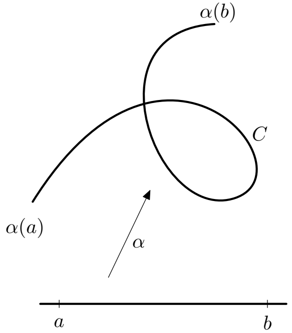
1. Curvas Regulares y Simples

Vamos a estudiar algunas aplicaciones del calculo diferencial e integral a funciones que están definidas sobre los puntos de una curva del plano o del espacio, como por ejemplo la temperatura de un móvil en el espacio, o el trabajo generado por un móvil en un campo de fuerzas. Para ello, empezaremos por dar una definición de las curvas mediante funciones que podamos manipular.

Para unificar las definiciones en el plano y en el espacio, escribiremos $\mathbb{R}^n$, donde n puede ser 2 o 3.

Definición (Curvas en $\mathbb{R}^n$). *Un conjunto C de $\mathbb{R}^n$ es una curva regular y simple si existe una función $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva y regular tal que $C = \alpha([a, b])$*



A la función α se le llama una *parametrización* de C, y los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ se llaman *extremos* de C.

Se dice que una función es regular si es de clase C^1 y la derivada es distinta de cero en todos los puntos.

La condición de que α sea de clase C^1 en el intervalo cerrado $[a, b]$ se entiende como que α

es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b), y en los extremos a y b existen *derivadas laterales*, de modo que la función derivada extendida así hasta los extremos del intervalo sea continua. La condición de que la derivada de α sea distinta de cero se aplica también a esas derivadas laterales en los extremos.

Geométricamente, estas condiciones sobre α implican que en cada punto de C existe una única recta tangente, incluso en los extremos de C, y además que la curva es *suave*: la dirección (y sentido) de la recta tangente varia de forma continua.

Además al ser α inyectiva, la curva no se corta a si misma (no tiene puntos múltiples).

Ejemplo 1. *1. Un segmento entre dos puntos A y B de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ es una curva, que se puede parametrizar mediante la función*

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad \alpha(t) = tB + (1-t)A$$

También se puede parametrizar mediante la función

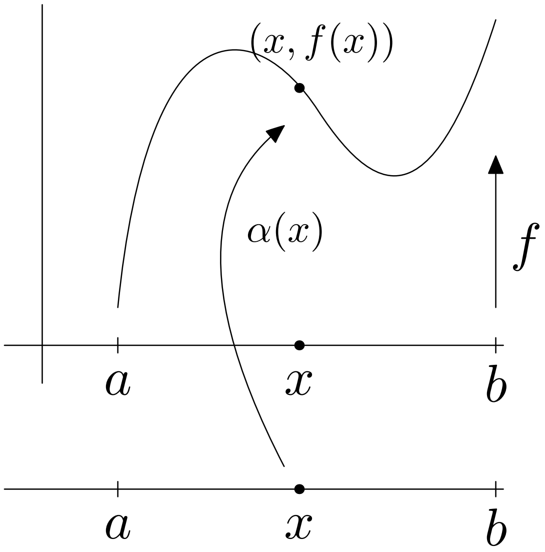
$$\beta : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad \beta(s) = sA + (1-s)B$$

o

$$\gamma(u) = u^3B + (1-u^3)A; \quad \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

2. *La gráfica de una función de clase C^1, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una curva en $\mathbb{R}^2$ que se puede parametrizar mediante la función*

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2; \quad \alpha(x) = (x, f(x))$$



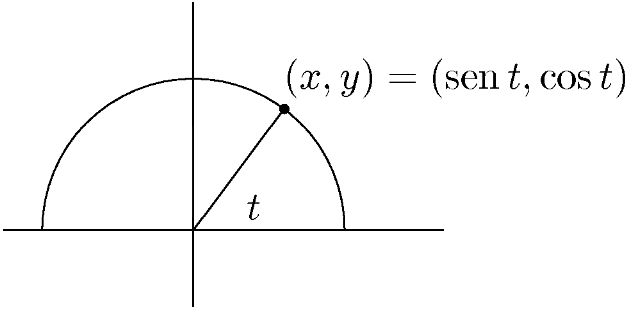
Y si $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, es una función de clase C^1, se puede parametrizar mediante la *función*

$$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad \alpha(x) = (x, f_1(x), f_2(x))$$

donde f_1 y f_2 son las componentes de F.

