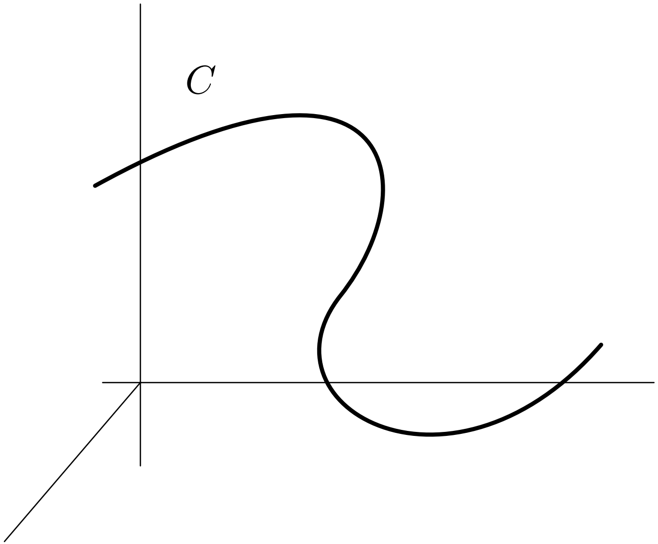
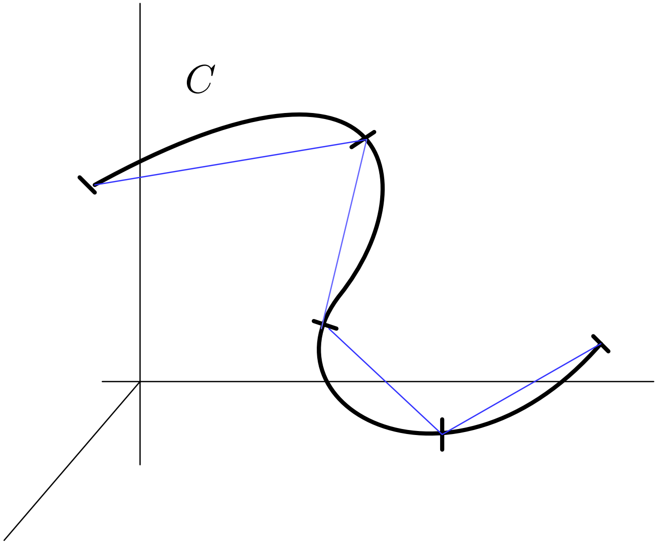
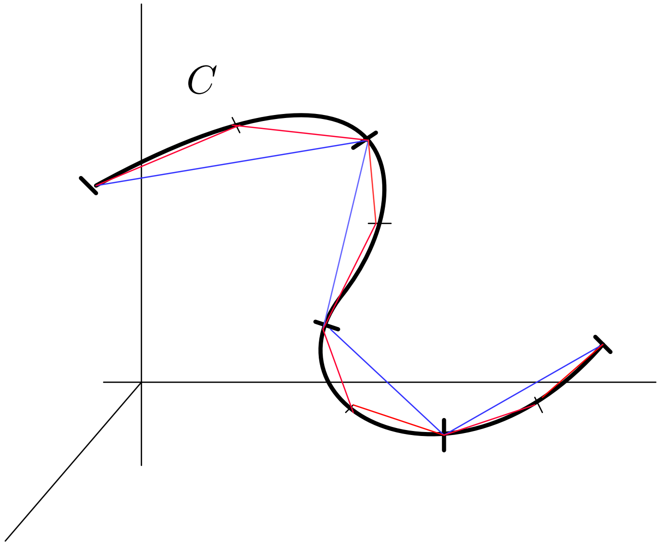
1. Introducción: longitud de una curva

La idea para calcular la longitud de una curva contenida en el plano o en el espacio consiste en dividirla en segmentos pequeños, escogiendo una familia finita de puntos en C, y aproximar la longitud mediante la longitud de la poligonal que pasa por dichos puntos.

Cuantos más puntos escojamos en C, mejor será el valor obtenido como aproximación de la longitud de C.


C


C



Para ello, escogemos una parametrización $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de C, y una partición $P = \{a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k = b\}$, y calculamos aproximadamente la longitud del arco $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ como la longitud del segmento $[\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})]$.

Utilizando la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$, y aplicando a las coordenadas de α el teorema del valor medio en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$,

$$L(\alpha([t_i,t_{i+1}])) = \|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j(t_{i+1})-\alpha_j(t_i)|^2}$$

y

$$|\alpha_j(t_{i+1})-\alpha_j(t_i)| = |\alpha_j'(s_i)||t_{i+1}-t_i|$$

con $s_i \in [t_i,t_{i+1}]$

Utilizamos ahora que como α_j es de clase C^1, su derivada es continua, por lo que si los intervalos $[t_i,t_{i+1}]$ son suficientemente pequeños podemos suponer que $\alpha_j'(s_i) = \alpha_j'(t_i)$, y sustituyendo en la fórmula anterior queda

$$\begin{aligned} \|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j'(t_i)|^2|t_{i+1}-t_i|^2} = \\ &= \|\alpha'(t_i)\|\;|t_{i+1}-t_i| \end{aligned}$$

Así la longitud total de la curva es

$$L(C) = \sum_{i=0}^{k-1} L(\alpha([t_i,t_{i+1}])) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha'(t_i)\|\;|t_{i+1}-t_i|$$

El valor de este sumatorio está entre los valores de la suma inferior y la suma superior de Riemann de la función $g(t) = \|\alpha'(t)\|$ asociadas a la partición P. Si tomamos particiones de $[a, b]$ cada vez más finas, y dado que $g(t) = \|\alpha'(t)\|$ es integrable por ser continua, las sumas superiores e inferiores tienden a la integral de Riemann, y se obtiene la definición de la longitud de C como

$$L(C) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Sin embargo, según esta definición, aparentemente la longitud de una curva dependería de la parametrización α que se utilice para representarla. El siguiente teorema muestra que gracias la equivalencia entre las parametrizaciones de una curva regular y simple, la fórmula anterior no depende de α.

