En este capítulo tenemos como objetivo demostrar las propiedades más importantes de la Integral de Lebesgue. tenemos que demostrar todavía las propiedades fundamentales de linealidad y aditividad respecto al dominio, y vamos a estudiar también el comportamiento de la integral frente a los límites de sucesiones o series de funciones medibles.

Las propiedades de la integral respecto a los límites de sucesiones se denominan *teoremas de convergencia*. Y precisamente gracias a uno de ellos vamos a poder demostrar de una forma sencilla aquellas dos propiedades que hemos mencionado.

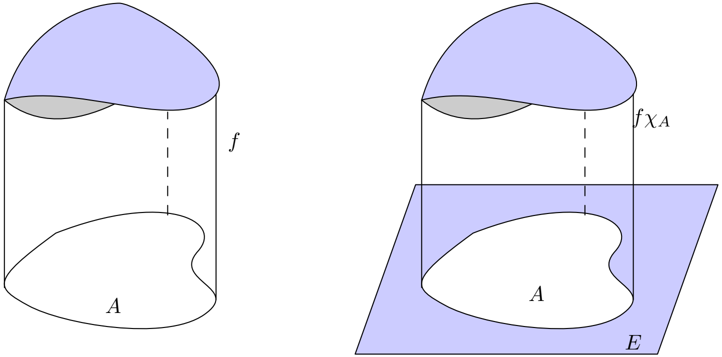
Así que los resultados irán apareciendo de forma un poco desordenada a lo largo del capítulo.

1. Integral sobre subconjuntos medibles

Empezamos este capítulo con un pequeño resultado sobre la integral en un subconjunto de un conjunto medible, y algunas consecuencias, que vamos a utilizar en los siguientes resultados.

Proposición.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$*, medible – Lebesgue, y* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *función medible no negativa, o integrable. Sea* $A \subseteq E$ *medible – Lebesgue. Entonces*

$$\int_A f = \int_E f\chi_A$$



Demostración:

Como A es un conjunto medible, la función χ_A es medible, y por tanto $f\chi_A$ es medible – Lebesgue.

Supongamos primero que f es no negativa.

Por definición,

$$\int_A f = \sup\{\int_A s;\ s : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función simple },\ 0 \leq s(x) \leq f(x)\ \forall x \in A\}$$

y

$$\int_E f\chi_A(x) = \sup\{\int_E t;\ t : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función simple },\ 0 \leq t(x) \leq f\chi_A(x)\ \forall x \in E\}$$

Vamos a ver que para cada función simple $s : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique $0 \leq s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in A$ hay una función simple $t : E \longrightarrow \mathbb{R}$ con $0 \leq t(x) \leq f\chi_A(x)$ para todo $x \in E$, tal que $\int_A s = \int_E t$, y, recíprocamente para cada función simple $t : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique $0 \leq t(x) \leq f\chi_A(x)$ para todo $x \in E$ hay una función simple $s : A \longrightarrow \mathbb{R}$ con $0 \leq s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in A$ tal que $\int_A s = \int_E t$. Así los dos conjuntos que aparecen arriba son iguales, y por tanto las integrales son iguales.

Sea $s : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función simple en A, tal que $0 \leq s(x) \leq f(x)$ para todo $x \in A$. Si s tiene una descomposición de la forma $s(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x)$, con A_i subconjuntos medibles de A, extendemos la definición de s a E mediante la función

$$t(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x) + 0\chi_{E\setminus A}$$

t es una función simple, que verifica evidentemente $\quad 0 \leq t(x) \leq f(x)\chi_A(x) \quad$ para todo x de E, y $\quad \int_E t = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i) + 0m(E \setminus A) = \int_A s$

