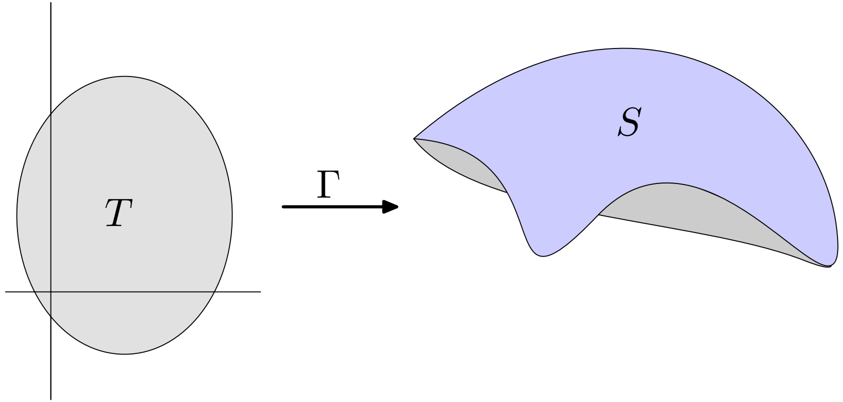
1. Superficies Regulares y Simples

En los próximos capítulos vamos a estudiar algunas aplicaciones del cálculo diferencial e Integral a funciones definidas sobre una superficie, partiendo de ejemplos de la dinámica de fluidos. Para ello en este capítulo daremos una definición de superficie mediante funciones que podamos manipular con técnicas analíticas. Aunque la teoría de superficies se puede desarrollar en espacios $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, vamos a considerar sólo superficies en $\mathbb{R}^3$

Definición (Superficies en $\mathbb{R}^3$)**.** *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama una superficie regular y simple si existe una región elemental del plano $T \subseteq \mathbb{R}^2$ y una función $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva y regular en T, tal que $S = \Gamma(T)$*



La función Γ se llama una parametrización de S, y se llama *borde* de S a la imagen por Γ de la frontera de T, $b(S) = \Gamma(Fr(T))$

La función Γ tiene tres componentes y dos variables, y se suele escribir como

$$\Gamma(u,v) = (\gamma_1(u,v), \gamma_2(u.v), \gamma_3(u,v))$$

o interpretando las componentes de Γ como las coordenadas de un punto en el espacio

$$\Gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Recordamos que un conjunto $T \subset \mathbb{R}^2$ es una región elemental del plano si existen funciones de clase C^1, $p : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ q : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ r : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $s : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y) :\ x \in [a,b],\ p(x) \le y \le q(x)\} = \\ &= \{(x,y) :\ y \in [c,d],\ r(y) \le x \le s(y)\} \end{aligned}$$

Y la función Γ regular en T quiere decir que es de clase C^1 y tiene diferencial de rango 2, en un abierto U que contiene a T.

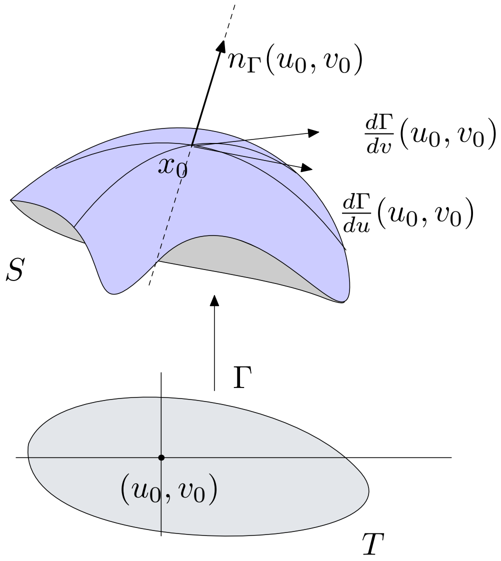
(Si $n = 1$, una región elemental es un intervalo $[a,b]$, y la condición de función regular que hemos utilizado en la teoría de curvas es equivalente a ésta: α es regular en $[a,b]$ si y sólo si se puede extender a un intervalo abierto I que contenga a $[a,b]$, de forma que sea regular en I)