Teorema. *Sea C una curva regular y simple en $\mathbb{R}^n$, y $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de C. Se tiene que*

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds$$

Demostración:

Sea $\psi : [a, b] \Longrightarrow [c, d]$ la función de cambio de parámetro, biyectiva, de clase C^1 y regular, de modo que $\alpha = \beta \circ \psi$. Entonces $\alpha'(t) = \beta'(\psi(t))\psi'(t)$, y aplicando el teorema de cambio de variables

$$\int_c^d \|\beta'(s)\|ds = \int_{\psi^{-1}([c,d])} \|\beta(\psi(t))\| \, |\psi'(t)| \, dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt$$

$\square$

Definición (Longitud de una Curva)**.**
Sea C una curva regular y simple en R^n. Sea $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de C. Se define la longitud de C como

$$l(C) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt$$

Si C es una curva regular a trozos, se define su longitud como la suma de las longitudes de cada trozo regular.

Si C es una curva cerrada simple, se puede dividir por tres puntos, y considerarla como una curva regular a trozos.

2. Integral de linea de un campo escalar

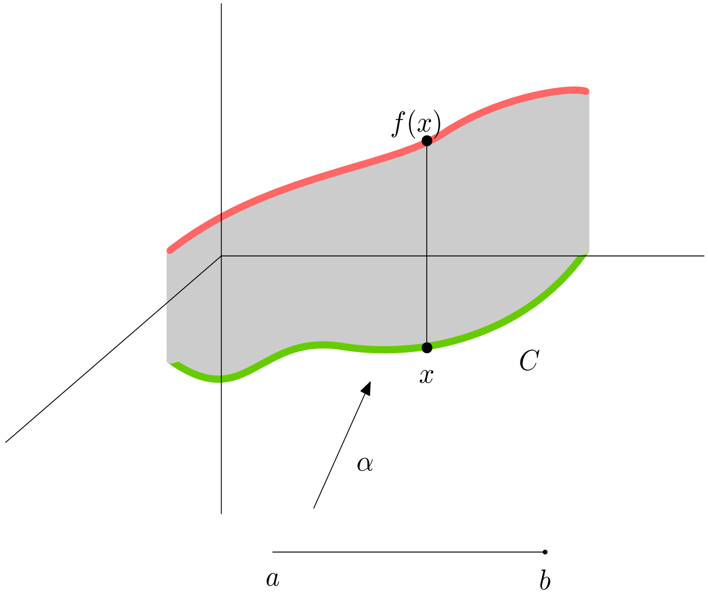
Se llama campo escalar en $\mathbb{R}^n$ a una función definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, como por ejemplo la función que describe la temperatura en cada punto del espacio $\mathbb{R}^3$.

Para entender el significado de la definición de integral de línea de un campo escalar, consideremos el siguiente ejemplo:

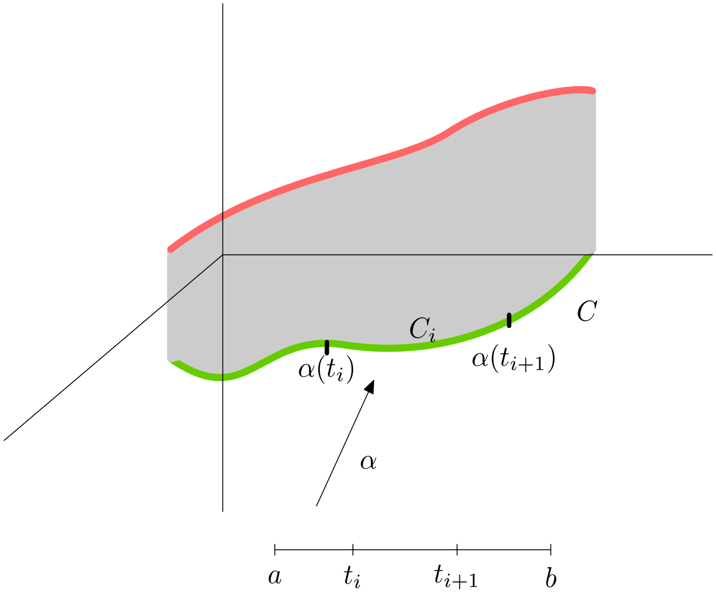
Supongamos que tenemos una curva C en $\mathbb{R}^2$, parametrizada mediante una función $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, y una función escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, continua. Podemos representar gráficamente la función f sobre la curva C como un muro que levanta una altura $f(x, y)$ sobre cada punto (x, y) de C. Se trata ahora de calcular el área de ese muro entre la curva C y la gráfica de f sobre la curva.

AAVVR

Integrales de Linea. Teorema de Green. Teorema fundamental del Cálculo Vectorial



Repitiendo la idea de la construcción de la integral de Riemann en un intervalo, dividimos la curva C por una familia finita de puntos, definiendo una partición P de $[a, b]$, $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$



La curva queda dividida en una unión finita de arcos $C_i = \alpha([t_{i-1}, t_i])$
Definimos las sumas inferiores y superiores

$$\overline{S}(f, C, P) = \sum_{i=1}^{n} M_{C_i}(f) l(C_i)$$

$$\underline{S}(f,C,P)=\sum_{i=1}^{n} m_{C_i}(f)l(C_i)$$

donde $M_{C_i}(f)$ es el ínfimo de f en C_i, $m_{C_i}(f)$ es el supremo de f en C_i, y $l(C_i)$ es la longitud de C_i.