Recíprocamente, si $t : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función simple con $0 \leq t(x) \leq f\chi_A(x) \quad$ para todo $x \in E$, necesariamente para cada $x \in E \setminus A$ tiene que ser $t(x) = 0$, así que

$$t(x) = t(x)\chi_A(x) + 0\chi_{E\setminus A}(x)$$

Si $t = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$, podemos poner

$$t(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j \cap A} + 0\chi_{E\setminus A}$$

y

$$\int_E t = \sum_{j=1}^{m} b_j m(B_j \cap A)$$

Definimos entonces s como la restricción de t a A, que tendrá una expresión de la forma

$$s(x) = t|_A(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j \cap A}$$

que verifica $0 \leq s(x) = t(x) \leq f(x)$ si $x \in A$, y

$$\int_A s = \sum_{j=1}^{m} b_j m(B_j \cap A) = \int_E t$$

Si f es una función integrable, no necesariamente no negativa, se tiene

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = \int_E f^+ \chi_A - \int_E f^- \chi_A$$

Ahora bien, $(f^+\chi_A)(x) = (f\chi_A)^+(x)$ y $(f^-\chi_A)(x) = (f\chi_A)^-(x)$. Por tanto, sustituyendo arriba,

$$\int_A f = \int_E f\chi_A$$

□

AAVVR

Teoremas de convergencia

Consecuencias:

1. Si f es una función medible no negativa en E, y A, B son subconjuntos medibles de E con $A \subseteq B$, entonces $\int_A f \leq \int_B f$

   En efecto, basta tener en cuenta que si $A \subseteq B$, $\chi_A \leq \chi_B$

Consecuencias:

1. Si f es una función medible no negativa en E, y A, B son subconjuntos medibles de E con $A \subseteq B$, entonces $\displaystyle\int_A f \leq \int_B f$

   En efecto, basta tener en cuenta que si $A \subseteq B$, $\chi_A \leq \chi_B$

2. Si f es una función medible no negativa o integrable en E, y A es un subconjunto de E con $m(A) = 0$, entonces $\displaystyle\int_A f = 0$

   En efecto, podemos suponer que f es no negativa, y luego razonar con f^+ y f^-. Entonces $f\chi_A$ es una función medible y no negativa, y $f\chi_A(x) = 0$ para casi todo x de E (para todo x de $E \setminus A$), luego

$$\int_A f = \int_E f\chi_A = \int_E 0 = 0$$

Consecuencias:

1. Si f es una función medible no negativa en E, y A, B son subconjuntos medibles de E con $A \subseteq B$, entonces $\int_A f \leq \int_B f$

   En efecto, basta tener en cuenta que si $A \subseteq B$, $\chi_A \leq \chi_B$

2. Si f es una función medible no negativa o integrable en E, y A es un subconjunto de E con $m(A) = 0$, entonces $\int_A f = 0$

   En efecto, podemos suponer que f es no negativa, y luego razonar con f^+ y f^-. Entonces $f\chi_A$ es una función medible y no negativa, y $f\chi_A(x) = 0$ para casi todo x de E (para todo x de $E \setminus A$), luego

$$\int_A f = \int_E f\chi_A = \int_E 0 = 0$$

3. Si f es una función medible no negativa en E, y $\int_E f = 0$, entonces $f(x) = 0$ en casi todo punto de E.

   En efecto, si llamamos $A = \{x \in E : f(x) > 0\}$, y $A_n = \{x \in E : f(x) \geq 1/n\}$, tenemos que:

$$A_n \subseteq A_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}; \qquad \text{y} \qquad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Entonces $m(A) = \lim_n m(A_n)$. Si fuese $m(A) > 0$, existiría algún n_0 tal que $m(A_{n_0}) > 0$, y entonces

$$\int_E f \geq \int_{A_{n_0}} f \geq \int_{A_{n_0}} \frac{1}{n_0} = \frac{1}{n_0} m(A_{n_0}) > 0$$

contra la hipótesis de que f tenía integral 0 en E.

2. Convergencia Monótona

Vamos a demostrar ahora algunos de los teoremas más importantes de la teoría integral de Lebesgue.

El primer teorema de convergencia se da para sucesiones crecientes de funciones no negativas. De él obtendremos varias consecuencias, entre las que se encuentra la demostración de la linealidad de la integral.

2. Convergencia Monótona

Vamos a demostrar ahora algunos de los teoremas más importantes de la teoría integral de Lebesgue.

