1. Medida Exterior

La integral de Lebesgue surge del desarrollo de la integral de Riemann, ante las dificultades encontradas en las propiedades de paso al límite para calcular la integral de una función definida como límite puntual de una sucesión de funciones.

La teoría de Lebesgue se basa en un concepto más general de lo que es la medida de un conjunto que la definición euclídea de volumen, y lleva a la definición de una familia de conjuntos "medibles" que incluye a los conjuntos medibles – Jordan, y a la construcción de una integral que puede aplicarse en contextos más variados que la de Riemann (funciones no acotadas, dominios de integración no acotados, ...) y que tiene mejor comportamiento frente a las operaciones de límite de funciones. La integral de Lebesgue frente a la de Riemann supone un paso comparable a la construcción de los números reales frente a los racionales.

Vamos a empezar el estudio por la construcción de la medida de Lebesgue, y luego desarrollaremos su concepto de integral.

Definición (Medida Exterior de Lebesgue)**.**
Sea A un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Se define la medida exterior de Lebesgue de A como

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n),\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\ Q_n \text{ rectángulos cerrados}\}$$

donde el ínfimo se toma entre todas las familias numerables de rectángulos que recubren a A

m^* es una función de conjunto, definida en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, y con valores en $[0,\infty]$. Quizá convenga recordar algunas de propiedades de las operaciones en $[0,\infty]$ que nos pueden surgir:

- Si a es un número real, $a+\infty=\infty$ y $a-\infty=\infty$
- Si a es un número real, $a>0$, entonces $a\cdot\infty=\infty$
- Si a es un número real, $a<0$, entonces $a\cdot\infty=-\infty$
- En general $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ son indeterminaciones

Observaciones:

1. La definición puede hacerse indistintamente con rectángulos abiertos, cerrados, o semiabiertos.

   En efecto, si llamamos

$$n(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} v(S_n),\ A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n,\ S_n \text{ rectángulos abiertos}\}$$

es evidente que $n(A) \geq m^*(A)$, ya que si $\{S_n\}_n$ es una familia de rectángulos abiertos que recubre a A, la familia de sus adherencias $Q_n = \overline{S_n}$ es una familia de rectángulos cerrados que también recubre a A y la serie de los volúmenes de los Q_n es la misma que la de los S_n

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} v(S_n),\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n, S_n \text{ rectángulos abiertos}\} \subseteq$$

$$\subseteq \{\sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n),\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\ Q_n \text{ rectángulos cerrados}\}$$

Recíprocamente, sea $\epsilon > 0$, y sea $\{Q_n\}_n$ una familia de rectángulos que recubre a A tal que $\sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n) \leq m^*(A) + \epsilon/2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger un rectángulo abierto S_n que contenga ea Q_n, y tal que $v(S_n) \leq v(Q_n) + \epsilon/2^{n+1}$. Entonces $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(S_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \leq m^*(A) + \epsilon$$

Tomando ínfimos entre todas las posibles familias de rectángulos abiertos que recubren a A, tenemos

$$n(A) \leq m^*(A) + \epsilon$$

y como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, tiene que ser $n(A) \leq m^*(A)$. Con la desigualdad de antes se tiene el resultado.

2. Los conjuntos $A \in \mathbb{R}^n$ con $m^*(A) = 0$ son los conjuntos de medida cero definidos en el estudio de la integral de Riemann.

3. Además, la medida exterior generaliza el concepto de volumen de un rectángulo: si R es un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, $m^*(R) = v(R)$

   En efecto, una desigualdad es trivial, ya que si R es un rectángulo, y definimos $Q_1 = R$, y $Q_n = \emptyset$ si $n \geq 2$, entonces $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ y $m^*(R) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n) = v(R)$

   Por otro lado, sea $\{Q_n\}_n$ una familia numerable de rectángulos abiertos que recubra a R. Como R es compacto, esta familia tiene que admitir un subrecubrimiento finito, de modo que $R \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} Q_{n_j}$. Pero entonces sabemos que $v(R) \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{k} v(Q_{n_j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n)$.