3. *Una semicircunferencia $C = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 = R^2; \ y \geq 0\}$ es una curva, que se puede parametrizar mediante la función*

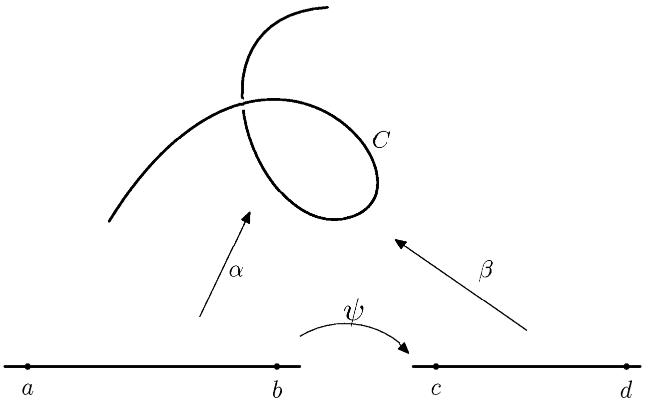
$$\alpha : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2; \ \alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$



La utilización de parametrizaciones para representar curvas nos permite usar técnicas de cálculo para deducir propiedades de las curvas, o de las funciones definidas a lo largo de curvas.

Pero una misma curva admite infinitas parametrizaciones distintas, por lo que hay que tener cuidado en distinguir si una propiedad lo es de C o de la parametrización α.

En el siguiente Teorema se demuestra que si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son dos parametrizaciones de la misma curva, entonces existe una función $\psi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ biyectiva, de clase C^1 y con $\psi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$, tal que $\alpha = \beta \circ \psi$



ψ se denomina cambio de parámetro, y se dice que α y β son equivalentes.

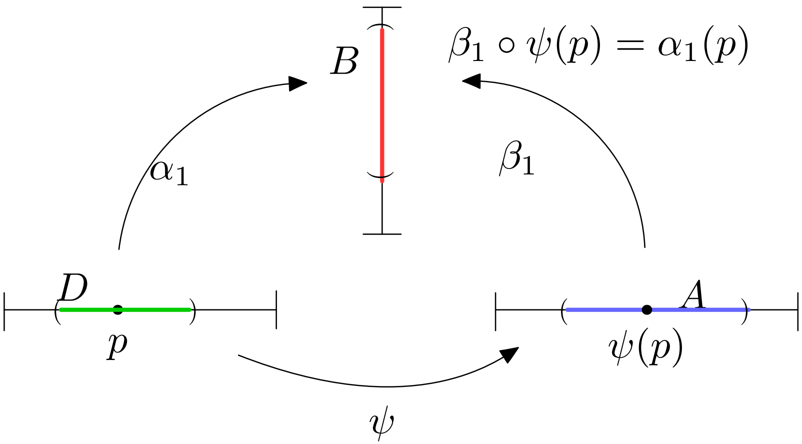
Teorema (Parametrizaciones equivalentes de una curva). *Sean $I = [a,b]$ y $J = [c,d]$ dos intervalos compactos en $\mathbb{R}$, y $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de la misma* *curva C. Entonces existe una función $\psi : I \longrightarrow J$ biyectiva y continua en $I = [a, b]$ y de clase C^1 en $I^0 = (a, b)$, tal que $\alpha = \beta \circ \psi$ y $\psi'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$*

Demostración:

Definimos $\psi = \beta^{-1} \circ \alpha$, que es biyectiva. Además como J es compacto y β es inyectiva y continua, entonces $\beta^{-1} : C \longrightarrow J$ es también continua, luego ψ es continua en $I = [a, b]$, y $\psi(I^0) = J^0$.

Sea ahora $p \in (a, b)$ un punto cualquiera de I^0. Entonces $\psi(p) \in J^0$ y β es regular, luego $\beta'(\psi(p)) \neq 0$. Supongamos por ejemplo que la primera coordenada, $\beta_1'(\psi(p)) \neq 0$. Consideramos entonces sólo la función β_1. De la ecuación $\alpha = \beta \circ \psi$ se deduce $\alpha_1 = \beta_1 \circ \psi$

De la condición $\beta_1'(\psi(p)) \neq 0$ se deduce, aplicando el teorema de la función inversa, que existe un entorno de $\psi(p)$, $A = (\psi(p) - \epsilon, \psi(p) + \epsilon) \cap J$, y un entorno de $\beta_1(\psi(p))$, B, de modo que β_1 es biyectiva de A en B, y tiene una inversa local de clase C^1, $\beta_1^{-1} : B \longrightarrow A$.