El primer teorema de convergencia se da para sucesiones crecientes de funciones no negativas. De él obtendremos varias consecuencias, entre las que se encuentra la demostración de la linealidad de la integral.

Teorema (de Convergencia Monótona)**.**
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible –Lebesgue, y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas, tales que para todo $x \in E$ existe $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Entonces f es medible, no negativa, y

$$\int_E f = \lim_n \int_E f_n$$

Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

Ya hemos visto que el límite puntual de funciones medibles es medible, luego f es medible.

Además, para todo $x \in E$, $f_n(x) \geq 0$, luego $f(x) = \lim_n f_n(x) \geq 0$

Y como $\{f_n\}_n$ es no decreciente, dado x en E, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $f_n(x) \leq f(x)$ para todo n, y para todo $x \in E$. Entonces $\int_E f_n \leq \int_E f$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $\lim_n \int_E f_n \leq \int_E f$

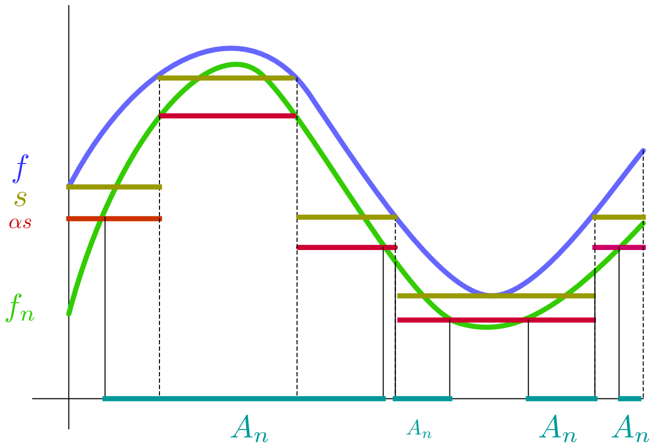
Hay que demostrar la otra desigualdad, para lo que veremos que para toda función simple s con $0 \leq s \leq f$ en E, se tiene $\int_E s \leq \lim_n \int_E f_n$

Sea s una función simple, tal que $0 \leq s(x) \leq f(x)$ para todo x de E. Y sea α un número real, con $0 < \alpha < 1$

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_n = \{x \in E : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}$

AAVVR

Teoremas de convergencia



Se tiene que cada A_n es medible, y que

$$\int_E f_n \geq \int_{A_n} f_n \geq \int_{A_n} \alpha s = \alpha \int_{A_n} s$$

Si s tiene una expresión de la forma $\quad s(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_{B_j}, \quad$ entonces

$$\int_{A_n} s = \sum_{j=1}^{k} b_j m(B_j \cap A_n)$$

luego

$$\int_E f_n \geq \alpha \sum_{j=1}^{k} b_j m(B_j \cap A_n)$$

y esto para cada $n \in \mathbb{N}$. Se trata de estudiar qué ocurre si $n \to \infty$

Ahora bien, como la sucesión $\{f_n\}_n$ es no decreciente,

$$x \in A_n \Rightarrow f_n(x) \geq \alpha s(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq \alpha s(x) \Rightarrow x \in A_{n+1}$$

luego $\{A_n\}_n$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles.

Además $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$:

- Si $x \in E$ y $s(x) > 0$, como $f(x) = \lim_n f_n(x) \geq s(x) > \alpha s(x)$, existirá algún n_0 tal que $f_{n_0}(x) \geq \alpha s(x)$, luego $x \in A_{n_0}$

- Y si $s(x) = 0$, trivialmente $x \in A_n$ para todo n.

En consecuencia, para cada j entre 1 y k, fijo, la sucesión $\{B_j \cap A_n\}_n$ es creciente, y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_j \cap A_n) = B_j \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = B_j \cap E = B_j$$

de donde $\lim_n m(B_j \cap A_n) = m(B_j)$.