   Tomando ínfimos entre todas las familias de rectángulos abiertos que recubren a R, se tiene $v(R) \leq m^*(R)$

El siguiente teorema recoge las propiedades más importantes de la medida exterior de Lebesgue:

En la Teoría de la Medida abstracta se pretende construir un procedimiento para medir conjuntos y para integrar funciones definidas en los subconjuntos de un espacio Ω. Dado un espacio Ω, una *medida exterior* es una función de conjunto μ definida en el conjunto de todos los subconjuntos de Ω que sea no negativa y verifique las tres primeras propiedades del teorema que viene a continuación. Las otras dos propiedades son propias de la medida de Lebesgue, y de algunas otras medidas en espacios topológicos o espacios métricos, que dotan a la estructura formada por el espacio y la medida de mejores propiedades de tipo topológico y geométrico, pero no son imprescindibles para la coherencia de la teoría y la construcción de una integral.

Teorema (Propiedades de la medida exterior).

1. $m^*(\emptyset) = 0$
2. *Si* $A \subseteq B$, $m^*(A) \leq m^*(B)$ (monotonía)
3. *Sea* $\{A_n\}_n$ *una familia numerable de conjuntos; entonces*

$$m^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \quad \text{(subaditividad)}$$

4. $m^*(A) = \inf\{m^*(G),\ G$ *abierto*, $A \subseteq G\}$ (regularidad)
5. *Para todo conjunto* A *y todo* $x \in \mathbb{R}^n$, $m^*(x + A) = m^*(A)$ (invariancia por traslaciones)

Demostración:

(Saltar al final de la demostración)

1) y 2) son triviales. Para demostrar 3), sea $\epsilon > 0$, y consideremos para cada A_n una familia numerable de rectángulos $\{Q_m^n\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m^n \quad \text{y} \quad \sum_{m=1}^{\infty} v(Q_m^n) < m^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

Entonces la familia de todos los rectángulos $\{Q_m^n, m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}\}$ verifica

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m^n \right)$$

y se tiene

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} v(Q_m^n) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(m^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \right) = \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

Como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, se deduce que

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

Para demostrar 4), una desigualdad es trivial, ya que si $A \subseteq G$ entonces por 2) la medida exterior de A es menor que la de G, así que

$$m^*(A) \leq \inf\{m^*(G),\ G \text{ abierto},\ A \subseteq G\}$$

Para la otra desigualdad, consideramos la definición de la medida exterior con rectángulos abiertos: dado $\epsilon > 0$, sea $\{Q_n\}_n$ una familia de rectángulos abiertos tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n) \leq m^*(A) + \epsilon$$

Basta definir $G_\epsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$, que es un abierto que contiene a A, y

$$m^*(G_\epsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n) \leq m^*(A) + \epsilon$$

Entonces

$$\inf\{m^*(G),\ G \text{ abierto},\ A \subseteq G\} \leq m^*(G_\epsilon) \leq m^*(A) + \epsilon$$

para cualquier $\epsilon > 0$ de donde se deduce que

$$\inf\{m^*(G),\ G \text{ abierto},\ A \subseteq G\} \leq m^*(A)$$

Por último, para demostrar 5) sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, y $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\{Q_n\}_n$ es una familia de rectángulos que recubre a A, entonces $\{x + Q_n\}_n$ es una familia de rectángulos que recubre a $x + A$, de modo que

$$m^*(x + A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(x + Q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n)$$

luego $m^*(x + A) \leq m^*(A)$

Análogamente $m^*(A) = m^*(-x + x + A) \leq m^*(x + A)$, por lo que se tiene la igualdad.

◀(Volver al enunciado) □

Sin embargo la medida exterior falla en cambio en una propiedad fundamental respecto al volumen: no es cierto en general que si A y B son conjuntos disjuntos, se tenga $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$, aunque hay que reconocer que tampoco es fácil encontrar ejemplos de conjuntos concretos para demostrar que la igualdad es falsa.

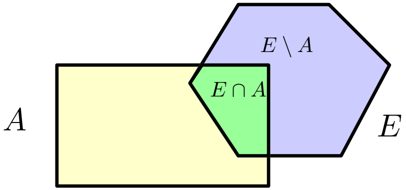
Si queremos conseguir que esta propiedad se verifique, debemos prescindir de algunos conjuntos. Esto da lugar a la definición de una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, para los cuales si se verifica la propiedad, que llamaremos conjuntos medibles - Lebesgue. La definición original de esta familia de conjuntos no es la que damos aquí, que se debe a Caratheodory, pero ésta resulta mucho más cómoda que la definición de Lebesgue. La comprobación de que ahora sí se verifica esta propiedad la haremos después, junto con el estudio del resto de las propiedades fundamentales de esta clase de conjuntos.