La condición de que Γ sea regular implica que la matriz

$$d\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{d\Gamma}{du} & \frac{d\Gamma}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d\gamma_1}{du} & \dfrac{d\gamma_1}{dv} \\ \dfrac{d\gamma_2}{du} & \dfrac{d\gamma_2}{dv} \\ \dfrac{d\gamma_3}{du} & \dfrac{d\gamma_3}{dv} \end{pmatrix}$$

tiene rango dos, y por tanto que los dos vectores columnas $\frac{d\Gamma}{du}$ y $\frac{d\Gamma}{dv}$ son linealmente independientes, o lo que es lo mismo, su producto vectorial no es cero

$$n_\Gamma = \frac{d\Gamma}{du} \times \frac{d\Gamma}{dv} \neq \vec{0}$$



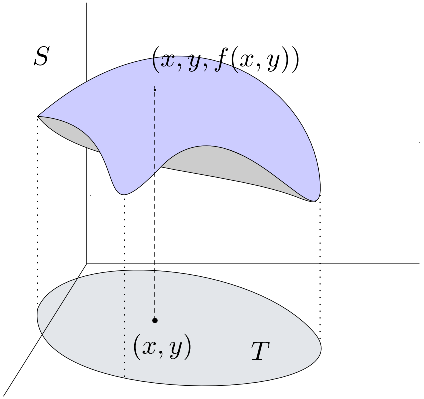
Geométricamente, esto indica que la superficie no tiene picos o aristas, y en cada punto de S existe un único plano tangente. La condición de que Γ sea inyectiva implica que la superficie no tiene puntos múltiples, no se corta a sí misma.

La frontera de T es una curva cerrada simple regular a trozos en el plano, y el borde de S es una curva cerrada simple regular a trozos en el espacio.

AAVVR

Superficies en $\mathbb{R}^n$. Superficies orientadas

Ejemplo 1.



La gráfica de una función de clase C^1 en una región elemental del plano es una superficie regular y simple en $\mathbb{R}^3$: Si $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos parametrizar la gráfica de f mediante la función

$$\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3;$$

$$\Gamma(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Una superficie tiene siempre infinitas parametrizaciones diferentes. Como en el caso de las curvas, se puede demostrar que si $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Delta : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son dos parametrizaciones de la misma superficie, existe una función $\psi : T \longrightarrow M$ biyectiva y regular (de clase C^1 en un abierto que contiene a T y con $J\psi = det(d\psi) \neq 0$ en todo T), tal que $\Gamma = \Delta \circ \psi$. Se dice que las parametrizaciones Γ y Δ son equivalentes, y la función ψ se denomina cambio de parámetro.

De la condición $\Gamma = \Delta \circ \psi$, se deduce que

$$d\Gamma(u, v) = d\Delta(\psi(u, v)) \circ d\psi(u, v)$$

y operando se obtiene

$$\frac{d\Gamma}{du}(u, v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u, v) = \frac{d\Delta}{ds}(\psi(u, v)) \times \frac{d\Delta}{dt}(\psi(u, v)) \cdot J\psi(u, v)$$

En efecto, si ponemos las coordenadas,

$$\Lambda(s, t) = (\lambda_1(s, t), \lambda_2(s, t), \lambda_3(s, t))$$

$$\Gamma(u, v) = \Lambda \circ \psi(u, v) = (\lambda_1(\psi(u, v)), \lambda_2(\psi(u, v)), \lambda_3(\psi(u, v)))$$

y

$$\psi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$$

Derivando respecto de u

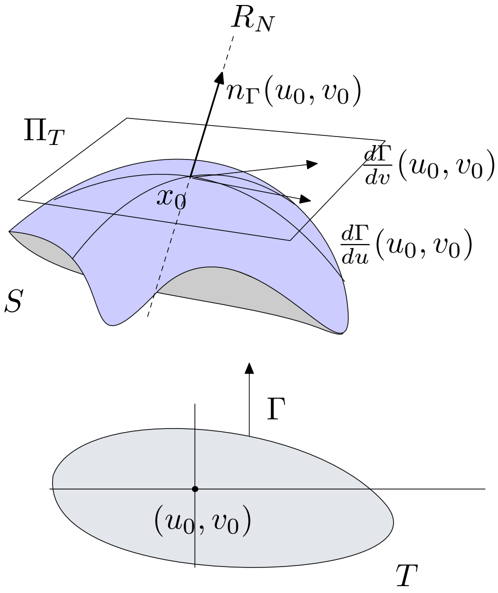
$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{du}(u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{d\lambda_1}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{du}(u,v)+\frac{d\lambda_1}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{du}(u,v) \\ \frac{d\lambda_2}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{du}(u,v)+\frac{d\lambda_2}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{du}(u,v) \\ \frac{d\lambda_3}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{du}(u,v)+\frac{d\lambda_3}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{du}(u,v) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{d\Lambda}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{du}(u,v)+\frac{d\Lambda}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{du}(u,v)\end{aligned}$$

