AAVVR

Funciones definidas por integrales. Derivación bajo el signo de integral

1. Teorema Fundamental del Cálculo

Vamos a considerar dos clases de funciones, definidas como integrales de otras funciones

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

donde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, y

$$F(t) = \int_A f(x,t)dx$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

El primer tipo de integrales son las integrales indefinidas, y tienen para la integral de Lebesgue un comportamiento similar al teorema fundamental del cálculo demostrado para la integral de Riemann.

El segundo tipo de funciones se llaman integrales paramétricas, y estudiaremos condiciones para determinar la continuidad y la derivabilidad de $F(t)$.

La notación $\int_a^b f(x)dx$ corresponde a $\int_{[a,b]} f(x)dx$ si $a \leq b$, y como en la integral de Riemann de funciones de una variable, si $a > b$ se entiende $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Teorema (Fundamental del Cálculo).

Sea I un intervalo real, y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue en I Sea $a \in I$ fijo, y definamos la función $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ para todo $t \in I$. Entonces F es continua en I. Además, si f es continua en un punto $t_0 \in I$ entonces F es derivable en t_0 y $F'(t_0) = f(t_0)$

Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

Sea $b \in I$ fijo, $b > a$, y vamos a ver que F es continua en b. Sea $\{s_k\}_k$ una sucesión en I que converja a b, y consideremos las funciones características $\chi_{[a,s_k]}(x)$

Si $x \in [a, b)$, como $s_k \to b$, existe algún k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene $s_k > x$, y por tanto $\chi_{[a,s_k]}(x) = 1 = \chi_{[a,b)}(x)$

Y si $x \notin [a, b]$, también como $s_k \to b$, existe k_1 tal que para todo $k \geq k_1$ se tiene $s_k < x$ y por tanto $\chi_{[a,s_k]}(x) = 0 = \chi_{[a,b)}(x)$

Es decir, $\chi_{[a,s_k]}(x) \xrightarrow{k} \chi_{[a,b)}(x)$ para todo $x \in I$ excepto quizá para el punto b

Sea entonces $f_k = f\chi_{[a,s_k]}$

- f_k son funciones medibles, por ser producto de funciones medibles.

- Para todo $x \in I$, $x \neq b$, se tiene $\lim_k f_k(x) = f(x)\chi_{[a,b)}(x)$
- $|f_k(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in I$ y para todo k.

Como f es integrable por hipótesis, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada a la sucesión f_k, y tenemos

$$\int_I f\chi_{[a,b)} = \lim_k \int_E f_k = \lim_k \int_I f\chi_{[a,s_k]}$$

es decir

$$F(b) = \lim_k \int_I f\chi_{[a,s_k]} = \lim_k F(s_k)$$

por tanto F es continua en b.

La segunda parte de la demostración se puede hacer de forma análoga a la del teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann.

Sea t_0 tal que f es continua en t_0. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $t \in I$ y $|t - t_0| < \delta$, entonces $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$, o equivalentemente, si $t \in I$ y $|t - t_0| < \delta$, se tiene

$$f(t_0) - \epsilon < f(t) < f(t_0) + \epsilon$$

Si $t \geq t_0$ se tiene entonces

$$(f(t_0) - \epsilon)(t - t_0) \leq \int_{t_0}^{t} f(x)dx \leq (f(t_0) + \epsilon)(t - t_0)$$

y si $t \leq t_0$ se tiene

$$(f(t_0) - \epsilon)(t_0 - t) \leq \int_{t}^{t_0} f(x)dx \leq (f(t_0) + \epsilon)(t_0 - t)$$

En cualquier caso (poniendo $\int_a^b f = -\int_b^a f$)

$$(f(t_0) - \epsilon) \leq \frac{\int_{t_0}^{t} f(x)dx}{t - t_0} \leq (f(t_0) + \epsilon)$$

o equivalentemente

$$-\epsilon \leq \frac{\int_{t_0}^{t} f(x)dx}{t - t_0} - f(t_0) \leq \epsilon$$

si $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta$

Como $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x)dx = F(t) - F(t_0)$, tenemos que si $t \in I$ y $0 < |t - t_0| < \delta$,

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0) \right| \leq \epsilon$$

es decir, $F(t)$ es derivable en t_0, y

$$F'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = f(t_0)$$

◀(Volver al enunciado) $\square$

Ejercicio:
Demostrar la primera parte del teorema cuando $b \leq a$

Observación: Si f no es continua en ningún punto, la segunda mitad del teorema no tiene sentido. Sin embargo uno de los teoremas importantes de la teoría de integración es que de hecho $F'(s) = f(s)$ en casi todo punto, tanto si f es continua como si no. Pero esto no podemos demostrarlo ahora.