$$M_{C_i}(f)=\sup\{f(x),\ x\in C_i\}=\sup\{f\circ\alpha(t),\ t\in[t_{i-1},t_i]\}=M_{[t_{i-1},t_i]}(f\circ\alpha)$$

$$m_{C_i}(f)=\inf\{f(x),\ x\in C_i\}=\inf\{f\circ\alpha(t),\ t\in[t_{i-1},t_i]\}=m_{[t_{i-1},t_i]}(f\circ\alpha)$$

y

$$l(C_i)=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\alpha'(t)\|dt$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(f,C,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_{[t_{i-1},t_i]}(f\circ\alpha)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\alpha'(t)\|dt = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} M_{[t_{i-1},t_i]}(f\circ\alpha)\|\alpha'(t)\|dt \geq \\
&\geq \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f\circ\alpha(t)\|\alpha'(t)\|dt = \int_a^b f\circ\alpha(t)\|\alpha'(t)\|dt
\end{aligned}
$$

y análogamente

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(f,C,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_{[t_{i-1},t_i]}(f\circ\alpha)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\alpha'(t)\|dt = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} m_{[t_{i-1},t_i]}(f\circ\alpha)\|\alpha'(t)\|dt \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f\circ\alpha(t)\|\alpha'(t)\|dt = \int_a^b f\circ\alpha(t)\|\alpha'(t)\|dt
\end{aligned}
$$

Al variar las particiones de $[a, b]$, y suponiendo condiciones de continuidad para el campo f, las sumas superiores y las sumas inferiores se aproximan a un mismo valor, que será justamente la integral en el intervalo $[a, b]$ de la función $(f \circ \alpha)\|\alpha'\|$. En general diremos que f es integrable a lo largo de α si el supremo de las sumas inferiores coincide con el ínfimo de las sumas superiores, al variar las particiones de $[a, b]$

Aparentemente el resultado de esta integral depende entonces de la parametrización α escogida para representar la curva C, sin embargo, gracias a la equivalencia entre todas las parametrizaciones de una curva regular y simple, esto no es así:

Teorema. *Sea C una curva regular y simple en $\mathbb{R}^n$. Sea $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de C. Sea f una función escalar continua en un abierto que contenga a C. Entonces*

$$\int_a^b f \circ \alpha(t)\|\alpha'(t)\|dt = \int_c^d f \circ \beta(s)\|\beta'(s)\|ds$$

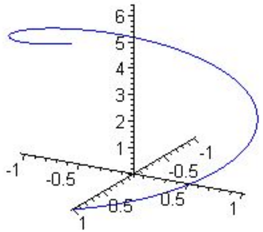
Esto nos permite definir la integral como una propiedad de la curva C, y no de sus parametrizaciones:

Definición (Integral de un campo escalar a lo largo de una curva)**.**
Sea C una curva regular y simple en $\mathbb{R}^n$, y $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de C. Sea f un campo escalar continuo en un abierto que contenga a C. Se define la integral de f a lo largo de C como $\int_C f = \int_a^b f \circ \alpha(t)\|\alpha'(t)\|dt$

Si C es una curva regular a trozos, se define la integral de f a lo largo de C como la suma de las integrales en cada trozo regular.

Si C es una curva cerrada, se puede dividir por tres puntos, y considerarla como una curva regular a trozos.

Ejemplo 1.



Sea $C = \alpha[0, 2\pi]$, donde $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. Calcular $\displaystyle\int_C x^2 + y^2 + z^2$

$\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$, luego $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$ y

$$\begin{aligned} \int_C f = \int_0^{2\pi} f \circ \alpha(t) \|\alpha'(t)\| dt &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2)\sqrt{2} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2}(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}) \end{aligned}$$

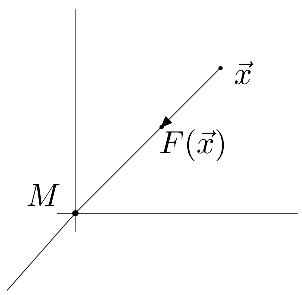
3. Integral de linea de un campo vectorial

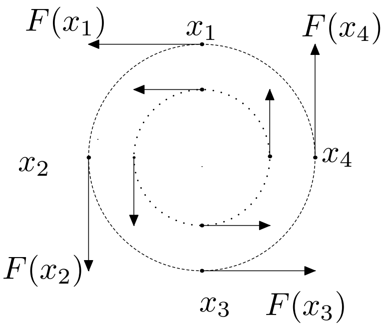
Un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ es una función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que asocia a cada punto del espacio un vector del mismo espacio. Por ejemplo, un campo vectorial puede ser al campo gravitatorio generado por una masa: si tenemos una masa M situado en el origen de coordenadas, sobre un cuerpo de masa m situado en un punto x del espacio actúa una fuerza $F(x)$ que tiene la dirección del vector x, pero sentido opuesto (de x al origen de coordenadas), y magnitud $\|F(x)\| = \dfrac{GMm}{\|x\|^2}$

Utilizando el lenguaje vectorial, el campo de gravedad queda definido por la función

$$F(x) = -\frac{GMm}{\|x\|^2}\,\frac{x}{\|x\|}$$

Un campo vectorial se suele representar gráficamente dibujando en el mismo espacio ($\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) algunos puntos x, y el vector asociado $F(x)$ con origen en el punto x



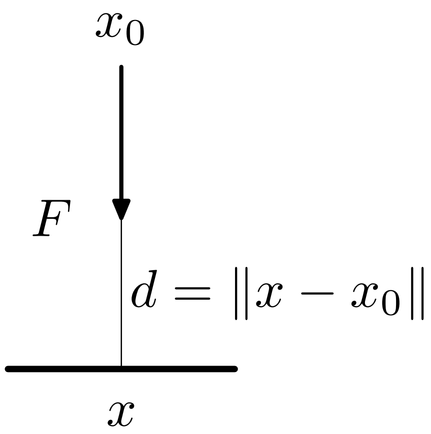


$$F(\vec{x}) = -\frac{GMm\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$

$$F(x,y) = (-y, x)$$

Para entender el significado de la integral de un campo vectorial a lo largo de una curva, consideramos el ejemplo del cálculo del trabajo generado por un campo de fuerzas sobre un móvil que se desplaza dentro de él.

