión de Cauchy, 15
- Suma de Riemann, 48

- Teorema de Ascolí-Arzelá, 80
- Teorema de Banach-Alaoglu, 26
- Teorema de Beppo-Levi, 14
- Teorema de Fubini, 14
- Teorema de la convergencia dominada, 12
- Teorema de la convergencia monótona, 12
- Teorema de Picard, 109
- Teorema de punto fijo de Banach, 106, 110
- Teorema de punto fijo de Schauder, 93
- Teorema de Rellich, 80, 95
- Teorema de representación de Riesz, 87
- Teorema de Tonelli, 14
- Teorema del punto dijo de Banach, 107
- Test integrales, 24
- Transformada de Fourier, 37, 48, 62
- Transformada de Fourier inversa, 48, 54, 57
- Transformada de Fourier, L^1 , 49
- Transformada de Fourier, L^2 , 55
- Transformada de Fourier, propiedades, 51
- Traza, 81

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Robert A Adams and John JF Fournier. *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.
- [2] Thomas Alazard and Claude Zuily. Tools and problems in partial differential equations.
- [3] Haim Brézis. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Alianza, 1984.
- [4] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] Marek Capinski and Peter E Kopp. *Measure, integral and probability*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] Lennart Carleson. On convergence and growth of partial sums of fourier series. *Acta Mathematica*, 116(1):135–157, 1966.
- [7] R Courant and D Hilbert. Methods of mathematical physics (interscience publ., new york and london), vol. 1. *vol, 1*, 1962.
- [8] Alex DD Craik. The origins of water wave theory. *Annual review of fluid mechanics*, 36, 2004.
- [9] Olivier Darrigol. The acoustic origins of harmonic analysis. *Archive for history of exact sciences*, 61(4):343–424, 2007.
- [10] Olivier Darrigol and Uriel Frisch. From newton’s mechanics to euler’s equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 237(14-17):1855–1869, 2008.
- [11] Françoise Demengel, Gilbert Demengel, and Reinie Erné. *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*. Springer, 2012.
- [12] Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci, and Enrico Valdinoci. Hitchhiker’s guide to the fractional sobolev spaces. *Bulletin des sciences mathématiques*, 136(5):521–573, 2012.
- [13] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29. American Mathematical Soc., 2001.
- [14] Lawrence C Evans. Partial differential equations, ams. 2002.
- [15] Harley Flanders. Differentiation under the integral sign. *The American Mathematical Monthly*, 80(6):615–627, 1973.
- [16] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons, 1999.
- [17] David Gilbarg and Neil S Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. springer, 2015.

- [18] John K Hunter. Notes on partial differential equations. *Lecture Notes*, <https://www.math.ucdavis.edu/hunter/pdes/pdes.html>, Department of Mathematics, University of California, 2014.
- [19] Sergiu Klainerman. Pde as a unified subject. In *Visions in Mathematics*, pages 279–315. Springer, 2010.
- [20] Pierre Gilles Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes problem in the 21st century*. CRC Press, 2018.
- [21] Elliott H Lieb, Michael Loss, et al. Graduate studies in mathematics. *Analysis*, 14, 2001.
- [22] Andrew J Majda and Andrea L Bertozzi. *Vorticity and Incompressible Flow*, volume 27. Cambridge University Press, 2002.
- [23] Martin Raussen and Christian Skau. Interview with louis nirenberg. *Notices of the aMs*, 63(2), 2016.
- [24] Elias M Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, volume 2. Princeton university press, 1970.
- [25] Luc Tartar. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2007.
- [26] Willie Wong. An introduction to dispersive equations. *Lectures notes for course MTH943*, Michigan State University, 2017.