Por otra parte, como α_1 *es continua en* p*, existe un entorno de* p*,* $(p-\delta, p+\delta) \cap I$*, tal que* $\alpha_1((p-\delta, p+\delta) \cap I) \subseteq B$*. Podemos aplicar entonces* β_1^{-1}*, y tenemos*

$$\beta_1^{-1} \circ \alpha_1 = \beta_1^{-1} \circ \beta_1 \circ \psi = \psi$$

en $(p-\delta, p+\delta) \cap I$*, luego* ψ *es de clase* C^1 *por ser composición de funciones de clase* C^1 $\square$

Este cambio de parámetro nos va a permitir demostrar que las propiedades que vamos a estudiar lo son de C (no dependen de la parametrización utilizada como modelo de C)

Por ejemplo, la recta tangente a la curva en un punto no depende de la parametrización:

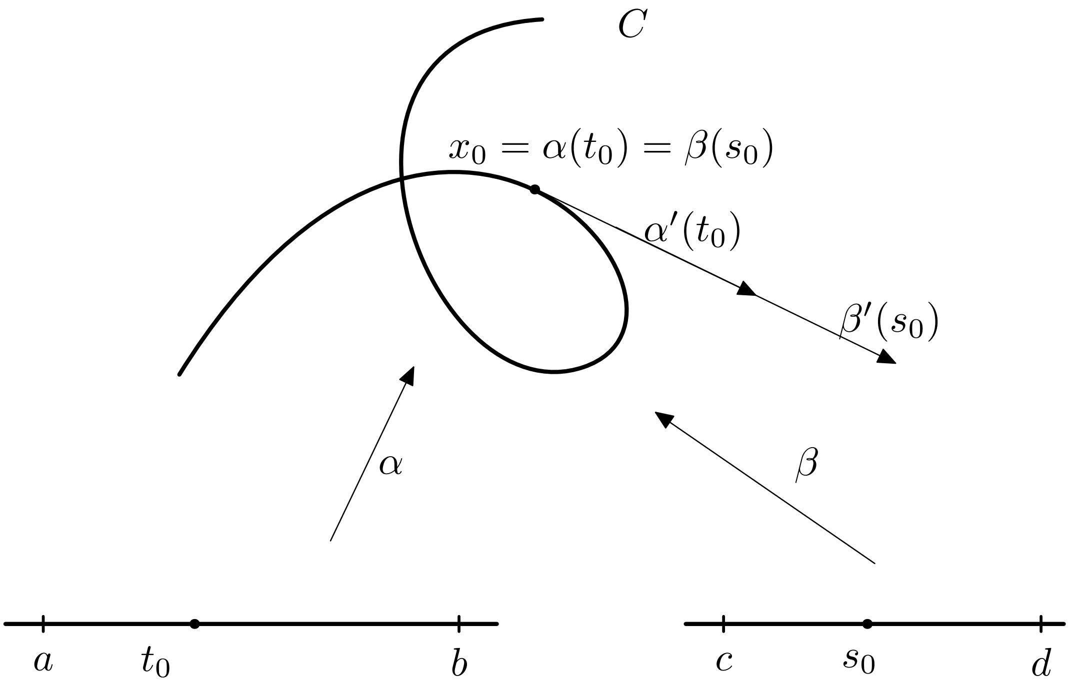
Sean $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y* $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *son dos parametrizaciones de la misma curva, y* $\psi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ *el cambio de parámetro, de modo que* $\alpha = \beta \circ \psi$

Sea $t_0 \in [a,b]$ *tal que* $\alpha(t_0) = x_0$, *y* $s_0 \in [c,d]$ *tal que* $\beta(s_0) = x_0$. *Se tiene* $\psi(t_0) = s_0$, *y*

$$\alpha'(t_0) = (\beta \circ \psi)'(t_0) = \beta'(\psi(t_0))\psi'(t_0) = \beta'(s_0)\psi(t_0)$$

donde $\psi'(t_0) \neq 0$. *Es decir, los vectores* $\alpha'(t_0)$ *y* $\beta'(s_0)$ *son proporcionales, y por tanto son paralelos y definen la misma recta tangente*