El caso más sencillo es el del trabajo generado por la caída de un cuerpo por el efecto de la gravedad:



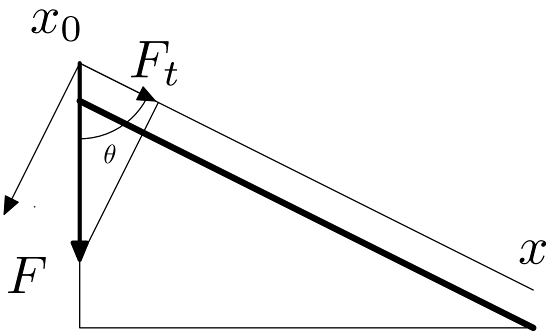
En principio el trabajo generado se calcula como el producto de la fuerza por el desplazamiento,

$$T = F \cdot d$$

Este concepto se concreta un poco más, añadiendo un signo que interprete si el trabajo se genera (cuando la fuerza tiene el mismo sentido que el desplazamiento) o se consume (cuando la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento, por ejemplo para levantar otra vez el objeto). En lenguaje vectorial, $d = \|x - x_0\|$, y

$$T = \pm \|F\| \cdot \|x - x_0\|$$

Un caso un poco más complicado es el del trabajo generado por el desplazamiento de un móvil por un plano inclinado, sujeto sólo al efecto de la fuerza de la gravedad.



El vector F se puede descomponer como suma de dos vectores, uno en la dirección del desplazamiento y otro perpendicular al plano inclinado. Sólo la componente del vector F en la dirección del desplazamiento, F_t genera trabajo.

$$T = \pm\|F_t\| \cdot \|x - x_0\|$$

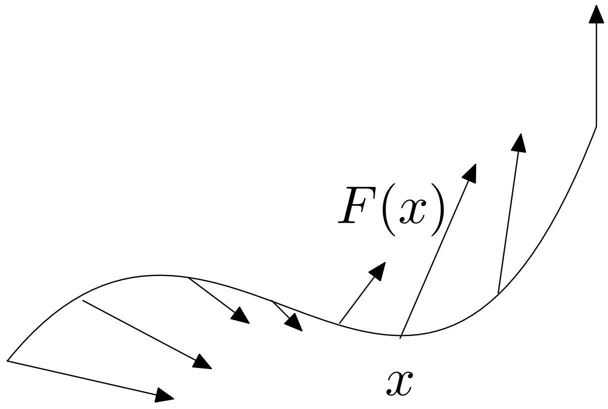
Utilizando un poco de trigonometría y el producto escalar, se tiene

$$\|F_t\| = \|F\| \cos\theta = \frac{|< F, x - x_0 >|}{\|x - x_0\|}$$

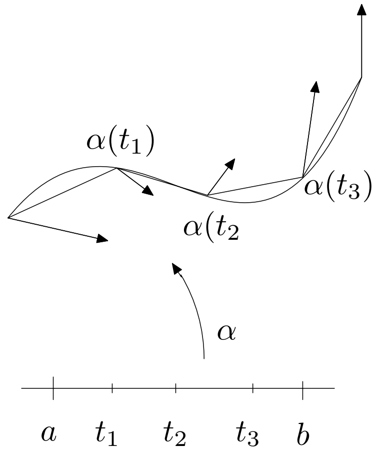
y por tanto

$$T = \pm\frac{|< F, x - x_0 >|}{\|x - x_0\|} \cdot \|x - x_0\| =< F, x - x_0 >$$

Por último, consideremos el caso general, en el que hay un campo vectorial continuo pero que no es constante, y un movimiento que no es rectilíneo.



La idea entonces es dividir la curva C trayectoria del móvil en segmentos lo bastante pequeños como para poder suponer que son rectos y que en cada uno el campo sí es constante (gracias a la continuidad). Para ello escogemos una parametrización $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de C, y una partición $P = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = b\}$



Calculamos el trabajo generado en cada arco de curva $C_i = \alpha([t_i, t_{i+1}])$ como si fuera un segmento recto, y el campo fuera constantemente $F(\alpha(t_i))$. La componente tangencial de $F(\alpha(t_i))$ en la dirección de la curva la podemos calcular utilizando el vector director de la recta tangente a la curva en el punto $\alpha(t_i)$, $\alpha'(t_i)$; como también $\alpha'(t)$ es continua, podemos suponer que si C_i es bastante pequeño $\alpha'(t)$ es constante. De este modo

$$\|F_t(\alpha(t_i))\| = \frac{< F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) >}{\|\alpha'(t_i)\|}$$

Así, si llamamos $L(C_i)$ a la longitud de C_i, el trabajo generado en C_i es aproximadamente

$$
\begin{aligned}
T_i &= \frac{< F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) >}{\|\alpha'(t_i)\|} L(C_i) \\
&= \frac{< F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) >}{\|\alpha'(t_i)\|} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\alpha'(t)\| dt \\
&\simeq \frac{< F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) >}{\|\alpha'(t_i)\|} \|\alpha'(t_i)\| \, |t_{i+1} - t_i| \\
&= < F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) > \, |t_{i+1} - t_i|
\end{aligned}
$$

El trabajo total generado a lo largo de la curva C será la suma de estos valores T_i

$$
T = \sum_{i=0}^{k-1} T_i = \sum_{i=0}^{k-1} < F(\alpha(t_i)), \alpha'(t_i) > \, |t_{i+1} - t_i|
$$

Si tomamos ahora particiones del intervalo $[a, b]$ cada vez con más puntos, estas sumas tienden al valor de la integral

$$
T = \int_a^b < F \circ \alpha(t), \alpha'(t) > dt
$$

Esta expresión es la que se va a utilizar como definición de la integral de F a lo largo de la curva C. Aparentemente el resultado de la integral depende de la función α que se utilice para parametrizar la curva C. El siguiente resultado muestra que realmente sólo depende de la orientación que α define sobre la curva, lo que era de esperar si pensamos en la interpretación del problema físico en el que nos hemos basado: si recorriendo la curva en un sentido se genera trabajo, al volver sobre la misma en sentido contrario se consumirá la misma cantidad de trabajo.