2. Integrales Paramétricas

Vamos a estudiar ahora algunas aplicaciones a las llamadas "integrales paramétricas". Consideramos una familia de funciones dependientes de un parámetro real $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, del tipo $f_t(x, y) = \operatorname{sen}(t(x^2 + y^2))$ para $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$. Esta familia de funciones se puede describir como una función en $E \times I$

$$\begin{array}{rcl} f : E \times I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longrightarrow & f(x, t) = f_t(x) \end{array}$$

de modo que para cada valor de $t \in I$ tenemos una función de varias variables

$$\begin{array}{rcl} f(., t) : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x, t) \end{array}$$

Y también para cada $x \in E$ tenemos una función real de una variable real

$$\begin{array}{rcl} f(x, .) : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(x, t) \end{array}$$

Llamamos integral paramétrica a la función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_E f(x, t) dx$$

cuando esta integral existe

Para este tipo de funciones se pueden demostrar los dos teoremas siguientes, sobre continuidad y derivabilidad.

Teorema (Continuidad de las integrales paramétricas).

Sea I un intervalo real, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible – Lebesgue, y $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando:

a) Para cada $t \in I$, la función $f(.,t)$ es medible Lebesgue, y existe una función $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable Lebesgue tal que para todo $t \in I$ $|f(x,t)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in E$

b) Para casi todo $x \in E$, la función $f(x,.)$ es continua en I

Entonces la función $F(t) = \displaystyle\int_E f(x,t)dx$ es continua en I

Demostración: (Saltar al final de la demostración)

En primer lugar, F está bien definida, ya que la condición (a) nos asegura que para todo $t \in I$ la función $f(.,t) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

Para probar que F es continua, sea $a \in I$ fijo, y sea $\{t_k\}_k$ una sucesión de puntos de I que tienda a a.

Por la condición (b), existe un subconjunto $Z \subseteq E$ con $m(Z) = 0$, tal que para todo $x \in E \setminus Z$ las funciones $f(x,.) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas. Entonces, si $x \in E \setminus Z$, se tiene $f(x,t_k) \xrightarrow{k} f(x,a)$. Es decir, la sucesión de funciones $\{f(.,t_k)\}_k$ tiende a la función $f(.,a)$ en cada punto de $E \setminus Z$.

Así pues, tenemos una sucesión de funciones medibles, $\{f(., t_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge en casi todo punto de E a una función $f(., a)$, y que verifican para todo $k \in \mathbb{N}$ que $|f(x, t_k)| \leq g(x)$ para casi todo $x \in E$, con g una función integrable en E.

Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\int_E f(x, a)dx = \lim_k \int_E f(x, t_k)dx$$

es decir, $F(a) = \lim_k F(t_k)$. Por tanto F es continua en a.

◀(Volver al enunciado) $\square$

Teorema (Derivación bajo el signo de integral).

Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible – Lebesgue, y $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando:

a) Para todo $t \in I$ la función $f(.,t)$ es medible en E, y existe $t_0 \in I$ tal que $f(.,t_0)$ es integrable en E

b) Para casi todo $x \in E$ la función $f(x,.)$ es de clase C^1 en I

c) Existe $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable–Lebesgue en E tal que para todo $t \in I$ y para casi todo $x \in E$ se tiene $|\dfrac{df}{dt}(x,t)| \leq g(x)$

Entonces la función $F(t) = \displaystyle\int_E f(x,t)dx$ es de clase C^1 en I, y

$$F'(t) = \int_E \frac{df}{dt}(x,t)dx$$

Demostración: ► (Saltar al final de la demostración)

Primero vamos a ver que F está bien definida, es decir, que las funciones $f(.,t)$ son integrables.

Por (b), existe un conjunto $Z_0 \subseteq E$ con $m(Z_0) = 0$, tal que las funciones $f(x, .) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 para todo $x \in E \setminus Z_0$.