Y análogamente

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{dv}(u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{d\lambda_1}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{dv}(u,v)+\frac{d\lambda_1}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{dv}(u,v) \\ \frac{d\lambda_2}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{dv}(u,v)+\frac{d\lambda_2}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{dv}(u,v) \\ \frac{d\lambda_3}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{dv}(u,v)+\frac{d\lambda_3}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{dv}(u,v) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{d\Lambda}{ds}(\psi(u,v))\frac{d\psi_1}{dv}(u,v)+\frac{d\Lambda}{dt}(\psi(u,v))\frac{d\psi_2}{dv}(u,v)\end{aligned}$$

Y haciendo ahora el producto vectorial, teniendo en cuenta que $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ se obtiene la fórmula anterior.

Esto demuestra que los vectores *normales* definidos por ambas parametrizaciones en un punto de la superficie son proporcionales, y por tanto tienen la misma dirección, así que definen la misma recta. También se deduce que el plano perpendicular a esa recta es el mismo, independientemente de la parametrización de S:



Se llama recta normal a la superficie S en un punto x_0 a la recta que pasa por x_0 y tiene dirección $n_\Gamma(u_0, v_0)$, donde $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización cualquiera de S, y $\Gamma(u_0, v_0) = x_0$

Se llama plano tangente a S en x_0 al plano que pasa por x_0 y es perpendicular a la recta normal. Este plano está generado por los vectores $\dfrac{d\Gamma}{du}(u_0, v_0)$ y $\dfrac{d\Gamma}{dv}(u_0, v_0)$

$$R_N \equiv \quad \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x = x_0 + \lambda n_\Gamma(u_0, v_0); \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\Pi_T \equiv \quad \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x = x_0 + \lambda \frac{d\Gamma}{du}(u_0, v_0) + \mu \frac{d\Gamma}{dv}(u_0, v_0); \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Por otro lado, como la función $\psi : T \longrightarrow M$ es de clase C^1, y el determinante de la diferencial, $det(d\psi(u,v))$ no se anula nunca, tampoco puede cambiar de signo en T: si $det(d\psi(u,v)) > 0$ en un punto de T, es positivo en todos los puntos de T, y entonces los vectores normales definidos por Γ y por Λ tienen también el mismo sentido; y si $det(d\psi(u,v)) < 0$ en un punto de T, también es negativo en todos los puntos de T, y los vectores normales definidos por ambas parametrizaciones tienen sentidos opuestos en todos los puntos de la superficie.

Esta observación divide las posibles parametrizaciones de una superficie en dos grupos, según el sentido que definan sobre el vector normal a la superficie. En ciertos problemas, la diferencia entre un sentido o el otro es fundamental para la interpretación de los resultados de los cálculos realizados sobre la superficie (por ejemplo, en la dinámica de fluidos). Esta observación da lugar a la definición de las superficies orientadas:

Diremos que una superficie S está orientada si se escoge un sentido para el vector normal a la superficie, y escribiremos S^+. Diremos que Γ es una parametrización de S^+ si es una parametrización de S que respete el sentido escogido para el vector normal en cada punto de la superficie. En otro caso, Γ será una parametrización de S^-.

Si $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son dos parametrizaciones de la misma superficie, entonces ambas definen la misma orientación en S si y sólo si el determinante de la diferencial del cambio de parámetro es positivo, y definen orientaciones opuestas si es negativo.

