En el Cálculo Infinitesimal desarrollado por Newton y Leibnitz es el cálculo diferencial el que cobra mayor importancia, quedando la integral relegada al papel de operación inversa de la diferencial. Una de las razones que justifican que esto fuera así es que ambos consideraban sólo funciones analíticas, para las que realmente diferencial e integral son operaciones inversas.

En este sentido el desarrollo del cálculo integral tiene mucho que ver con la evolución del concepto de función.

Durante el siglo XVIII el cálculo aporta pocas novedades. Una de ellas es el trabajo de Lagrange sobre los desarrollos de potencias, y en particular la demostración de la fórmula de Taylor. Desde el punto de vista que nos ocupa, destaca la observación de Euler sobre la necesidad de considerar, a propósito de su estudio de las series trigonométricas y de la ecuación de ondas, funciones más generales que las que él llamaba "continuas", y utilizar también funciones "discontinuas". El concepto de función continua se aplicaba en el siglo XVIII a las funciones que podían expresarse mediante una única fórmula analítica. Las funciones "discontinuas" eran lo que hoy llamaríamos "continuas regulares a trozos", es decir, funciones continuas que no podían expresarse como una única fórmula en un intervalo, pero que podían describirse como la unión de una cantidad finita de arcos de curva. Por ejemplo una función "discontinua" era la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Este tipo de funciones "discontinuas" eran necesarias para Euler por cuanto aparecían de forma natural en problemas como el de la cuerda vibrante al considerar las posibles curvas iniciales.

Es en el primer tercio del siglo XIX cuando Cauchy consigue establecer unas bases sólidas para la matemática moderna. Define el concepto de función prácticamente como se considera hoy dia; establece la definición de límite, y con ésta como punto de partida define las funciones continuas y la derivada, y deduce sus propiedades fundamentales. (Hay que decir aquí que en la Enciclopedia de D'Alembert éste daba ya una definición clara de los conceptos de límite y derivada e insistía en considerarlos como el fundamento del cálculo, aunque estas ideas no llegaron a alcanzar entonces el eco que se merecían).

Desde el punto de vista de Cauchy, la existencia de la derivada se cuestiona, y empieza a ser algo más que debe estudiarse y demostrarse por medios analíticos en cada caso. En esta linea de ideas, Bolzano asegura que existen funciones continuas que no tienen derivada finita en ningún punto; un ejemplo concreto es presentado por Weierstrass en 1861: la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ con $b \in (0, 1)$, y a un entero impar tal que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

En esta situación, Cauchy formaliza la definición de integral volviendo sobre el concepto de integral definida y el método exahustivo de los antiguos griegos. Considera una función continua f en un intervalo $[a, b]$; para cada número natural n considera una división del intervalo en n subintervalos de la forma $[x_i, x_{i+1}]$, y define la integral de f como el límite de las sumas $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ cuando la longitud de los intervalos tiende a cero. La demostración que da Cauchy de la existencia de este límite es erronea, a falta del concepto de continuidad uniforme de funciones, pero aún así la definición era válida para funciones continuas o continuas a trozos en intervalos compactos. Esta teoría fué expuesta con detalle en los textos sobre la enseñanza del cálculo que escribió para la Escuela Politécnica de Paris en los años 1821, 1822 y 1829.

Los trabajos de Fourier sobre la ecuación del calor, y la determinación de los coeficientes de la serie trigonométrica que permite representar funciones no continuas, tuvo un efecto importante en el desarrollo del cálculo integral. Fourier calcula las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\cos nx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\mathsf{sen} nx$$

para los coeficientes, pero no pude demostrar la convergencia de la serie. Estas fórmulas hacen plantearse a Dirichlet el estudio de las funciones que son susceptibles de sustituirse en la integral para obtener convergencia de la serie trigonométrica. Empieza entonces el estudio del conjunto de puntos de discontinuidad de una función, y Dirichlet presenta como contraejemplo la función que hoy lleva su nombre, que toma un valor constante en todos los números racionales, y otro valor también constante sobre los irracionales.