La demostración del resultado se basa en la equivalencia de las parametrizaciones de una curva regular y simple, y en el teorema de cambio de variable. Recordemos que dos parametrizaciones de la misma curva tienen la misma orientación si y sólo si la función de cambio de parámetro es creciente, o lo que es lo mismo, si su derivada es positiva en todos los puntos; y tienen orientaciones opuestas si el cambio de parámetro es decreciente, o su derivada es negativa.

Teorema. *Sea C una curva regular y simple en $\mathbb{R}^n$, U un abierto que contenga a C, y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Sean $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de C.*

Si α y β tienen la misma orientación en C, entonces

$$\int_a^b < F \circ \alpha(t), \alpha'(t) > dt = \int_c^g < F \circ \beta(t), \beta'(t) > dt$$

Y si α y β tienen orientaciones opuestas en C, entonces

$$\int_a^b < F \circ \alpha(t), \alpha'(t) > dt = -\int_c^d < F \circ \beta(t), \beta'(t) > dt$$

Definición (Integral de línea de un campo vectorial)**.**
Sea C^+ una curva regular y simple orientada en $\mathbb{R}^n$, U un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contenga a C, y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Sea $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización cualquiera de C^+. Se define la integral de F a lo largo de C^+ como

$$\int_{C^+} F = \int_a^b < F \circ \alpha(t), \alpha'(t) > dt$$

Si C^+ es regular a trozos, se define la integral de F a lo largo de C^+ como la suma de las integrales sobre cada trozo regular, orientados de forma compatible con la definición de C^+. y análogamente si C^+ es una curva cerrada simple regular a trozos y orientada.

Si llamamos C^- a la curva C con la orientación opuesta, se tiene

$$\int_{C^+} F = -\int_{C^-} F$$

Notaciones:

$$\int_{C^+} F = \int_{C^+} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

Ejemplo:

Sea $C^+ = \{(x,y) : \; x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \quad \text{ó} \quad y \leq 0\}$ orientada de $P = (0,1)$ a $Q = (1,0)$. Calcular $\displaystyle\int_{C^+} (x^2, -xy)$

4. Teorema de Green

Definición (Regiones elementales del plano).
Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ *se llama* región elemental si existen funciones de clase C^1, $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $q : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $r : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $s : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$S = \{(x,y) : \ x \in [a,b], \ p(x) \leq y \leq q(x)\} = \{(x,y) : \ y \in [c,d], \ r(y) \leq x \leq s(y)\}$$

Una región elemental es un conjunto medible Jordan, y además su frontera es una curva cerrada simple regular a trozos.

Teorema (Teorema de Green).
Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ *una región elemental, y* $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial de clase* C^1 *en un abierto* U *que contenga a* S. *Entonces*

$$\int_{Fr(S)^+} F = \int_S \left(\frac{df_2}{dx}(x,y) - \frac{df_1}{dy}(x,y)\right) d(x,y)$$

donde $F = (f_1, f_2)$ *y* $C^+ = Fr(S)^+$ *es la frontera de* S *orientada positivamente (dejando la región* S *a la izquierda)*

Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

Para demostrar el teorema, descomponemos el campo F como suma de dos campos, $F = (f_1, f_2) = (f_1, 0) + (0, f_2)$. Vamos a demostrar que para el campo $(f_1, 0)$ se verifica la ecuación

$$\int_{C^+} (f_1, 0) = \iint_S -\frac{df_1}{dy}(x, y)d(x, y)$$

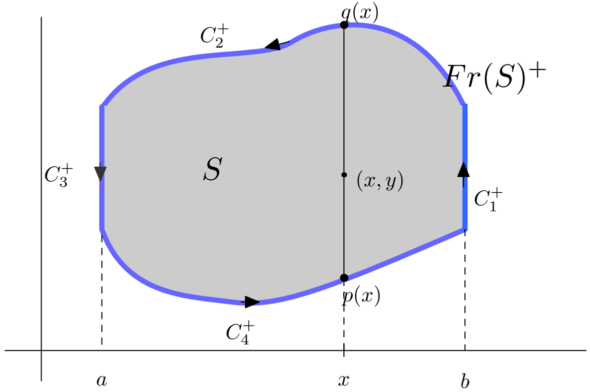
Análogamente se demuestra que también

$$\int_{C^+} (0, f_2) = \iint_S \frac{df_2}{dx}(x, y)d(x, y)$$

y sumando las dos igualdades se obtiene

$$\int_{C^+} (f_1, f_2) = \int_{C^+} (f_1, 0) + \int \int_{C^+} (0, f_2) = \iint_S \frac{df_2}{dx}(x, y) - \frac{df_1}{dy}(x, y)d(x, y)$$

Como S es una región elemental, existen dos funciones de clase C^1, $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $S = \{(x, y) : \; a \leq x \leq b; \; p(x) \leq y \leq q(x)\}$.