2. Medida de Lebesgue

Definición (Conjuntos Medibles – Lebesgue)**.**
Un conjunto A se dice medible –Lebesgue (en adelante conjunto medible) si verifica la siguiente propiedad:

Para todo conjunto E se verifica la igualdad

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$$



Llamamos $\mathfrak{M}$ a la familia de los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son medibles.

Se llama medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ a la restricción de la medida exterior m^* a $\mathfrak{M}$: $m : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$, $\quad m(A) = m^*(A)$.

En el capítulo siguiente veremos cómo se puede construir un conjunto no medible en la recta real. Y una vez encontrado uno, es fácil imaginar infinitos conjuntos distintos no medibles, en la recta o en el cualquier espacio $\mathbb{R}^n$

Algunas de las propiedades de los conjuntos medibles, y de sus medidas se recogen en el siguiente teorema:

Teorema (Propiedades de los conjuntos medibles - Lebesgue).

1. *Si* $A \in \mathfrak{M}$*, entonces* $A^c \in \mathfrak{M}$
2. *Si* A *y* B *son medibles, entonces* $A \cap B \in \mathfrak{M}$*; y por tanto* $A \setminus B \in \mathfrak{M}$
3. *Si* A *y* B *son medibles, entonces* $A \cup B \in \mathfrak{M}$*; y si además* $A \cap B$ *tiene medida finita,* $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$
4. *Si* $A_1, \ldots, A_k$ *es una familia finita de conjuntos medibles, entonces* $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathfrak{M}$ *y* $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathfrak{M}$
5. *Si* $\{A_i\}_i$ *es una familia numerable de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos, entonces* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$*. Además* $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$
6. *Si* $\{A_i\}_i$ *es una familia numerable de conjuntos medibles, entonces* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$ *y* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$
7. *Todo conjunto* A *con* $m^*(A) = 0$ *es medible*
8. *Si* $A \in \mathfrak{M}$*, para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $x + A \in \mathfrak{M}$ *y* $m(x + A) = m(A)$

Demostración: (Saltar al final de la demostración)

(1) Supongamos que A es medible, y sea E un conjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Entonces $E \cap A^c = E \setminus A$ y $E \setminus A^c = E \cap A$, luego

$$m * (E \cap A^c) + m^*(E \setminus A^c) = m^*(E \setminus A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E)$$

así que A^c es medible también.

(2) Sean ahora A y B medibles, y sea E un conjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Por ser A medible

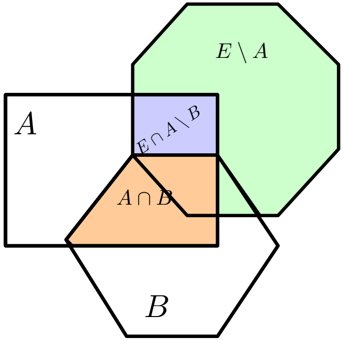
$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \tag{1}$$

Y por ser ahora B medible,

$$m^*(E \cap A) = m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \setminus B) \tag{2}$$

de donde sustituyendo en la ecuación (1) queda

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \setminus B) + m^*(E \setminus A) \geq \\ &\geq m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \setminus (A \cap B)) \end{aligned}$$



puesto que

$$(E \cap A \setminus B) \cup (E \setminus A) = E \setminus (A \cap B)$$

así que $A \cap B$ es medible.

Y como $A \setminus B = A \cap (B^c)$, también es medible.

(3) Sean ahora A y B dos conjuntos medibles. Por (1), sus complementarios A^c y B^c son medibles; por (2), la intersección de los complementarios $A^c \cap B^c$ es medible; y otra vez por (1) el complementario de este conjunto $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ es medible.

En cuanto a la formula para la medida de una unión de conjuntos, utilizando que A es medible con el conjunto $E = A \cup B$ tenemos

$$m(A \cup B) = m((A \cup B) \cap A) + m((A \cup B) \setminus A) = m(A) + m(B \setminus A)$$

y utilizando ahora que A es medible, con $E = B$

$$m(B) = m(B \cap A) + m(B \setminus A)$$

si $m(A \cap B)$ es finita, podemos despejar en la segunda ecuación la medida de $B \setminus A$ y sustituir en la primera ecuación, y queda

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

(4) Sea ahora $A_1, \ldots, A_k$ una familia finita de conjuntos medibles. Para cada N entre 2 y k podemos poner

$$\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{N-1} A_i \right) \cup A_N$$

Razonando por inducción, para $N = 1$, A_1 es medible. Si $\cup_{i=1}^{N-1} A_i$ es medible, entonces aplicando la propiedad (3), $\cup_{i=1}^{N} A_i$ es también medible. Repitiendo el proceso hasta $N = k - 1$ se obtiene que la unión $\cup_{i=1}^{k} A_i$ es medible.

