

## 1. Area de una Superficie

La idea para calcular el área de una superficie es sub-dividirla en regiones bastante pequeñas como para suponer que son planas, y aproximar el valor del área como la suma de esas regiones planas.

Para ver a qué fórmula nos lleva este procedimiento, consideramos una superficie regular y simple en  $\mathbb{R}^3$ , y  $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$ .

Si realizamos una partición de  $T$ , obtenemos una “partición” de la superficie en regiones casi rectangulares. Sea  $R$  uno de los rectángulos de la partición, de vértices  $(u_0, v_0), (u_0 + h, v_0), (u_0, v_0 + j), (u_0 + h, v_0 + j)$ .

Aproximamos el área de  $\Gamma(R)$  por el área del paralelogramo de lados los segmentos

$$\Gamma(u_0, v_0), \Gamma(u_0 + h, v_0)$$

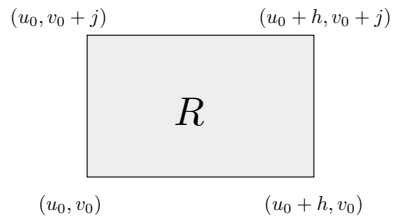
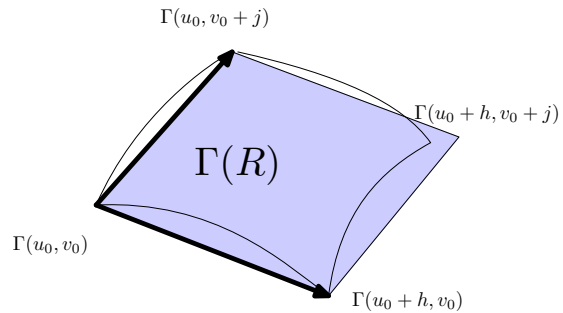
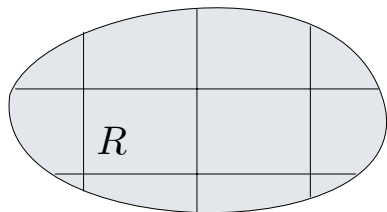
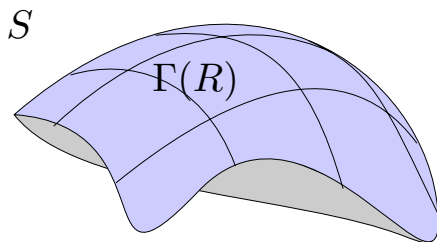
y

$$\Gamma(u_0, v_0), \Gamma(u_0, v_0 + j)$$

como el producto vectorial de los dos vectores:



Integrales de  
Superficie.  
Teoremas de  
Stokes y de  
Gauss



$$a(\Gamma(R)) \sim \left\| \overrightarrow{(\Gamma(u_0 + h, v_0) - \Gamma(u_0, v_0))} \times \overrightarrow{(\Gamma(u_0, v_0 + j) - \Gamma(u_0, v_0))} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \gamma_1(u_0 + h, v_0) - \gamma_1(u_0, v_0) & \gamma_2(u_0 + h, v_0) - \gamma_2(u_0, v_0) & \gamma_3(u_0 + h, v_0) - \gamma_3(u_0, v_0) \\ \gamma_1(u_0, v_0 + j) - \gamma_1(u_0, v_0) & \gamma_2(u_0, v_0 + j) - \gamma_2(u_0, v_0) & \gamma_3(u_0, v_0 + j) - \gamma_3(u_0, v_0) \end{array} \right\|$$

donde  $\Gamma(u, v) = (\gamma_1(u, v), \gamma_2(u, v), \gamma_3(u, v))$

En cada coordenada podemos aplicar el teorema del valor medio, de modo que

$$\gamma_i(u_0 + h, v_0) - \gamma_i(u_0, v_0) = \frac{d\gamma_i}{du}(s_i, v_0) \cdot h$$

con  $s_i \in [u_0, u_0 + h]$ , y utilizando la continuidad de las derivadas parciales de  $\Gamma$  podemos aproximar el valor de la derivada en el punto  $(s_i, v_0)$  por la derivada en el punto  $(u_0, v_0)$ , de modo que

$$\gamma_i(u_0 + h, v_0) - \gamma_i(u_0, v_0) \sim \frac{d\gamma_i}{du}(u_0, v_0) \cdot h$$

Análogamente,

$$\gamma_i(u_0, v_0 + j) - \gamma_i(u_0, v_0) = \frac{d\gamma_i}{dv}(u_0, t_i) \cdot j \sim \frac{d\gamma_i}{dv}(u_0, v_0) \cdot j$$