Por (c), existe un conjunto $Z_1 \subseteq E$ con $m(Z_1) = 0$ y tal que para todo $x \in E \setminus Z_1$ se tiene

$$\left| \frac{df}{dt}(x, t) \right| \leq g(x)$$

para todo $t \in I$ donde g es una función integrable.

Sea $t_0 \in I$ tal que $f(., t_0)$ es integrable, según se indica en el enunciado. Y sea $t \in I$ otro punto de I, fijo.

Para todo $x \in E \setminus (Z_0 \cup Z_1)$, podemos aplicar el teorema del valor medio a $f(x, .)$ en $[t_0, t]$, de modo que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = \frac{df}{dt}(x, \mu)(t - t_0)$$

para algún $\mu \in [t_0, t]$, luego

$$\begin{aligned} |f(x, t)| &\leq |f(x, t_0)| + \left| \frac{df}{dt}(x, \mu) \right| |t - t_0| \\ &\leq |f(x, t_0)| + g(x)|t - t_0| \end{aligned}$$

y la función $f(., t_0) + g(.)|t - t_0|$ es integrable en E. Por tanto $f(., t)$ es integrable.

Veamos ahora que $\frac{df}{dt}(.,t)$ son medibles, para cada $t \in I$

Sea $t \in I$ fijo; sea $h_k \to 0$, y definamos las funciones $g_k(.,t) : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g_k(x,t) = \frac{f(x,t+h_k) - f(x,y)}{h_k}$$

Las funciones $g_k(.,t)$ son medibles, por ser cociente de funciones medibles, y para todo $x \in E \backslash Z_0$ se tiene $g_k(x,t) \xrightarrow{k} \frac{df}{dt}(x,t)$ Por tanto $\frac{df}{dt}(.,t)$ es medible (límite en casi todo punto de una sucesión de funciones medibles)

Y por último veamos que F es derivable y que se verifica

$$F'(t) = \int_E \frac{df}{dt}(x,t)ds$$

calculando esta integral.

Las funciones $g_k(.,t)$ verifican

$$\begin{aligned} |g_k(x,t)| &= \frac{|f(x,t+h_k) - f(x,t)|}{|h_k|} \\ &\leq \left|\frac{df}{dt}(x,\mu)\right| \frac{|h_k|}{|h_k|} \\ &\leq g(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E \setminus (Z_0 \cup Z_1)$

Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada,

$$\int_E \frac{df}{dt}(x,t)dx = \lim_k \int_E g_k(x,t)dx = \lim_k \frac{F(t+h_k) - F(t)}{h_k}$$

luego efectivamente F es derivable, y además

$$F'(t) = \int_E \frac{df}{dt}(x,t)dx$$

Que F es de clase C^1 se deduce del teorema anterior.

◀(Volver al enunciado) □

Ejercicios:

1. Se define la función Gamma de Euler como
$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$$
para $t > 0$. Comprobar que $\Gamma(t)$ está bien definida, y es una función continua en $t \in (0, \infty)$ (Sugerencia: para aplicar el teorema de continuidad, considerar I un intervalo cualquiera $[a, b]$ con $a > 0$)

   Comprobar también que para todo $t > 0$, $\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$, de dónde se deduce que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n + 1) = n!$

   Demostrar que Γ es infinitamente diferenciable y que para cada $n \in \mathbb{N}$
$$\Gamma^{(n)}(t) = \int_0^\infty x^{t-1} (\log x)^n \, e^{-x} dx$$

2. En los siguientes casos comprobar que ϕ está bien definida, y calcular $\phi'(t)$:

   a) $\phi(t) = \displaystyle\int_0^1 \ln(x^2 + t^2) dx; \; t \neq 0$

   b) $\phi(t) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{e^{xt}}{x} \operatorname{sen} x dx$

   c) $\phi(t) = \displaystyle\int_0^\infty t e^{-tx} dx$

   d) $\phi(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx \;\; (t > -1)$

AAVVR

Funciones definidas por integrales. Derivación bajo el signo de integral

Teorema . . .

Integrales Paramétricas

3. Calcular las integrales siguientes, derivando con respecto al parámetro:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-tx}}{xe^x}dx \ (t > -1)$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+t\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx \ (t \geq 0)$

BIBLIOGRAFIA:

Kennan T. Smith, "Primer of Modern Analysis". Springer-Verlag (1983)

J.A. Facenda - F.J. Freniche, "Integración de funciones de varias variables". Ed. Pirámide (2002)