Así,

$$\begin{aligned} \lim_n \int_E f_n &\geq \alpha \lim_n (\sum_{j=1}^{k} m(B_j \cap A_n)) = \alpha \sum_{j=1}^{k} b_j \lim_n m(B_j \cap A_n) = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{k} b_j m(B_j) = \alpha \int_E s \end{aligned}$$

Y esto para todo α con $0 < \alpha < 1$. Haciendo que α tienda a 1, se tiene

$$\lim_n \int_E f_n \geq \int_E s$$

Por último, tomando supremos entre todas las funciones simples s con $0 \leq s \leq f$ en E, se tiene

$$\lim_n \int_E f_n \geq \int_E f$$

lo que termina la demostración.

◀(Volver al enunciado) □

Observaciones:

El teorema es cierto aunque las condiciones del enunciado se verifiquen en casi todo punto de E solamente:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible – Lebesgue, $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles en E no negativas, y f una función en E no negativa, tales que:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $Z_n \subseteq E$ con $m(Z_n) = 0$ tal que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in E \setminus Z_n$

Existe un conjunto $Z_0 \subseteq E$ tal que para todo $x \in E \setminus Z_0$ $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Entonces f es medible y $\displaystyle\int_E f = \lim_n \int_E f_n$

En efecto, basta definir el conjunto $Z = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$, que verifica $m^*(Z) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(Z_n) = 0$, luego es medible, y las funciones $g_n = f_n \chi_{E \setminus Z}$ y $g = f \chi_{E \setminus Z}$, que son medibles, e iguales a f_n y a f en casi todo punto, respectivamente.

Además $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ para todo $x \in E$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, y $g(x) = \lim_n g_n(x)$ para todo $x \in E$. Aplicando el caso anterior a estas funciones se tiene $\int_E g = \lim_n \int_E g_n$ y por tanto

$$\int_E f = \int_E g = \lim_n \int_E g_n = \lim_n \int_E f_n$$

Una de las aplicaciones que vamos a utilizar de este teorema es la extensión de la integral de Riemann a funciones no acotadas, o a funciones definidas en dominios no acotados, utilizando sucesiones crecientes de conjuntos medibles Jordan en los que podamos utilizar la integral de Riemann, y el siguiente corolario:

Corolario 1.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible–Lebesgue, y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de conjuntos medibles ($A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo n), tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces

$$\int_E f = \lim_n \int_{A_n} f$$

Demostración: Consideremos las funciones $f_n = f\chi_{A_n}$. Son funciones medibles, no negativas, y además al ser la sucesión de conjuntos creciente, también para todo $x \in E$ se tiene $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mas aún, para cada $x \in E$, existe un número n_0 tal que $x \in A_n$ para todo $n \geq n_0$, luego $f_n(x) = f(x)$ para todo $n \geq n_0$. Es decir, $\lim_n f_n(x) = f(x)$.

Aplicando el teorema de convergencia monótona,

$$\int_E f = \lim_n \int_E f_n = \int_E f\chi_{A_n} = \int_{A_n} f$$

$\square$

Otra consecuencia del Teorema de convergencia monótona y el teorema de aproximación de funciones medibles por funciones simples es la linealidad de la integral.

Corolario 2 (Integral de la suma de funciones no negativas).
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible–Lebesgue, y sean $f,\ g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles no negativas. Entonces

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$$

Demostración: Podemos construir dos sucesiones no decrecientes de funciones simples no negativas, $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$, y tales que $s_n(x) \to f(x)$ y $t_n(x) \to g(x)$ para todo x de E. Entonces $\{s_n + t_n\}$ es una sucesión no decreciente de funciones simples, no negativas, que tiende a $f+g$; aplicando el teorema de convergencia monótona a f, g y $f+g$, $f+g$ es medible, no negativa, y

$$\int_E (f+g) = \lim_n (\int_E s_n + t_n) = \lim_n (\int_E s_n + \int_E t_n) = \int_E f + \int_E g$$

$\square$

Lema 1.
Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *medible–Lebesgue y* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. *Supongamos que existen dos funciones* $g, h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *no negativas, integrables, tales que* $f = g - h$. *Entonces* f *es integrable y* $\displaystyle\int_E f = \int_E g - \int_E h$

Demostración: En primer lugar, f será medible por ser diferencia de funciones medibles.