(con  $t_i \in [v_0, v_0 + j]$ ) y



$$\begin{aligned}
 a(\Gamma(R)) &\sim \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d\gamma_1}{du}(u_0, v_0) \cdot h & \frac{d\gamma_2}{du}(u_0, v_0) \cdot h & \frac{d\gamma_3}{du}(u_0, v_0) \cdot h \\ \frac{d\gamma_1}{dv}(u_0, v_0) \cdot j & \frac{d\gamma_2}{dv}(u_0, v_0) \cdot j & \frac{d\gamma_3}{dv}(u_0, v_0) \cdot j \end{array} \right\| = \\
 &= \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d\gamma_1}{du}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_2}{du}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_3}{du}(u_0, v_0) \\ \frac{d\gamma_1}{dv}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_2}{dv}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_3}{dv}(u_0, v_0) \end{array} \right\| \cdot |h| |j| = \\
 &= \left\| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d\gamma_1}{du}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_2}{du}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_3}{du}(u_0, v_0) \\ \frac{d\gamma_1}{dv}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_2}{dv}(u_0, v_0) & \frac{d\gamma_3}{dv}(u_0, v_0) \end{array} \right\| \cdot a(R) = \\
 &= \left\| \frac{d\Gamma}{du}(u_0, v_0) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u_0, v_0) \right\| \cdot a(R)
 \end{aligned}$$

El área total de la superficie será entonces

$$a(S) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} a(\Gamma(R)) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} \left\| \frac{d\Gamma}{du}(u_R, v_R) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u_R, v_R) \right\| \cdot a(R)$$

siendo cada  $(u_R, v_R)$  el vértice inferior izquierdo de  $R$ .



Así, el área de  $S$  es un número que está entre las sumas superior e inferior de Riemann de la función  $\left\| \frac{d\Gamma}{du}(u, v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u, v) \right\|$ , que es una función continua en  $T$ , y por tanto integrable. Si hacemos particiones de  $T$  cada vez más finas, estas sumas tienden a la integral, y se obtiene

$$a(S) = \int_T \left\| \frac{d\Gamma}{du}(u, v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u, v) \right\| d(u, v) = \int_T \|n_\Gamma(u, v)\| d(u, v)$$

$(n_\Gamma(u, v))$  es el vector normal definido por  $\Gamma$ )

Esta será la fórmula que se utilice como definición de área de una superficie. Pero antes, una observación: aparentemente el cálculo del área de una superficie depende de la parametrización  $\Gamma$  que se utilice para representarla. Hay que ver que esto no es así, y que el resultado de la integral es independiente de la parametrización.

**Proposición.** *Sea  $S$  una superficie regular y simple, y sean  $\Gamma : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\Lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones de  $S$ . Entonces*

$$\int_T \left\| \frac{d\Gamma}{du}(u, v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u, v) \right\| d(u, v) = \int_M \left\| \frac{d\Lambda}{ds}(s, t) \times \frac{d\Lambda}{dt}(s, t) \right\| d(s, t)$$

La demostración es inmediata utilizando el cambio de parámetro entre  $\Gamma$  y  $\Lambda$  como cambio de variable.



**Definición** (Área de una Superficie).

Sea  $S$  una superficie regular y simple en  $\mathbb{R}^3$ . Se define el área de  $S$  como

$$a(S) = \int_T \left\| \frac{d\Gamma}{du}(u, v) \times \frac{d\Gamma}{dv}(u, v) \right\| d(u, v)$$

donde  $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización cualquiera de  $S$ .

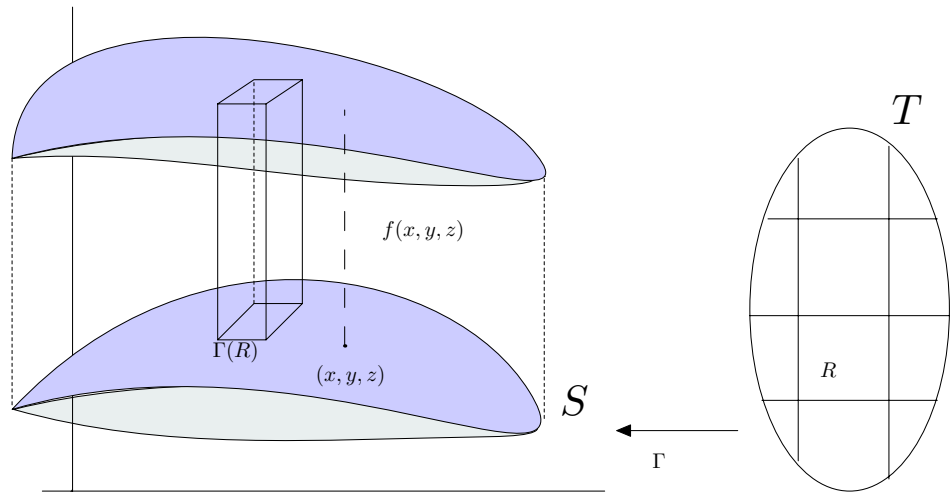
Si  $S$  es una superficie regular a trozos, el área de  $S$  es la suma de las áreas de cada trozo regular.