Y poniendo

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^c \right)^c$$

y aplicando las propiedades (1) y (3), también la intersección $\cap_{i=1}^{k} A_i$ es medible.

(5) Sea $\{A_n\}_n$ una familia numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos (es decir, $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$). Y sea $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

La idea es estudiar las uniones finitas de conjuntos A_n, e intentar ver lo que ocurre si n tiende a ∞

Consideramos la familia de conjuntos $B_k = \cup_{n=1}^{k} A_n$. Por la propiedad (4), los conjuntos B_k son medibles. Además verifican para cada $k \in \mathbb{N}$

$$B_k = B_{k-1} \cup A_k \quad \text{y} \quad B_{k-1} \cap A_k = \emptyset$$

luego

$$B_k \cap A_k = A_k \quad \text{y} \quad B_k \setminus A_k = B_{k-1}$$

Sea E un conjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$.

Sabemos que

$$m^*(E) = m^*(E \cap B_k) + m^*(E \setminus B_k) \tag{3}$$

Utilizando ahora que A_k es medible

$$m^*(E\cap B_k)=m^*(E\cap B_k\cap A_k)+m^*(E\cap B_k\setminus A_k)=m^*(E\cap A_k)+m^*(E\cap B_{k-1})$$

Repitiendo el proceso con B_{k-1}

$$m(E\cap B_{k-1})=m^*(E\cap A_{k-1})+m^*(E\cap B_{k-2})$$

Y sustituyendo arriba

$$m^*(E\cap B_k)=m^*(E\cap A_k)+m(E\cap A_{k-1})+m^*(E\cap B_{k-2})$$

Y si lo repetimos k veces,

$$m^*(E\cap B_k)=\sum_{n=1}^{k}m^*(E\cap A_n)$$

Sustituyendo en la ecuación (3)

$$m^*(E)=\sum_{n=1}^{k}m^*(E\cap A_n)+m^*(E\setminus B_k)\geq\sum_{n=1}^{k}m^*(E\cap A_k)+m^*(E\setminus A)$$

puesto que $B_k \subseteq A$, y entonces $(E \setminus A) \subseteq (E \setminus B_k)$

Como esta desigualdad es cierta para todo k, tiene que ser cierta también para la serie, y

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \setminus A) \geq \\ &\geq m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap A_n\right) + m^*(E \setminus A) = \\ &= m^*\left(E \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)\right) + m^*(E \setminus A) = \\ &= m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \end{aligned}$$

Por tanto A es medible.

Además si en esta última cadena de desigualdades ponemos en particular $E = A$, tenemos

$$m(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(A \cap A_n) + m(A \setminus A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \geq m(A)$$

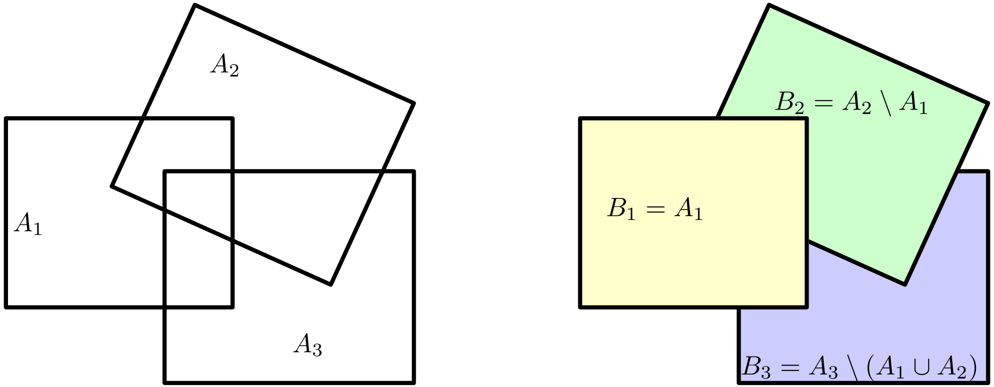
Luego efectivamente

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

(6) Sea ahora $\{A_n\}_n$ una familia numerable de conjuntos medibles (no necesariamente disjuntos dos a dos), y sea $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

La idea para demostrar que A es medible es escribirlo como unión de conjuntos disjuntos dos a dos, para lo cual basta definir

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1,\ \ldots, B_n = A_n \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} A_i)$$



Ahora los conjuntos B_n son conjuntos medibles disjuntos dos a dos, y su unión es medible, así que $A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es medible

Por otro lado aplicando la propiedad (1) el conjunto $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = (\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c$ también es medible.