En segundo lugar, si $f = g - h$, entonces $|f| \leq |g| + |h|$, luego

$$\int_E |f| \leq \int_E |g| + \int_E |h| < \infty$$

Por tanto f es integrable.

Además, como $f = f^+ - f^-$, se tiene

$$f^+ - f^- = g - h \qquad \Longleftrightarrow \qquad f^+ + h = g + f^-$$

Aplicando las propiedades de la integral de funciones no negativas,

$$\int_E f^+ + \int_E h = \int_E (f^+ + h) = \int_E (g + f^-) = \int_E g + \int_E f^-$$

luego

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g - \int_E h$$

$\square$

Corolario 3 (Linealidad de la Integral)**.**
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *medible–Lebesgue, y sean* f, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones integrables.*

a) $f + g$ *es integrable y* $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, αf *es integrable, y* $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$

Demostración:

a) $f + g$ es medible por ser suma de funciones medibles. Además $|f+g| \leq |f| + |g|$, luego $\int_E |f+g| \leq \int_E (|f| + |g|) = \int_E |f| + \int_E |g| < \infty$, así que $f + g$ es integrable.

Y aplicando el lema anterior, como $f + g = f^+ + g^+ - f^- - g^-$,

$$\begin{aligned}
\int_E (f+g) &= \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-) = \\
&= \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^- = \int_E f + \int_E g
\end{aligned}$$

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, αf es medible. Además

$$\int_E |\alpha f| = \int_E |\alpha||f| = |\alpha| \int_E |f| < \infty$$

luego αf es integrable.

Si $\alpha \geq 0$, $(\alpha f)^+ = \alpha(f^+)$ y $(\alpha f)^- = \alpha(f^-)$, luego

$$\int_E \alpha f = \int_E \alpha(f^+) - \int_E \alpha(f^-) = \alpha \int_E f$$

Y si $\alpha < 0$, $(\alpha f)^+ = (-\alpha)f^-$ y $(\alpha f)^- = (-\alpha)f^+$, luego

$$\int_E \alpha f = \int_E (-\alpha)f^- - \int_E (-\alpha)f^+ = \alpha \int_E f$$

$\square$

Y como consecuencia de la linealidad, la aditividad con respecto al dominio de integración.

Corolario 4 (Aditividad respecto al dominio)**.**
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible – Lebesgue, y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ medible, no negativa o integrable. Sean $A, B \subseteq E$ medibles – Lebesgue, con $A \cap B = \emptyset$. Entonces

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

Demostración: Basta tener en cuenta que al ser A y B disjuntos, $\chi_{(A\cup B)} = \chi_A + \chi_B$, y utilizar el corolario anterior. $\square$

Corolario 5.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible – Lebesgue, y $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles no negativas de E en $\mathbb{R}$. Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para casi todo $x \in E$ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Entonces f es medible, y

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n$$

Demostración: Basta tener en cuenta que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$, y definir las funciones $g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$, que serán medibles, no negativas, y formarán una sucesión no decreciente. Aplicando el teorema de convergencia monótona y la linealidad de la integral,

$$\int_E f(x) = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_N \int_E g_N(x) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \int_E f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)$$

□

Corolario 6.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible–Lebesgue, $\{f_n\}_n$ una sucesión no decreciente de funciones integrables de E en $\mathbb{R}$,y $f : E \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = \lim_n f_n(x)$ para casi todo $x \in E$ y $\lim_n \int_E f_n < \infty$.

Entonces f es integrable y $\int_E f = \lim_n \int_E f_n$

Demostración: Basta considerar la sucesión $(f_n - f_1)_n$, que será también no decreciente y formada por funciones no negativas. Aplicando el teorema de convergencia monótona, $(f - f_1) = \lim_n (f_n - f_1)$ es medible, y

$$\int_E (f - f_1) = \lim_n \int_E (f_n - f_1) = \lim_n \int_E f_n - \int_E f_1 < \infty$$

Por tanto, $(f - f_1)$ es integrable, luego $f = (f - f_1) + f_1$ también es integrable, y además

$$\int_E f = \int_E (f - f_1) + \int_E f_1 = \lim_n \int_E f_n$$

□

El mismo resultado es cierto para sucesiones no crecientes, como se demuestra cambiando f_n por $(-f_n)$ y f por $(-f)$.