Riemann, también interesado en el estudio de las series trigonométricas, argumenta que funciones como las de Dirichlet no van a darse nunca en fenómenos naturales, pero reconoce que tienen un papel importante en el esclarecimiento de los fundamentos mismos del cálculo infinitesimal, y además parecen tener importantes aplicaciones en la incipiente teoría de números. De esta forma Riemann justifica su interés en el desarrollo de una nueva técnica de integración, basada en el método de aproximación de Cauchy pero que considerará funciones más generales.

Riemann considera funciones acotadas, define también las particiones del intervalo dominio de la función, y considera las sumas de aproximación tomando los valores de f en puntos arbitrarios de cada subintervalo en vez de escoger siempre el extremo; define entonces la integral como el límite de estas sumas cuando el diámetro de las particiones tiende a cero. Y con esta definición se pregunta para qué tipo de funciones existe este límite. El mismo Riemann da una caracterización de las funciones integrables en términos de la oscilación de la función, y pone un ejemplo de una función integrable Riemann cuyo conjunto de puntos de discontinuidad es denso en $[0, 1]$: la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

donde (x) es la diferencia entre x y el entero más próximo cuando x no es un múltiplo impar de $\frac{1}{2}$, y cero en otro caso.

La memoria de Riemann no fué publicada hasta 1867, después de su muerte. A partir de entonces y durante los últimos treinta años del siglo XIX la definición de la integral de Riemann fué reformulándose muchas veces, mejorando cada vez la comprensión del concepto de integral. Por ejemplo, es Darboux quien propone las definiciones de las sumas superiores e inferiores de Riemann y estudia sus propiedades, Volterra define las integrales superior e inferior como los límites de las sumas superiores e inferiores respectivamente, y es Peano quien las expresa como ínfimo de las sumas superiores y supremo de las inferiores.

Con el desarrollo del concepto de integral, se plantea por primera vez dar una definición matemática precisa del concepto de área de un recinto plano. Basándose en el método griego de Eudoxio, Peano define el "área interior" de un recinto plano como el supremo de las áreas de los polígonos contenidos en él, y el "área exterior" como el ínfimo de las áreas de los polígonos que lo contienen. Se comprueba entonces que en el caso de funciones acotadas no negativas las integrales superior e inferior coinciden con el área interior y el área exterior respectivamente del conjunto de ordenadas $E = \{(x,y), a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, y que cuando la función es integrable la integral coincide con el área. De esta forma se completa un círculo que vuelve la integral sobre su motivación original.

Las definiciones de Peano fueron consideradas después por Jordan, con la variante de que éste utiliza polígonos que son unión de rectángulos con lados paralelos a los ejes. Esta variante tenía la ventaja de poder generalizarse fácilmente a conjuntos de espacios de dimensión mayor que dos. Basándose en ellos, Jordan define en 1893 la integral de Riemann de funciones de varias variables definidas sobre "conjuntos medibles", conjuntos cuyas áreas interior y exterior coinciden. La introducción del concepto de conjunto medible en la definición de integral tendrá sin duda importancia en la teoría de integración desarrollada después por Lebesgue.

Dedicamos esta parte del curso a la construcción de la integral de Riemann para funciones reales de varias variables, y a la demostración de sus propiedades más importantes.

Como aplicaciones de la integral de Riemann estudiaremos las aplicaciones al cálculo vectorial: el punto de vista que adoptamos en este tema es el de estudiar las integrales de linea y superficie como generalizaciones de las integrales en dominios de la recta o del plano, e interpretar algunas de sus aplicaciones a problemas clásicos de la física como el trabajo realizado por un campo de fuerzas al mover una partícula, o el flujo de un campo de velocidades al atravesar una superficie. Para esto, consideraremos las expresiones paramétricas de las variedades de dimensión uno y dos. No pretendemos entrar en las técnicas más complejas de la geometría o la topología diferencial, ni buscamos la demostración de los resultados en su mayor generalidad, sino que por el contrario consideramos sólo los casos sencillos de los que puede darse una intepretación física o geométrica más o menos convincente. Estas aplicaciones las hemos separado en un capítulo aparte para no hacer éste demasiado largo.