(7) Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida cero. Si E es un conjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$, entonces

- como $E \cap A \subseteq A$, $m^*(E \cap A) \leq m^*(A) = 0$, luego $m^*(E \cap A) = 0$ también
- y como $E \setminus A \subseteq E$, $m^*(E \setminus A) \leq m^*(E)$

Sumando las dos ecuaciones

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \leq 0 + m^*(E)$$

Por tanto A es medible.

(8) Para terminar, sea A medible, y sea x un punto fijo de $\mathbb{R}^n$. Sabemos que la medida exterior es invariante por traslaciones, luego para cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(-x+E) = m^*((-x+E) \cap A) + m^*((-x+E) \setminus A) = \\ &= m^*(-x + (E \cap (x+A))) + m^*(-x + (E \setminus (x+A))) = \\ &= m^*(E \cap (x+A)) + m^*(E \setminus (x+A)) \end{aligned}$$

Así que $x + A$ es también medible. Y ya sabemos que $m(A) = m^*(A) = m^*(x+A) = m(x+A)$

◀(Volver al enunciado) □

Además se tiene el siguiente resultado para sucesiones monótonas de conjuntos:

Proposición (Sucesiones monótonas).

9. *Sea $\{A_n\}_n$ una sucesión no decreciente de conjuntos medibles ($A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo n). Entonces*

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n m(A_n)$$

10. *Sea $\{A_n\}_n$ una sucesión no creciente de conjuntos medibles ($A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo n), y tal que existe algún n_0 con $m(A_{n_0}) < \infty$. Entonces*

$$m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n m(A_n)$$

Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

Observemos primero que como consecuencia de las propiedades de los conjuntos medibles, si A y B son dos conjuntos medibles, con $B \subseteq A$, entonces $m(A) = m(B) + m(A \setminus B)$, y si B tiene medida finita, entonces $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$

(9) Supongamos primero que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m(A_{k_0}) = \infty$. Como para todo $k \geq k_0$ $A_{k_0} \subseteq A_k$, entonces $m(A_k) = \infty$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \infty$

Por otro lado, como $A_{k_0} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, también $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$, y se tiene la igualdad.

Supongamos entonces al contrario que todos los conjuntos A_n tienen medida finita.

Poniendo $A_0 = \emptyset$, podemos escribir $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$

Los conjuntos $A_n \setminus A_{n-1}$ son medibles, disjuntos dos a dos, y $m(A_n \setminus A_{n-1}) = m(A_n) - m(A_{n-1})$. Aplicando la aditividad de la medida de Lebesgue,

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus A_{n-1})) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} m(A_n \setminus A_{n-1}) = \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) - m(A_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} m(A_N) \end{aligned}$$

(10) Sea ahora $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente, y sea n_0 tal que $m(A_{n_0}) < \infty$. Entonces para todo k mayor que n_0 se tiene $m(A_k) \leq m(A_{n_0}) < \infty$. Además $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n$ por ser la sucesión decreciente. Podemos suponer entonces para mayor comodidad que $n_0 = 1$.

Utilizando que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es medible, y que está contenido en A_1, se tiene

$$
\begin{aligned}
m(A_1) &= m(A_1 \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)) + m(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \\
&= m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) + m(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n))
\end{aligned}
$$

Ahora la sucesión $\{A_1 \setminus A_n\}_n$ es creciente, con lo que aplicando el apartado (1)

$$
\begin{aligned}
m(A_1) &= m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) + \lim_{n\to\infty} m(A_1 \setminus A_n) = \\
&= m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) + \lim_{n\to\infty} (m(A_1) - m(A_n)) = \\
&= m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) + m(A_1) - \lim_{n\to\infty} m(A_n)
\end{aligned}
$$

luego

$$
m(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)
$$

◀(Volver al enunciado) $\square$

Observaciones:

La propiedad (10) no es cierta si para todo $n \in \mathbb{N}$, $m(A_n) = \infty$. Como ejemplo, sen $A_n = [n, \infty)$ en $\mathbb{R}$:

$A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo n, luego es una sucesión decreciente.