La Frontera de S está formada por cuatro trozos regulares, $Fr(S)^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+ \cup C_4^+$
C_1^+ se puede parametrizar mediante la función

$$\alpha(t) = (b,t);\ t \in [p(b), q(b)]$$

que verifica $\alpha'(t) = (0,1)$, luego

$$\int_{C_1^+} (f_1, 0) = \int_{p(b)}^{q(b)} < (f_1\alpha(t), 0), (0,1) > dt = 0$$

Análogamente C_3^- se puede parametrizar mediante la función

$$\beta(t) = (a,t);\ t \in [p(a), q(a)]$$

Introducción:...
Integral de linea de...
Integral de linea de...
Teorema de Green
Teorema...

que verifica $\beta'(t) = (0,1)$, luego

$$\int_{C_3^+} (f_1, 0) = -\int_{C_3^-} (f_1, 0) = -\int_{p(a)}^{q(a)} < (f_1\beta(t), 0), (0,1) > dt = 0$$

C_2^- se puede parametrizar mediante la función que describe la gráfica de la función $q(x)$,

$$\lambda(x) = (x, q(x)),\ x \in [a,b]$$

que verifica $\lambda'(x) = (1, q'(x)$, de modo que

$$\int_{C_2^+} (f_1, 0) = -\int_{C_2^-} (f_1, 0) = -\int_a^b < (f_1\lambda(x), 0), (1, q'(x)) > dx = -\int_a^b f_1(x, q(x))dx$$

Por último C_4^+ se puede parametrizar mediante la función

$$\delta(x) = (x, p(x));\ x \in [a,b]$$

que verifica $\delta'(x) = (1, p'x))$, y

$$\int_{C_4^+} (f_1, 0) = \int_a^b < (f_1\delta(x), 0), (1, p'(x)) > dx = \int_a^b f_1(x, p(x))dx$$

Por tanto

$$\int_{Fr(S)^+} (f_1, 0) = \int_a^b f_1(x, p(x)) - f_1(x, q(x))dx$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Fubini para el cálculo de la integral de $\frac{df_1}{dy}$ en S, se tiene

$$\iint_S \frac{df_1}{dy}(x, y)d(x, y) = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} \frac{df_1}{dy}(x, y)dydx = \int_a^b f_1(x, q(x)) - f_1(x, p(x))dx$$

aplicando que, según la Regla de Barrow,

$$\int_{p(x)}^{q(x)} \frac{df_1}{dy}(x, y)dy = f_1(x, q(x)) - f_1(x, p(x))$$

Comparando los dos resultados, se tiene

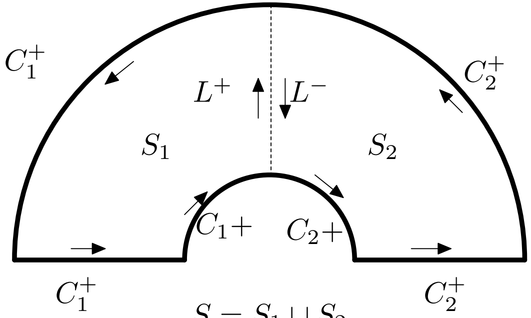
$$\int_{C^+} (f_1, 0) = \iint_S -\frac{df_1}{dy}(x, y)d(x, y)$$

La otra igualdad, $\int_{C^+} (0, f_2) = \iint_S \frac{df_2}{dx}(x, y)d(x, y)$ se demuestra análogamente, expresando S como región elemental respecto al eje vertical

◀(Volver al enunciado) □

Ejemplo 2. *Aplicación del teorema de Green en regiones elementales a trozos: aunque la demostración se hace sólo en regiones elementales, la fórmula que se obtiene se puede aplicar también a campos definidos en regiones del plano que se pueden descomponer como unión de regiones elementales que no se solapen (como un puzzle).*

Consideremos un ejemplo: Si S es la región de la figura, y la descomponemos como unión de dos regiones elementales S_1 y S_2 trazando el segmento L, podemos aplicar el teorema en S_1 y S_2 por separado.



$$S = S_1 \cup S_2$$

$$Fr(S)^+ = C_1^+ \cup C_2^+$$

La frontera de S_1 está formada por la curva C_1 y el segmento L, orientados como se indica en el dibujo. La frontera de S_2 está formada por la curva C_2, y el segmento L con la orientación opuesta. Y la frontera de S está formada por las curvas C_1 y C_2

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\int_S \frac{df_2}{dx}(x,y) - \frac{df_1}{dy}(x,y)d(x,y) = \\
&= \int_{S_1} \frac{df_2}{dx}(x,y) - \frac{df_1}{dy}(x,y)d(x,y) + \int_{S_2} \frac{df_2}{dx}(x,y) - \frac{df_1}{dy}(x,y)d(x,y) = \\
&= \int_{Fr(S_1)^+} F + \int_{Fr(S_2)^+} F = \\
&= \left(\int_{C_1^+} F + \int_{L^+} F\right) + \left(\int_{C_2^+} F + \int_{L^-} F\right) = \\
&= \int_{C_1^+} F + \int_{C_2^+} F = \int_{Fr(S)^+} F
\end{aligned}
$$

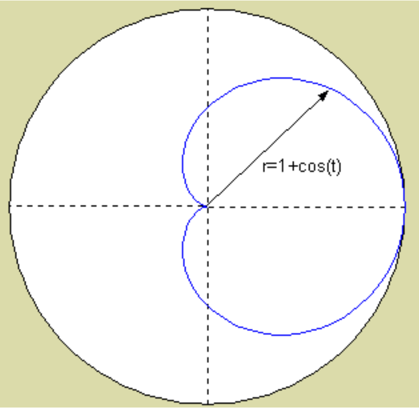
Ejemplo 3. *Una de las aplicaciones usuales del teorema de Green es el cálculo de áreas de regiones elementales a trozos del plano:*

Si S es una región elemental, y $F(x,y)$ es un campo de clase C^1 en un abierto que contenga a S y que verifique que la diferencia de las derivadas cruzadas de sus componentes es 1, $(\frac{df_1}{dy}(x,y) - \frac{df_2}{dx}(x,y) = 1)$, entonces aplicando el teorema

$$v(S) = \int_S 1 d(x,y) = \int_S \frac{df_1}{dy}(x,y) - \frac{df_2}{dx}(x,y) = \int_{Fr(S)^+} F$$

Como campo F se puede utilizar, por ejemplo, $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$