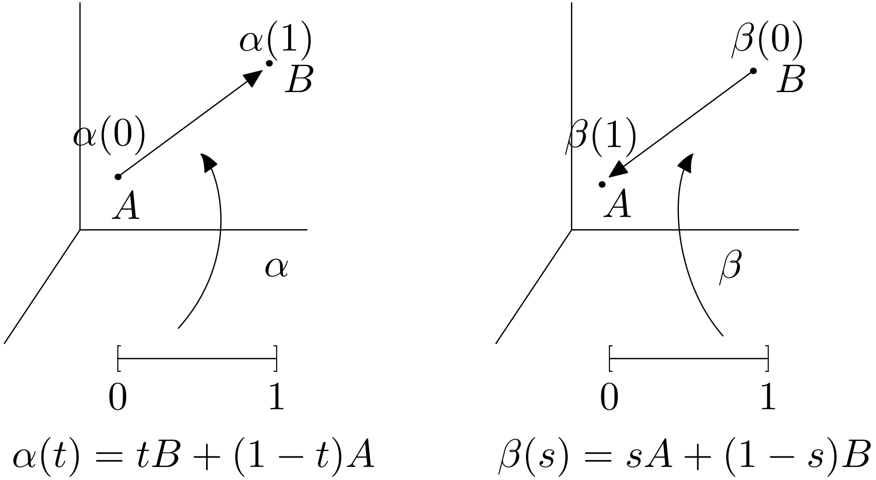
$$R_T : \quad x_0 + \lambda\alpha'(t_0) \quad \equiv \quad x_0 + \mu\beta'(s_0)$$


C
$x_0 = \alpha(t_0) = \beta(s_0)$
$\alpha'(t_0)$
$\beta'(s_0)$
α
β
a
t_0
b
c
s_0
d

Hay un concepto sin embargo en relación con las curvas que sí depende de la parametrización que se utilice, que es la orientación, o el sentido de recorrido de C.

Cuando se escoge una parametrización de una curva, automáticamente se define un sentido de recorrido de C, empezando en $\alpha(a)$ y acabando en $\alpha(b)$

Si en el ejemplo del segmento entre dos puntos consideramos la parametrización α, el sentido de recorrido de C será del punto A al punto B, pero si escogemos la parametrización β, iremos de B a A.



Y hay problemas en los que es fundamental definir el sentido de recorrido que debe tener C.

Es fácil comprobar que dadas dos parametrizaciones α y β de C, las dos definen el mismo sentido de recorrido en C si y sólo si la función de cambio de parámetro es estrictamente creciente ($\psi'(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$), y definen orientaciones opuestas si ψ es estrictamente decreciente ($\psi'(t) < 0$ para todo $t \in [a, b]$). Observemos además que como ψ' es continua, y no se anula nunca, ψ' no puede cambiar de signo en $[a, b]$, así que basta con comprobar en un punto del intervalo si $\psi'(t)$ es positivo o negativo.

Diremos que una curva está orientada si escogemos un sentido de recorrido para C, y escribiremos C^+. Diremos que α es una parametrización de C^+ si es una parametrización de C que la recorra en el sentido de orientación definido para C^+. Si β es otra parametrización de C que describe la curva con la orientación opuesta, diremos que β es una parametrización de C^-

En la práctica, para definir la orientación de una curva, basta con indicar cuál debe ser el extremo inicial y cuál el extremo final, o dar directamente una parametrización de C^+.

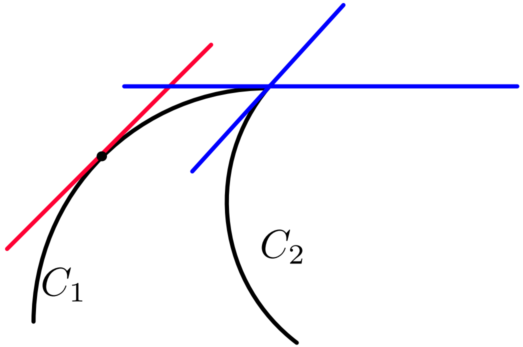
Si α es una parametrización de C^+, una forma sencilla de conseguir una parametrización en sentido opuesto es definir

$$\beta(t) = \alpha(a + b - t)$$

2. Curvas regulares a trozos. Curvas cerradas

Para algunas de las aplicaciones que vamos a estudiar, este tipo de curvas es excesivamente sencillo, por lo que vamos a utilizar dos generalizaciones.

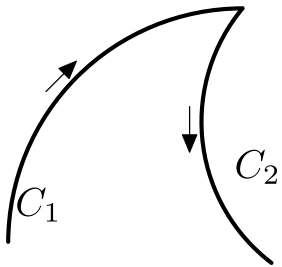
En primer lugar, es posible que la curva tenga algunos picos. Una curva de este tipo tendría una parametrización $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *inyectiva y "regular a trozos", es decir, de modo que existe una familia finita de puntos* $a =\leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = b$ *de modo que* α *es regular en cada intervalo* $[t_i, t_{i+1}]$*. Los picos de la curva estarían en los puntos* $\alpha(t_i)$*, y en ellos habría dos rectas tangentes.*