3. Convergencia Dominada

Corolario 7 (Lema de Fatou)**.**
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible –Lebesgue, y $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles no negativas de E en $\mathbb{R}$, tales que para todo $x \in E$ existe $\liminf_n f_n(x)$. Entonces

$$\int_E \liminf_n f_n \leq \liminf_n \int_E f_n$$

Demostración:

Por definición, $\liminf_n f_n = \lim_n (\inf_{k \geq n} f_k)$. Definamos entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ $g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$

Las funciones g_n son medibles, no negativas, y forman una sucesión no decreciente. Aplicando el teorema de convergencia monótona,

$$\int_E \liminf_n f_f = \int_E \lim_n g_n = \lim_n \int_E g_n = \liminf_n \int_E g_n \leq \liminf_n \int_E f_n$$

pues $g_n \leq f_n$ para todo n. $\square$

Lema 2.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible–Lebesgue, y sean $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f = g$ en casi todo punto de E. Si f es integrable, entonces g también es integrable y $\int_E f = \int_E g$.

Demostración: Como f es medible, razonando como en el caso de funciones medibles no negativas, g también es medible. Además $|f|$ y $|g|$ son funciones no negativas, y $|f| = |g|$ en casi todo punto de E, luego $\int_E |f| = \int_E |g|$, y por tanto g es integrable.

Por último, si $f = g$ en casi todo punto, también $f^+ = g^+$ y $f^- = g^-$ en casi todo punto, luego

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g$$

$\square$

Veamos ahora el segundo teorema de convergencia:

Teorema (de Convergencia Dominada)**.**
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible–Lebesgue. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles de E en $\mathbb{R}$, g una función integrable no negativa en E, y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que:

1. *para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in E$*
2. *para casi todo $x \in E$, $f(x) = \lim_n f_n(x)$*

Entonces f es integrable y $\int_E f = \lim_n \int_E f_n$

Demostración: ►(Saltar al final de la demostración)

Supongamos en primer lugar que las condiciones (1) y (2) se cumplen en todo el conjunto E: para todo $n \in \mathbb{N}$ $\quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad$ y $\quad \lim_n f_n(x) = f(x), \quad$ para todo $x \in E$

Entonces f es medible por ser límite puntual de funciones medibles.

Cada función f_n es integrable, pues si $|f_n| \leq g$, $\int_E |f_n| \leq \int_E g < \infty$. Y también f es integrable, pues si $f(x) = \lim_n f_n(x)$, entonces

$$|f(x)| = \lim_n |f_n(x)| \leq g(x)$$

luego

$$\int_E |f| \leq \int_E g < \infty$$

Sólo hay que probar por tanto la igualdad del límite y la integral.
Para tener funciones no negativas, consideremos las funciones $f_n + g$:
Se tiene

$$|f_n(x)| \leq g(x) \Longleftrightarrow -g(x) \leq f_n(x) \leq g(x) \Longleftrightarrow 0 \leq f_n(x) + g(x) \leq 2g(x)$$

para todo x de E

Y $\quad \lim_n (f_n(x) + g(x)) = (f(x) + g(x)) \qquad$ para todo x de E.