Calcular el área encerrada por la cardioide, $r = 1 + \cos\theta$



La ecuación $r = 1 + \cos\theta$ define en coordenadas polares la cardioide, de modo que

$$x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Estas ecuaciones nos dan una parametrización de la curva como una función $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ definida en $[0, 2\pi]$

.

$$\begin{aligned}\alpha'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta)) =& \\ =\ & (-\operatorname{sen}\theta\cos\theta - (1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta) = \\ =\ & (-\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta, \cos\theta + \cos 2\theta)\end{aligned}$$

Utilizando el campo vectorial $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$, tenemos

$$A = \int_{C^+} F = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} < (-y(\theta), x(\theta)), (x'(\theta), y'(\theta)) > d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(-(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}2\theta) + ((1+\cos\theta)\cos\theta)(\cos\theta + \cos 2\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta = 3\pi$$

5. Teorema Fundamental del Cálculo Vectorial

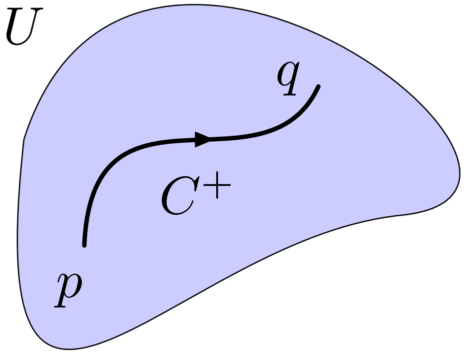
El siguiente teorema es una versión del teorema fundamental del cálculo de funciones reales de una variable real para las integrales de linea. Desde el punto de vista de la interpretación de los modelos de problemas de la física, es también una propiedad fundamental de algunos fenómenos, que dan lugar a leyes como la conservación de la energía o de los momentos de inercia, etc.

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo Vectorial)**.** *Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en U, y p, q dos puntos de U tales que existe una curva simple regular a trozos contenida en U de p a q, C^+ Se tiene*

$$\int_{C^+} \nabla f = f(q) - f(p)$$

Demostración:

(Saltar al final de la demostración)



Supongamos primero que C^+ es una curva regular y simple contenida en U, de p a q, y sea $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de C^+ (de modo que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$).

.

Consideremos la función $f \circ \alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$:
$(f \circ \alpha)$ es de clase C^1 en $[a, b]$, y
$(f \circ \alpha)'(t) =< \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) >$
Entonces

$$\begin{aligned}\int_{C^+} \nabla f &= \int_a^b < \nabla f \circ \alpha(t), \alpha'(t) > dt = \\ &= \int_a^b (f \circ \alpha)'(t) dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(q) - f(p)\end{aligned}$$

Si C^+ es regular a trozos, existe una familia finita de puntos $\{a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k = b\}$ de modo que α es regular en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Entonces llamando C_i^+ a cada curva $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ orientada de $\alpha(t_i)$ a $\alpha(t_{i+1})$, y aplicando el caso anterior

$$\int_{C^+} \nabla f = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{C_i^+} \nabla f =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} (f(\alpha(t_{i+1})) - f(\alpha(t_i))) =$$
$$= f(\alpha(t_1)) - f(\alpha(t_0)) + f(\alpha(t_2)) - f(\alpha(t_1)) + \cdots + f(\alpha(t_k)) - f(\alpha(t_{k-1})) =$$
$$= f(\alpha(t_k)) - f(\alpha(t_0)) = f(q) - f(p)$$

◀(Volver al enunciado) □

Es decir, la integral de un gradiente continuo a lo largo de cualquier curva contenida en U depende sólo de los extremos de la curva, y no de la curva en sí. Esta propiedad da nombre a un tipo especial de campos vectoriales:

Definición (Campos conservativos).
Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en U. Se dice que f

es conservativo en U si para todos p y q en U, la integral a lo largo de cualquier curva simple regular a trozos contenida en U que una p y q es la misma (depende sólo de los puntos p y q, y no de la curva).

Esta propiedad es equivalente a que la integral a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en U valga cero.

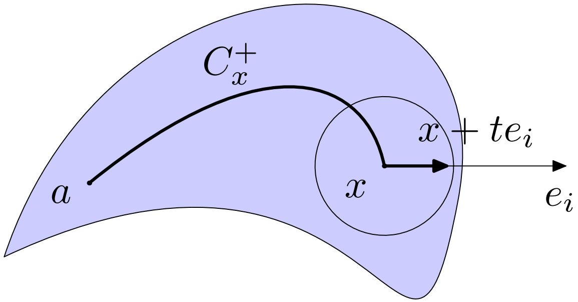
Según el teorema, los gradientes continuos son campos conservativos en cualquier abierto de su dominio. El que un campo sea conservativo o no depende del campo, y del conjunto donde está definido. Si U es un abierto conexo, de hecho todos los campos conservativos son gradientes de una función de clase C^1

Teorema (Campos Conservativos)**.**
Sea U un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$, y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial conservativo en U. Sea $a \in U$ fijo, y definamos para cada $x \in U$ la función $f(x) = \displaystyle\int_{C_x^+} F$, *donde C_x^+ es una curva simple regular a trozos contenida en U de a a x. Entonces existe ∇f y además $\nabla f(x) = F(x)$ para todo $x \in U$.*

Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

En primer lugar, f está bien definida, en el sentido de que al ser F conservativo, la integral sólo depende del punto x.