## 2. Integrales de Superficie de Campos Escalares

El primer tipo de integrales de superficie aparece en el estudio de funciones escalares definidas sobre los puntos de una superficie, como por ejemplo la temperatura sobre la superficie de la Tierra. Para llegar a la construcción de la integral, vamos a considerar un ejemplo más sencillo: consideramos una superficie regular y simple, y representamos una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  levantando cada punto  $(x, y, z)$  de  $S$  una distancia igual a  $f(x, y, z)$ , de manera que obtenemos una nueva superficie “paralela a  $S$ ”. Vamos a tratar de calcular el volumen encerrado entre las dos superficies, con un procedimiento similar al que se utilizó para calcular el volumen encerrado entre la gráfica de una función de dos variables y el plano horizontal mediante la integral de Riemann.





Consideramos  $\Gamma : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S$ , y obtenemos una partición de  $S$  haciendo una partición de  $T$ .





Sobre cada trozo  $\Gamma(R)$  obtenido en la superficie, calculamos el supremo y el ínfimo de  $f$

$$M_{\Gamma(R)}(f) = \sup\{f(x), x \in \Gamma(R)\} = \sup\{f(\Gamma(u, v)), (u, v) \in R\} = M_R(f \circ \Gamma)$$

$$m_{\Gamma(R)}(f) = \inf\{f(x), x \in \Gamma(R)\} = \inf\{f(\Gamma(u, v)), (u, v) \in R\} = m_R(f \circ \Gamma)$$

Y calculamos las sumas superior e inferior como la suma de los volúmenes de los prismas de base  $\Gamma(R)$  y alturas  $M_{\Gamma(R)}$  y  $m_{\Gamma(R)}$  respectivamente

$$\bar{S}(f, \Gamma, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} M_{\Gamma(R)}(f) a(\Gamma(R)) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} M_R(f \circ \Gamma) \int_R \|n_{\Gamma}(u, v)\| d(u, v)$$

y

$$\underline{S}(f, \Gamma, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} m_{\Gamma(R)}(f) a(\Gamma(R)) = \sum_{R \in \mathfrak{R}} m_R(f \circ \Gamma) \int_R \|n_{\Gamma}(u, v)\| d(u, v)$$

utilizando la fórmula que hemos visto antes para calcular el área de  $\Gamma(R)$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \Gamma, P) &\leq \sum_{R \in \mathfrak{R}} \int_R f \circ \Gamma(u, v) \|n_{\gamma}(u, v)\| d(u, v) = \\ &= \int_T f \circ \Gamma(u, v) \|n_{\gamma}(u, v)\| d(u, v) \leq \underline{S}(f, \Gamma, P) \end{aligned}$$



Si hacemos las particiones cada vez más finas, estas sumas deben tender al volumen que buscamos entre las dos superficies, y obtenemos lo que llamamos la integral de  $f$  sobre  $S$  como

$$\int_S f = \int_T f \circ \Gamma(u, v) \|n_\Gamma(u, v)\| d(u, v)$$

Aparentemente el resultado de la integral dependerá de la parametrización  $\Gamma$  que utilicemos para describir la superficie  $S$ , sin embargo esto no es así.

**Proposición.** *Sea  $S$  una superficie regular y simple en  $\mathbb{R}^3$ , y sean  $\Gamma : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\Lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones de  $S$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuo en un abierto  $U$  que contenga a  $S$ . Entonces*

$$\int_T f \circ \Gamma(u, v) \|n_\Gamma(u, v)\| d(u, v) = \int_M f \circ \Lambda(s, t) \|n_\Lambda(s, t)\| d(s, t)$$

La demostración es consecuencia inmediata de la equivalencia de las parametrizaciones y el teorema de cambio de variable.

**Definición** (Integral de Superficie de Campos Escalares).

*Sea  $S$  una superficie regular y simple en  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo escalar continuo en un abierto  $U$  que contenga a  $S$ . Se define la integral de  $f$  sobre  $S$  como*

$$\int_S f = \int_T f \circ \Gamma(u, v) \|n_\Gamma(u, v)\| d(u, v)$$

donde  $\Gamma : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización cualquiera de  $S$



Si  $S$  es una superficie regular a trozos, se define la integral de  $f$  sobre  $S$  como la suma de las integrales en cada trozo regular.