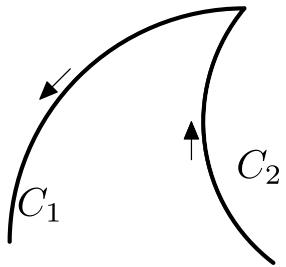


En la práctica puede ser difícil encontrar α *con estas propiedades, y será suficiente considerar* C *como una unión finita de curvas consecutivas* $C_1, \ldots, C_k$ *(que se puedan describir de modo que el extremo final de una curva sea el inicial de la siguiente, y no tengan otro punto en común) Así por ejemplo, dado un punto* x_0 *en* C *que no sea un pico (un punto regular de* C*), estará* *en una de las curvas C_i, y bastará encontrar una parametrización cualquiera de C_i para poder calcular la recta tangente a C en x_0*

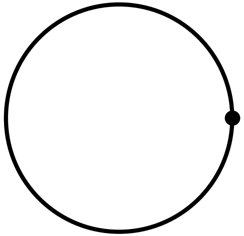
En cada arco C_i todas las parametrizaciones son equivalentes.

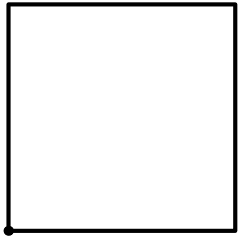
Una curva regular a trozos se orienta como una curva regular, indicando cuál debe ser el extremo inicial y cual el extremo final. Cuando se orienta uno de los trozos de la curva, los demás quedan orientados automáticamente de modo que sean consecutivos; hay que tener cuidado para que la orientación del conjunto sea la correcta.





Otro tipo de curvas que vamos a considerar son las curvas cerradas, como una circunferencia, o un cuadrado





Una curva cerrada puede parametrizarse mediante una función $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que sea regular (o regular a trozos) e inyectiva en* $[a,b)$*, con* $\alpha(a) = \alpha(b)$

Por ejemplo, la circunferencia se puede parametrizar mediante la función

$$\alpha : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t)$$

y el cuadrado mediante la función

$$\beta : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$$

donde

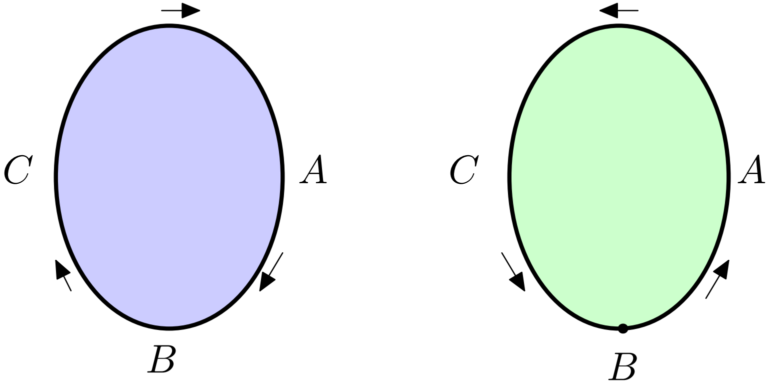
$$\beta_1 : \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \le t \le 2 \\ 3-t & \text{si} \quad 2 \le t \le 3 \\ 0 & \text{si} \quad 3 \le t \le 4 \end{cases} \qquad \beta_2 : \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ t-1 & \text{si} \quad 1 \le t \le 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \le t \le 3 \\ 4-t & \text{si} \quad 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

Sin embargo en la mayoría de los casos es difícil encontrar una parametrización definida en un sólo intervalo $[a, b]$ para toda la curva. A los efectos de los resultados que vamos a utilizar, podemos considerar las curvas cerradas como curvas regulares a trozos, dividiéndolas si es preciso por varios puntos.

La única particularidad que tienen las curvas cerradas es la dificultad para definir la orientación. Una parametrización define automáticamente un sentido de recorrido de la curva, pero como $\alpha(a) = \alpha(b)$, para distinguirlo en un dibujo hacen falta tres puntos: indicando el orden por el que se debe pasar por tres puntos queda unívocamente definida la orientación de C.

Cuando se trata de curvas planas, hay además otros criterios clásicos: se puede decidir si la curva debe recorrerse en sentido horario o en sentido anti-horario. Por convenio se suele considerar que el sentido anti-horario es el sentido positivo, y el sentido horario es el negativo.

Y como este criterio es difícil de distinguir si la curva es muy grande, o muy complicada, también se puede decidir indicando si la región acotada por la curva debe quedar a la izquierda según se recorre la curva (sentido positivo) o a la derecha (sentido negativo).



C
A
B
C
A
B