Aplicando el Lema de Fatou,

$$\int_E (f+g) = \int_E \lim_n (f_n + g) \leq \liminf_n \int_E (f_n + g) = \liminf_n \int_E f_n + \int_E g$$

de donde se deduce que

$$\int_E f \leq \liminf_n \int_E f_n$$

Para la otra desigualdad, consideremos la sucesión de funciones $(-f_n)_n$: son funciones medibles, verifican $|-f_n| \leq g$ en E, y $\lim_n(-f_n)(x) = (-f)(x)$ para todo x de E. Repitiendo el proceso anterior,

$$\int_E (-f) \leq \liminf_n \int_E (-f_n) = -\limsup_n \int_E f_n$$

En consecuencia

$$\limsup_n \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf_n \int_E f_n \leq \limsup_n \int_E f_n$$

luego las dos desigualdades deben ser igualdades, y

$$\int_E f = \lim_n \int_E f_n$$

En el caso general, existe un conjunto $Z_0 \subseteq E$ tal que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ para todo x de $E \setminus Z_0$, y $m(Z_0) = 0$. Y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $Z_n \subseteq E$ con $m(Z_n) = 0$ y $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo x de $E \setminus Z_n$

Definimos entonces $Z = \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$, que verifica $m(Z) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(Z_n) = 0$, luego en particular es medible; y si $x \in E \setminus Z = \bigcap_{n=0}^{\infty} (E \setminus Z_n)$ se verifican a la vez $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_n f_n(x) = f(x)$.

Consideramos las funciones $h = f\chi_{E\setminus Z}$ y $h_n = f_n\chi_{E\setminus Z}$ Tenemos:

$$|h_n(x)| = \begin{cases} |f_n(x)| & \text{si} \quad x \in E \setminus Z \\ 0 & \text{si} \quad x \in Z \end{cases} \leq g(x)$$

$h_n(x) \to_n h(x)$para todo x de E

y h_n son integrables, ya que $h_n = f_n$ salvo en Z, que es un conjunto de medida cero; además $\int_E h_n = \int_E f_n$.

Aplicando el caso anterior, h es integrable, y $\int_E h = \lim_n \int_E h_n$.

Por último, como $h = f$ salvo en Z, que es un conjunto de medida cero, f es integrable, y $\int_E f = \int_E h$.

Por tanto

$$\int_E f = \int_E h = \lim_n \int_E h_n = \lim_n \int_E f_n$$

◀(Volver al enunciado) □

AAVVR

Teoremas de convergencia

Corolario 8.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible–Lebesgue, y $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones integrables en E. Si para casi todo $x \in E$, $\quad f(x) = \sum_n f_n(x), \quad \sum_n |f_n(x)| < \infty \quad$ *y* $\quad \int_E \left(\sum_n |f_n| \right) < \infty, \quad$ *entonces f es integrable, y*

$$\int_E \sum_n f_n = \sum_n \int_E f_n$$

Demostración: Podemos suponer como en los teoremas anteriores, que las condiciones se verifican en todos los puntos de E.

Definamos $g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$; g_k son funciones medibles, y verifican

$$\lim_k g_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

para todo x de E. Además

$$|g_k(x)| \leq \sum_{n=1}^{k} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

y por hipótesis la función $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ es integrable. Así, aplicando el teorema de convergencia dominada, f es integrable y

$$\int_E f(x) = \lim_k \int_E g_k = \lim_k \int_E \sum_{n=1}^{k} f_n(x) = \lim_k \sum_{n=1}^{k} \int_E f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_e f_n(x)$$

$\square$

Para terminar, utilizando los teoremas de convergencia, vamos a ver la relación entre la integral de Riemann Impropia y la Integral de Lebesgue.

Teorema (Integral de Riemann Impropia – Integral de Lebesgue)**.**
a) Sea $I = [a, b)$ un intervalo en $\mathbb{R}$, $a < b \leq \infty$, y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ no negativa integrable en sentido impropio de Riemann en I. Entonces f es integrable Lebesgue en I y

$$(R)\int_a^b f = (L)\int_I f$$

b) Sea $I = [a, b)$ un intervalo en $\mathbb{R}$, $a < b \leq \infty$, y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f|$ es integrable en sentido impropio de Riemann en I. Entonces f es integrable Lebesgue en I y

$$(R)\int_a^b f = (L)\int_I f$$

Hay funciones integrables en sentido de Riemann Impropio que no son integrables Lebesgue, debido a que la Integral de Lebesgue exige que la integral del módulo de f sea finita, lo que se corresponde con las integrales absolutamente convergentes en sentido impropio.