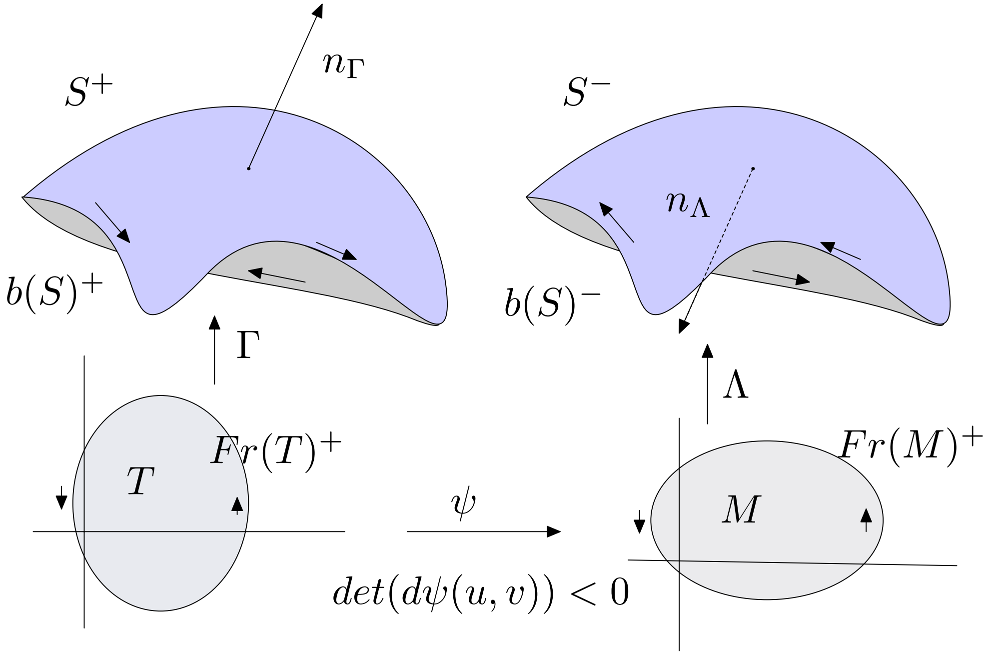
Hay una relación entre la orientación de una superficie y la orientación de su borde (que es una curva cerrada simple regular a trozos en $\mathbb{R}^3$).

Si $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S, el borde de S es la imagen por Γ de la frontera de T, $\Gamma(Fr(T))$. Escogemos entonces una parametrización de la frontera de T que la recorra en sentido positivo (dejando la región T a la izquierda), $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. La función

$$\Gamma \circ \alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

es una parametrización del borde de S. Con este procedimiento asociamos a Γ una orientación de S y una orientación de $b(S)$. Se puede comprobar que si Γ y Λ definen la misma orientación en S, también definen la misma orientación en $b(S)$; y si definen orientaciones opuestas en S, también definen orientaciones opuestas en el borde. Así que también se puede escoger una orientación de una superficie decidiendo el sentido de recorrido que debe tener el borde de la superficie.

Geométricamente, la relación entre la orientación del vector normal y la orientación del borde de una superficie se rige por la "regla del sacacorchos": el sentido del vector normal es el de avance de un tornillo cuya cabeza fuese la superficie y girase en el sentido indicado en el borde de S.


S^+
n_Γ
S^-
n_Λ
$b(S)^+$
$b(S)^-$
Γ
Λ
T
$Fr(T)^+$
$Fr(M)^+$
M
ψ
$det(d\psi(u,v)) < 0$

2. Superficies regulares a trozos

En la práctica, la mayoría de las superficies no son tan sencillas como las hemos definido: por ejemplo, la superficie de un cubo tiene vértices y aristas. Es necesario generalizar la definición, para incluir superficies de este tipo.