AAVVR

**Integrales de  
Superficie.  
Teoremas de  
Stokes y de  
Gauss**



### 3. Integrales de Superficie de Campos Vectoriales

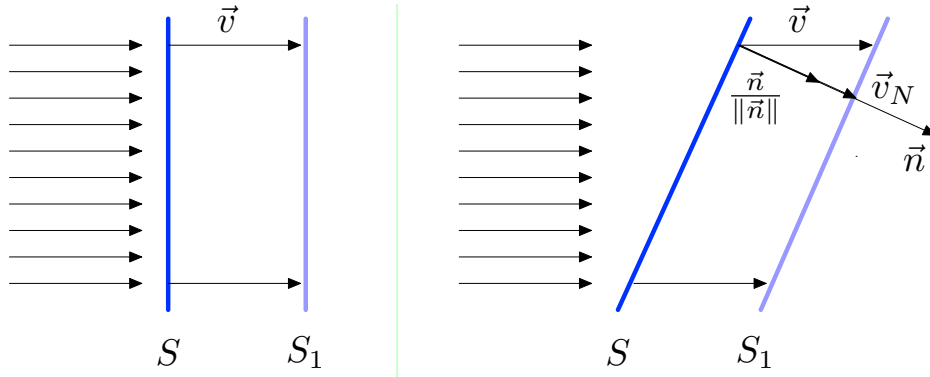
Al igual que utilizamos el modelo de cálculo del trabajo generado por un campo de fuerzas para interpretar el significado de la integral de línea de campos vectoriales, vamos a utilizar ahora la dinámica de fluidos para interpretar la integral de superficie de campos vectoriales.

Si tenemos un fluido, como un líquido o un gas, en movimiento con velocidad  $\vec{v}(x, y, z)$  en cada punto  $(x, y, z)$ , e interponemos una superficie  $S$ , se llama flujo a través de  $S$  a la cantidad de fluido que la atraviesa por unidad de tiempo.

Para calcular el flujo, consideremos primero el ejemplo más sencillo, en el que la velocidad del fluido es constantemente  $\vec{v}$  (misma dirección, sentido y módulo), e interponemos una superficie plana y perpendicular a  $\vec{v}$ : el flujo por unidad de tiempo será igual al volumen encerrado entre la superficie  $S$  y la superficie donde se encuentran las partículas del fluido un segundo después,  $S_1$ , que será paralela a  $S$  a distancia  $\|\vec{v}\|$ : es decir, el flujo es igual al producto de la norma de  $\vec{v}$  por el área de  $S$

$$\Phi = \|\vec{v}\| \cdot a(S)$$





Si  $S$  es una superficie plana, pero no es perpendicular a  $\vec{v}$ , entonces el volumen encerrado entre  $S$  y  $S_1$  será igual al producto de la norma del vector  $v_N$  (componente de  $\vec{v}$  en la dirección perpendicular a  $S$ ) por el área de  $S$ . Si  $\vec{n}$  es un vector normal (perpendicular) a  $S$ ,

$$\Phi = \|v_N\|a(S) = \left| \left\langle \vec{v}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \right| a(S)$$

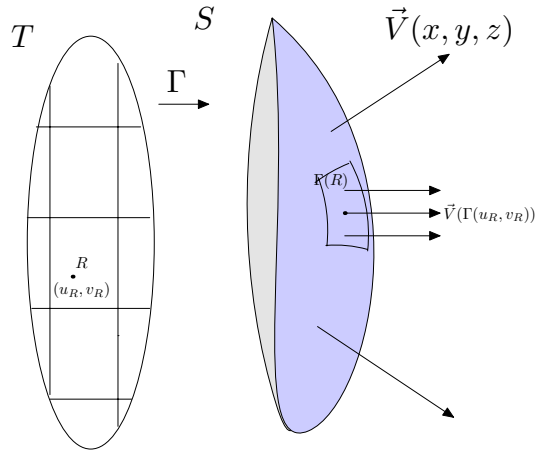
En física se interpreta de forma un poco más abstracta el flujo, considerando que tiene signo positivo o negativo según el sentido en que atraviese la superficie

$$\Phi = \left\langle \vec{v}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle a(S)$$



tiene signo positivo si el ángulo entre  $\vec{v}$  y  $\vec{n}$  es menor que  $\pi/2$ , y signo negativo si es mayor que  $\pi/2$

En el caso más general, la velocidad de cada partícula de fluido será una función continua  $\vec{V}(x, y, z)$ , no necesariamente constante, y la superficie no será necesariamente plana ni perpendicular a al movimiento. La idea es que sin embargo, si dividimos la superficie en regiones suficientemente pequeñas, podemos suponer que la superficie es plana y la velocidad constante en ellas, gracias a la continuidad de  $\vec{V}$  y de las parametrizaciones de las superficies.