$m(A_n) = \infty$ para todo n, luego $\lim_n m(A_n) = \infty$

Y sin embargo $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ luego su medida es 0.

Sólo falta ver que los conjuntos A_n así definidos son medibles.

Para ver esto último, vamos a utilizar los resultados anteriores para conocer en lo posible cuáles son los conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ (hasta el momento sólo tenemos como ejemplo los conjuntos que ya conocemos de medida cero).

Los resultados fundamentales son los dos siguientes:

Proposición.
Todo rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible.

Demostración:

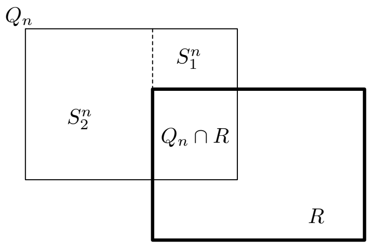
Sean R un rectángulo y E un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Por la definición de la medida exterior de E, dado un $\epsilon > 0$, existe una familia numerable de rectángulos Q_n tales que

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{8} Q_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n) < m^*(E) + \epsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned}
m^*(E) &\leq m^*(E \cap R) + m^*(E \setminus R) \leq \\
&\leq m^*\left((\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n) \cap R \right) + m^*\left((\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n) \setminus R \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (m^*(Q_n \cap R) + m^*(Q_n \setminus R))
\end{aligned}$$

El conjunto $Q_n \cap R$ es un rectángulo, y por tanto su medida exterior coincide con su volumen, $m^*(Q_n \cap R) = v(Q_n \cap R)$



Y el conjunto $Q_n \setminus R$ se puede descomponer como una unión finita de rectángulos $S_1^n, \ldots, S_{k_n}^n$ que no se solapan, de modo que

$$m^*(Q_n \setminus R) = m^*(\bigcup_{i=1}^{k_n} S_i^n) \leq \sum_{i=1}^{k_n} v(S_i^n)$$

Sustituyendo en la serie

$$\begin{aligned} m^*(E) &\leq m^*(E \cap R) + m^*(E \setminus R) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[v(Q_n \cap R) + \sum_{i=1}^{k_n} v(S_i^n) \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v(Q_n) \leq m^*(E) + \epsilon \end{aligned}$$

Como esta desigualdad se verifica para cualquier $\epsilon > 0$, tiene que ser

$$m^*(E) = m^*(E \cap R) + m^*(E \setminus R)$$

así que R es medible. $\square$

Teorema.
Todo conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ puede ponerse como unión numerable de rectángulos.

Demostración:

Si G es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, para cada punto $x \in G$ existirá una bola centrada en x contenida en G. Podemos construir un rectángulo Q_x que contenga a x y esté contenido en la bola, y tal que los vértices de Q_x tengan todas sus coordenadas racionales.

Si llamamos $\mathcal{Q}$ a la familia de todos los rectángulos posibles en $\mathbb{R}^n$ que tiene todos sus vértices con todas sus coordenadas racionales, $\mathcal{Q}$ es numerable, y podemos poner

$$G = \bigcup \{Q \in \mathcal{Q},\, Q \subseteq G\}$$

que será como mucho una unión numerable de rectángulos. $\square$

Como consecuencia de ambos teoremas:

Corolario 1.

1. *Todo conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es medible.*
2. *Todo conjunto cerrado es medible.*
3. *Cualquier conjunto que se pueda obtener mediante una cantidad numerable de operaciones conjuntistas de unión, intersección o diferencia de conjuntos abiertos o cerrados, es medible. (Esta familia de conjuntos recibe el nombre de σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$)*
4. *Todo conjunto medible Jordan es también medible Lebesgue. (El recíproco no es cierto)*

Demostración:
Los tres primeros apartados se deducen directamente de los dos últimos teoremas, utilizando las propiedades de los conjuntos medibles.

Para el último apartado, si A es un conjunto medible Jordan, basta poner el conjunto A como unión de su interior y la parte de la frontera que esté en A:

$$A = A^0 \cup (Fr(A) \cap A)$$

Aquí A^0 es medible por ser un conjunto abierto, y $Fr(A) \cap A$ es un subconjunto de la frontera de A. Como A es medible Jordan su frontera es un conjunto de medida cero, luego $Fr(A) \cap A$ también tiene medida cero, y por tanto es medible - Lebesgue. Así que A es medible - Lebesgue. $\square$