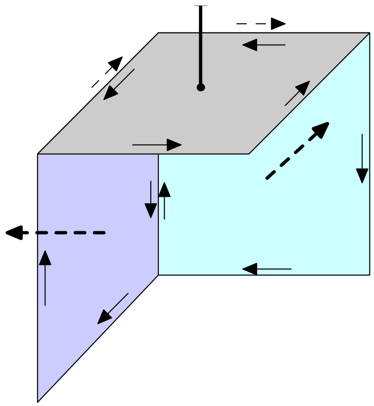
Definición (Superficies simples regulares a trozos). *Un conjunto S contenido en $\mathbb{R}^3$ es una superficie simple regular a trozos si existe una región elemental a trozos en el plano $T = T_1 \cup \cdots \cup T_k$ (que se puede descomponer como unión finita de regiones T_i elementales, T conexo, $T_i \cap T_j^0 = \emptyset$ si $i \neq j$, como un puzzle), y una función $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de clase C^1 en T, inyectiva en el interior de T, y regular en cada T_i, tal que $\Gamma(T_i) \cap \Gamma(T_j^0) = \emptyset$ si $i \neq j$, y de modo que $S = \Gamma(T)$*

Evidentemente esta definición es difícil de manejar, y en la clase de problemas que vamos a ver, será simplemente una unión finita de superficies regulares y simples $S_i = \Gamma(T_i)$, con algunas condiciones de intersección: tres o más superficies no se pueden cortar a lo largo de una curva, aunque si pueden tener un vértice común...

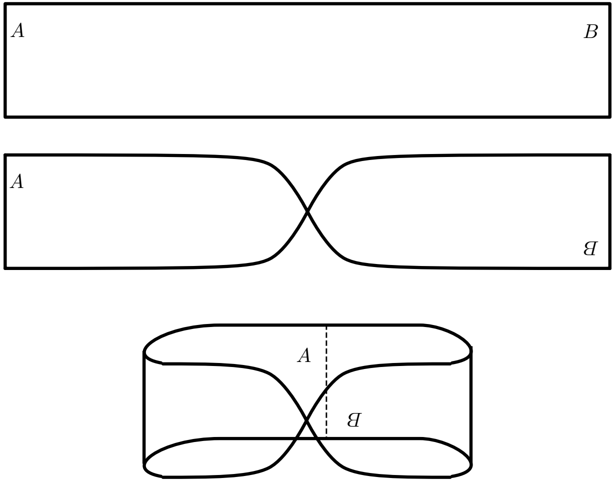
Para poder dar una definición precisa de cuándo una unión finita de superficies se puede considerar una superficie regular a trozos, se necesita un lenguaje y técnicas más avanzadas de Topología de las que se disponen en este curso. Nosotros consideraremos sólo superficies sencillas, como las caras de un prisma, una esfera (unión de dos semiesferas), etc.

Para calcular la recta normal o el plano tangente de un punto de una superficie regular a trozos bastará utilizar solamente la cara que contiene al punto, y se podrá utilizar cualquier parametrización de ella.

Sin embargo para definir la orientación de una superficie regular a trozos habrá que tener más cuidado: para orientar una superficie regular a trozos, hay que definir una orientación en cada trozo regular, de forma que dos caras que tienen una arista común en su borde definan orientaciones opuestas en ella.

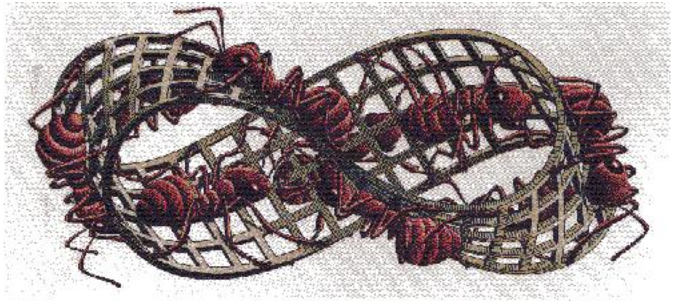


Esto no siempre se puede hacer: la Cinta de Möbius es el ejemplo más sencillo de superficie que no es orientable. Para construirla basta coger una tira de papel alargada; hay que pegar los dos extremos, pero después de hacer un giro a uno de ellos.



Aquí puedes ver algunos datos biográficos sobre Möbius (para volver al tema, pulsa sobre el botón "Actualizar" de la barra de menú: volverás al inicio del tema)

Este dibujo se debe al pintor holandés Maurits Cornelis Escher. En la siguiente página puedes encontrar su biografía, reproducciones de sus dibujos, etc.



Superficies en $\mathbb{R}^n$. Superficies orientadas

Maurits Cornelis Escher
Museo tridimensional Escher
Dibujos de Escher

(para volver al tema, pulsa sobre el botón "Actualizar" de la barra de menú: volverás al inicio del tema)