Consideramos entonces una parametrización  $\Gamma : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $S$ , y hacemos una partición  $P$  de  $T$ . Para cada rectángulo  $R \in \mathfrak{A}_P$ , calculamos el flujo que atraviesa  $\Gamma(R)$  suponiendo que  $\vec{V}(x, y, z) = \vec{V}(\Gamma(u_R, v_R))$  es constante ( $(u_R, v_R)$  es un punto cualquiera de  $R$ ), y que  $\Gamma(R)$  es una superficie plana

$$\Phi_R = \langle \vec{V}(\Gamma(u_R, v_R)), \frac{n_\Gamma(u_R, v_R)}{\|n_\Gamma(u_R, v_R)\|} \rangle a(\Gamma(R))$$

AAVVR

Integrales de Superficie.  
Teoremas de Stokes y de Gauss



Aplicando la fórmula del área de

$$\Gamma(R) = \int_R \|n_\Gamma(u, v)\| d(u, v) \sim \|n_\Gamma(u_R, v_R)\| a(R)$$

se tiene

$$\Phi_R = \langle \vec{V}(\Gamma(u_R, v_R)), n_\Gamma(u_R, v_R) \rangle a(R)$$

y el flujo total a través de la superficie

$$\Phi \sim \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} \Phi_R = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} \langle \vec{V}(\Gamma(u_R, v_R)), n_\Gamma(u_R, v_R) \rangle a(R)$$

Haciendo las particiones cada vez más finas, esta suma tiende a la integral

$$\Phi = \int_T \langle \vec{V}(\Gamma(u, v)), n_\Gamma(u, v) \rangle d(u, v)$$

Esta fórmula es la que se utiliza como definición de la integral de  $\vec{V}$  a través de  $S$ , aunque primero hay que observar en qué medida puede depender de la parametrización  $\Gamma$  que hayamos escogido para  $S$



**Proposición.** Sea  $S$  una superficie regular y simple en  $\mathbb{R}^3$ , y sean  $\Gamma : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\Lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  dos parametrizaciones de  $S$ . Sea  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  un campo vectorial continuo en un abierto que contenga a  $S$ . Si  $\Gamma$  y  $\Lambda$  definen la misma orientación en  $S$ , entonces

$$\int_T \langle F \circ \Gamma(u, v), n_\Gamma(u, v) \rangle d(u, v) = \int_M \langle F \circ \Lambda(s, t), n_\Lambda(s, t) \rangle d(s, t)$$

Y si  $\Gamma$  y  $\Lambda$  definen orientaciones opuestas, entonces

$$\int_T \langle F \circ \Gamma(u, v), n_\Gamma(u, v) \rangle d(u, v) = - \int_M \langle F \circ \Lambda(s, t), n_\Lambda(s, t) \rangle d(s, t)$$

La demostración es consecuencia de la equivalencia de las parametrizaciones y el teorema de cambio de variable.

**Definición** (Integral de Superficie de Campos Vectoriales). Sea  $S^+$  una superficie regular y simple orientada en  $\mathbb{R}^3$ , y  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo en un abierto que contenga a  $S$ . Se define la integral de  $F$  a través de  $S$  como

$$\int_{S^+} F = \int_T \langle F \circ \Gamma(u, v), n_\Gamma(u, v) \rangle d(u, v)$$

siendo  $\Gamma : T \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización cualquiera de  $S^+$





Si  $S^+$  es una superficie regular a trozos y orientada, se define la integral como la suma de las integrales en cada trozo regular, con la orientación definida por  $S^+$  en cada uno.