Tenemos que demostrar que en cada $x \in U$ existen todas las derivadas parciales $\dfrac{df}{dx_i}(x)$ y que $\dfrac{df}{dx_i}(x) = f_i(x)$, donde $F = (f_1, \ldots, f_n)$



Sea $x \in U$ fijo, y consideremos los puntos de la forma $x + t\vec{e_i}$, con $|t|$ suficientemente pequeño para que no se salgan de U. Tenemos que calcular

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}.$$

Para calcular $f(x + te_i)$ trazamos una curva de a a $x + te_i$ prolongando la curva C_x^+ con el segmento $S^+ = [x, x + te_i]$, de modo que $f(x + te_i) = \int_{C^+} F + \int_{S^+} F$, y

$$\frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int_{C^+} F + \int_{S^+} F - \int_{C^+} F\right) = \frac{1}{t}\int_{S^+} F$$

S^+ se puede parametrizar mediante la función $\beta(s) = x + s(te_i)$, definida en $[0, 1]$, de modo que $\beta'(s) = te_i$ y

$$\begin{aligned}\int_{S^+} F &= \int_0^1 < F(x+ste_i), te_i > ds = \int_0^1 f_i(x+ste_i)tds = \\ &= \int_0^t f_i(x+ue_i)du = \int_0^t h(u)du\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = st$, y llamando $h(u)$ a $f_i(x+ue_i)$

Si llamamos $g(t) = \int_0^t h(u)du$, el teorema fundamental del cálculo de funciones reales asegura que como h es continua, g es derivable, y además $g'(t) = h(t)$.

Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_i)-f(x)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(g(t)-g(0)\right)) = \\ &= g'(0) = h(0) = f_i(x)\end{aligned}$$

y queda demostrado el teorema.

◀(Volver al enunciado) □

Definición (Función Potencial)**.**
Sea F un campo vectorial continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se llama función potencial de F a cualquier función f de clase C^1 en U que verifique $F = \nabla f$, si es que existe.

El último resultado es una condición necesaria para que un campo de clase C^1 definido en una abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ sea conservativo, y es consecuencia inmediata del teorema de igualdad de las derivadas cruzadas de las funciones de clase C^2.

Proposición. *Sea U un abierto conexo en $\mathbb{R}^n$ y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo conservativo de clase C^1 en U. Entonces para todo $x \in U$ se tiene*

$$\frac{df_j}{dx_i}(x) = \frac{df_i}{dx_j}(x) \quad \textit{para todo } i, j = 1, \ldots, n$$

Ejemplo 4. *Estudiar si los siguientes campos vectoriales son conservativos, y en su caso hallar una función potencial*

1) $F(x,y) = (y \operatorname{sen} x, x \operatorname{sen} y)$ en $\mathbb{R}^2$

2) $F(x,y) = \left(\dfrac{2y}{x^2+y^2}, \dfrac{-2x}{x^2+y^2}\right)$ en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

3) $F(x,y,z) = (\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2y, 2\cos 2y \operatorname{sen}^2 x, -2z \operatorname{sen}(z^2))$

En el primer caso, el campo es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, que es un abierto conexo, así que para ser conservativo debería tener las derivadas crudas iguales, pero

$$\frac{df_1}{dy}(x,y) = \operatorname{sen} x$$

y

$$\frac{df_2}{dx}(x,y) = \operatorname{sen} y$$

luego no es conservativo.

En el segundo caso, también F es de clase C^1 en U (aunque no lo es en $\mathbb{R}^2$), y U también es un abierto conexo. Además

$$\frac{df_1}{dy}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

y

$$\frac{df_2}{dx}(x,y) = \frac{-2(x^2+y^2)+4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)2}$$

son iguales.

Sin embargo F no es conservativo: la condición de la proposición no es suficiente.

Si calculamos la integral de F a lo largo de la circunferencia unidad, parametrizada mediante la función $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ en $[0, 2\pi]$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{C^+} F &= \int_{C^+} f_1 dx + f_2 dy = \\
&= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) + (-2\cos t)\cos t dt = \int_0^{2\pi} (-2) dt = -4\pi \neq 0
\end{aligned}$$

En el tercer caso, vamos a ver cómo se puede encontrar una función potencial de F. Debe ser una función f de clase C^1 que verifique las ecuaciones

$$\frac{df}{dx}(x,y,z) = f_1(x,y,z) = \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2y$$
$$\frac{df}{dy}(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 2\cos 2y \operatorname{sen}^2 x$$
$$\frac{df}{dz}(x,y,z) = f_3(x,y,z) = -2z \operatorname{sen}(z^2)$$

Observando la última ecuación, que parece la más sencilla, f tendrá que ser una primitiva (integrando respecto de z) de la función $-2z \operatorname{sen}(z^2)$

$$f(x,y,z) = \int -2z \operatorname{sen}(z^2) dz = \cos(z^2) + \phi(x,y)$$

donde $\phi(x,y)$ puede ser cualquier función que no dependa de z.

Derivando ahora esta expresión de f respecto de x, deberá verificarse la primera ecuación, así que

$$\frac{df}{dx}(x,y,z) = \frac{d\phi}{dx}(x,y) = \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2y$$

y por tanto, otra vez calculando primitivas (ahora respecto de x)

$$\phi(x,y)=\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2y dx=\frac{-1}{2}\cos 2x \operatorname{sen} 2y+\psi(y)$$

donde $\psi(y)$ puede ser cualquier función que no dependa de x (ni por supuesto de z)

Tenemos entonces $f(x,y,z)=\cos(z^2)+\frac{1}{2}\cos 2x \operatorname{sen} 2y+\psi(y)$

Derivando ahora respecto de y tenemos la segunda ecuación del sistema

$$\frac{df}{dy}(x,y,z)=\frac{-1}{2}\cos 2x 2\cos 2y+\psi'(y)=2\cos 2y \operatorname{sen}^2 x$$

despejando $\psi'(y)$

$$\psi'(y)=\cos 2y(2\operatorname{sen}^2 x+\cos 2x)=\cos 2y(2\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)=\cos 2y$$

y por tanto

$$\psi(y)=\int \cos 2y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2y+K$$

donde K es una constante cualquiera.

Así

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \cos(z^2)-\frac{1}{2}\cos 2x \operatorname{sen} 2y+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2y+K= \\ &= \cos(z^2)+\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2y+K \end{aligned}$$