AAVVR

Integrales de  
Superficie.  
Teoremas de  
Stokes y de  
Gauss

**Observaciones:**

Es bastante habitual escribir  $\Gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , y el vector normal

$$\begin{aligned} n_{\Gamma}(u, v) &= \left( \frac{dy}{du} \frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv} \frac{dz}{du}, \frac{dz}{du} \frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv} \frac{dx}{du}, \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) = \\ &= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy) \end{aligned}$$

utilizando una notación algebraica ( $dx \wedge dy$  se lee “producto exterior” de  $dx$  y  $dy$ ), y la integral se escribe

$$\int_{S^+} F = \int_{S^+} f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$$



## 4. Teorema de Stokes

Un campo vectorial  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $C^1$  como el que expresa la velocidad de las partículas de un fluido en el espacio tiene asociado otro campo llamado “rotacional de  $F$ ”, que mide de alguna manera el efecto de rotación que el campo produce en el movimiento. Este campo se define por la expresión

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(F)(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{df_3}{dy} - \frac{df_2}{dz}, \frac{df_1}{dz} - \frac{df_3}{dx}, \frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dy} \right)_{(x,y,z)} \end{aligned}$$

Por la similitud con las expresiones de cálculo utilizadas en geometría, en algunos textos se escribe el rotacional como el producto vectorial del gradiente por  $F$

$$\operatorname{rot}F = \nabla \times F$$

El Teorema de Stokes establece una relación entre la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial y la integral del campo sobre el borde de la superficie:



## Teorema (Teorema de Stokes).

Sea  $S^+$  una superficie regular y simple orientada, y sea  $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de  $S^+$ , que sea de clase  $C^2$ . Sea  $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$  en un abierto que contenga a  $S$ .  
Entonces

$$\int_{b(S)^+} F = \int_{S^+} \text{rot}(F)$$

donde  $b(S)^+$  tiene la orientación que resulta de aplicar  $\Gamma$  a la frontera de  $T$ , y  $Fr(T)^+$  se orienta en sentido anti-horario (dejando la región  $T$  a la izquierda)

Demostración:

▶ (Saltar al final de la demostración)

Para demostrar el teorema, consideramos el campo  $F = (f_1, f_2, f_3)$  como la suma

$$F = (f_1, 0, 0) + (0, f_2, 0) + (0, 0, f_3)$$

Basta entonces demostrar las tres igualdades



## AAVVR

### Integrales de Superficie. Teoremas de Stokes y de Gauss

$$\int_{b(S)^+} (f_1, 0, 0) = \int_{S^+} \left( 0, \frac{df_1}{dz}, -\frac{df_1}{dy} \right)$$

$$\int_{b(S)^+} (0, f_1, 0) = \int_{S^+} \left( -\frac{df_2}{dz}, 0, \frac{df_2}{dx} \right)$$

$$\int_{b(S)^+} (0, 0, f_3) = \int_{S^+} \left( \frac{df_3}{dy}, -\frac{df_3}{dx}, 0 \right)$$

y sumarlas. Las tres se demuestran análogamente, así que veremos sólo la primera.

Para parametrizar el borde de  $S$ , consideramos  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización de  $Fr(T)^+$  (orientada en sentido anti-horario). Entonces  $\Gamma \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización de  $b(S)^+$

Calculamos la derivada de  $\Gamma \circ \alpha$ : poniendo  $\Gamma = (\gamma_1(u, v), \gamma_2(u, v), \gamma_3(u, v))$  y  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  la derivada queda de la forma



$$\begin{aligned}
 (\Gamma \circ \alpha)'(t) &= d\Gamma(\alpha(t)) \circ d\alpha(t) = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{d\gamma_1}{du}(\alpha(t)) & \frac{d\gamma_1}{dv}(\alpha(t)) \\ \frac{d\gamma_2}{du}(\alpha(t)) & \frac{d\gamma_2}{dv}(\alpha(t)) \\ \frac{d\gamma_3}{du}(\alpha(t)) & \frac{d\gamma_3}{dv}(\alpha(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_1}{dt}(t) \\ \frac{d\alpha_2}{dt}(t) \end{pmatrix} \\
 &= \left( \frac{d\gamma_1}{du}(\alpha(t)) \frac{d\alpha_1}{dt}(t) + \frac{d\gamma_1}{dv}(\alpha(t)) \frac{d\alpha_2}{dt}(t), B(t), C(t) \right)
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{b(S)^+} (f_1, 0, 0) &= \int_a^b \langle (f_1 \circ \Gamma(\alpha(t)), 0, 0), (\Gamma \circ \alpha)'(t) \rangle dt = \\
 &= \int_a^b f_1 \circ \Gamma \circ \alpha(t) \left( \frac{d\gamma_1}{du}(\alpha(t)) \frac{d\alpha_1}{dt}(t) + \frac{d\gamma_1}{dv}(\alpha(t)) \frac{d\alpha_2}{dt}(t) \right) dt = \\
 &= \int_a^b f_1 \circ \Gamma \circ \alpha(t) \langle \overrightarrow{\nabla \gamma_1(\alpha(t))}, \overrightarrow{\alpha'(t)} \rangle dt = \\
 &= \int_{Fr(T)^+} f_1 \circ \Gamma(u, v) \overrightarrow{\nabla \gamma_1(u, v)}
 \end{aligned}$$



integral sobre la frontera de  $T$  del campo vectorial

$$\begin{aligned} G(u, v) &= f_1 \circ \Gamma(u, v) \overrightarrow{\nabla \gamma_1}(u, v) = \\ &= (f_1 \circ \Gamma(u, v) \frac{d\gamma_1}{du}(u, v), f_1 \circ \Gamma(u, v) \frac{d\gamma_1}{dv}(u, v)) = (g_1(u, v), g_2(u, v)) \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Green a  $G$

$$\int_{Fr(T)^+} G = \int_T \left( \frac{dg_2}{du}(u, v) - \frac{dg_1}{dv}(u, v) \right) d(u, v)$$

Calculando las derivadas parciales de las componentes de  $G$

$$\begin{aligned} \frac{dg_2}{du}(u, v) &= \frac{d}{du} \left( f_1 \circ \Gamma \frac{d\gamma_1}{dv} \right) (u, v) = \\ &= \frac{d}{du} (f_1 \circ \Gamma)(u, v) \cdot \frac{d\gamma_1}{dv}(u, v) + (f_1 \circ \Gamma)(u, v) \cdot \frac{d^2\gamma_1}{dudv}(u, v) = \\ &= \left( \frac{df_1}{dx}(\Gamma(u, v)) \frac{d\gamma_1}{du}(u, v) + \frac{df_1}{dy}(\Gamma(u, v)) \frac{d\gamma_2}{du}(u, v) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{df_1}{dz}(\Gamma(u, v)) \frac{d\gamma_3}{du}(u, v) \right) \frac{d\gamma_1}{dv}(u, v) + \\ &\quad + (f_1 \circ \Gamma)(u, v) \cdot \frac{d^2\gamma_1}{dudv}(u, v) \end{aligned}$$

AAVVR

Integrales de Superficie.  
Teoremas de Stokes y de Gauss



Y análogamente

$$\begin{aligned}\frac{dg_1}{dv}(u, v) &= \frac{d}{dv} \left( f_1 \circ \Gamma \frac{d\gamma_1}{du} \right) (u, v) = \\ &= \frac{d}{dv} (f_1 \circ \Gamma)(u, v) \cdot \frac{d\gamma_1}{du}(u, v) + (f_1 \circ \Gamma)(u, v) \cdot \frac{d^2\gamma_1}{dvdu}(u, v) = \\ &= \left( \frac{df_1}{dx}(\Gamma(u, v)) \frac{d\gamma_1}{dv}(u, v) + \frac{df_1}{dy}(\Gamma(u, v)) \frac{d\gamma_2}{dv}(u, v) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{df_1}{dz}(\Gamma(u, v)) \frac{d\gamma_3}{dv}(u, v) \right) \frac{d\gamma_1}{du}(u, v) + \\ &\quad + (f_1 \circ \Gamma)(u, v) \cdot \frac{d^2\gamma_1}{dvdu}(u, v)\end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones, y teniendo en cuenta que como  $\Gamma$  es de clase  $C^2$  las derivadas cruzadas de  $\gamma_1$  son iguales, queda

$$\begin{aligned}\frac{dg_2}{du} - \frac{dg_1}{dv} &= \\ &= \left( \frac{df_1}{dy} \circ \Gamma \right) \left( \frac{d\gamma_2}{du} \frac{d\gamma_1}{dv} - \frac{d\gamma_2}{dv} \frac{d\gamma_1}{du} \right) + \left( \frac{df_1}{dz} \circ \Gamma \right), \left( \frac{d\gamma_3}{du} \frac{d\gamma_1}{dv} - \frac{d\gamma_3}{dv} \frac{d\gamma_1}{du} \right)\end{aligned}$$

AAVVR

Integrales de  
Superficie.  
Teoremas de  
Stokes y de  
Gauss



Observando con cuidado esta fórmula, la expresión que acompaña a  $\frac{df_1}{dz} \circ \Gamma$  es la segunda coordenada del vector normal definido por  $\Gamma$  y la expresión que acompaña a  $\frac{df_1}{dy} \circ \Gamma$  es el opuesto de la tercera coordenada del vector normal

$$\begin{aligned}
 n_{\Gamma} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d\gamma_1}{du} & \frac{d\gamma_2}{du} & \frac{d\gamma_3}{du} \\ \frac{d\gamma_1}{dv} & \frac{d\gamma_2}{dv} & \frac{d\gamma_3}{dv} \end{vmatrix} \\
 &= \left( \frac{d\gamma_2}{du} \frac{d\gamma_3}{dv} - \frac{d\gamma_2}{dv} \frac{d\gamma_3}{du}, \frac{d\gamma_3}{du} \frac{d\gamma_1}{dv} - \frac{d\gamma_3}{dv} \frac{d\gamma_1}{du}, \frac{d\gamma_1}{du} \frac{d\gamma_2}{dv} - \frac{d\gamma_1}{dv} \frac{d\gamma_2}{du} \right)
 \end{aligned}$$





luego

$$\begin{aligned} \int_{b(S)^+} (f_1, 0, 0) &= \int_T \left( \frac{dg_2}{du}(u, v) - \frac{dg_1}{dv}(u, v) \right) d(u, v) = \\ &= \int_T \left\langle \left( 0, \frac{df_1}{dz} \circ \Gamma(u, v), -\frac{df_1}{dy} \circ \Gamma(u, v) \right), n_\Gamma(u, v) \right\rangle d(u, v) = \\ &= \int_{S^+} \left( 0, \frac{df_1}{dz}, -\frac{df_1}{dy} \right) \end{aligned}$$

lo que termina la demostración

◀ (Volver al enunciado)

□

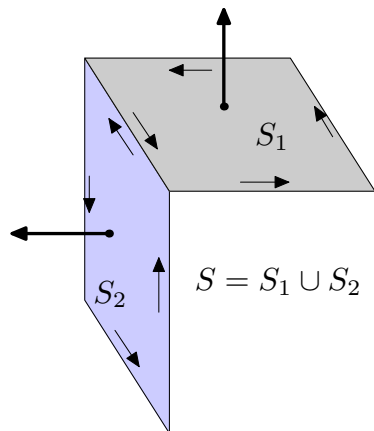
### Observaciones:

1- Para la demostración del teorema se necesita una parametrización de clase  $C^2$  de la superficie. Sin embargo, una vez demostrado, como todas las parametrizaciones de  $S^+$  y de  $b(S)^+$  son equivalentes, las integrales no dependen de las parametrizaciones, luego la fórmula es válida con cualquier parametrización. Es decir, es necesario que  $S$  admita una parametrización de clase  $C^2$ , pero entonces el resultado es cierto con cualquier parametrización.



2- El teorema se demuestra por comodidad para superficies regulares y simples, pero también se verifica en superficies regulares a trozos orientables, que admitan una parametrización de clase  $C^2$  en cada trozo regular, ya que las aristas comunes a dos trozos aparecen orientadas en sentidos opuestos en cada uno, con lo que

$$\int_{b(S)^+} F = \sum_{i=1}^k \int_{b(S_i)^+} F = \sum_{i=1}^k \int_{S_i^+} \text{rot} F = \int_{S^+} \text{rot} F$$



## 5. Teorema de Gauss

Asociado a un campo vectorial de clase  $C^1$  hay también un campo escalar, que en el caso de la dinámica de fluidos mide la expansión o la contracción del fluido, llamado “divergencia de  $F$ ”, y que se define mediante la expresión

$$\operatorname{div}F(x, y, z) = \frac{df_1}{dx}(x, y, z) + \frac{df_2}{dy}(x, y, z) + \frac{df_3}{dz}(x, y, z)$$

También en este caso, se utiliza el parecido con la expresión de un producto escalar, y en algunos textos se escribe

$$\operatorname{div}F(x, y, z) = \langle \nabla, F \rangle$$

El teorema de Gauss establece una relación entre la integral sobre una superficie cerrada de un campo vectorial, y la integral de Riemann en el cuerpo encerrado por la superficie de la divergencia del campo, que desde el punto de vista de la dinámica de fluidos establecería una relación entre la cantidad de fluido que atraviesa una superficie, y la medida en que el fluido se expande. Desde el punto de vista matemático, el Teorema de Gauss es una generalización a dimensión tres del Teorema de Green que hemos demostrado para integrales de línea en regiones elementales del plano.



**Definición** (Regiones elementales en  $\mathbb{R}^3$ ). *Un conjunto  $V$  contenido en  $\mathbb{R}^3$  se llama región elemental si existen regiones elementales del plano  $T_1, T_2, T_3$  y funciones de clase  $C^1$ ,  $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$ , tales que*

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) : (x, y) \in T_1, p_1(x, y) \leq z \leq q_1(x, y)\} = \\ &= \{(x, y, z) : (y, z) \in T_2, p_2(y, z) \leq x \leq q_2(y, z)\} = \\ &= \{(x, y, z) : (x, z) \in T_3, p_3(x, z) \leq y \leq q_3(x, z)\} \end{aligned}$$

La frontera de una región elemental es una superficie simple cerrada regular a trozos, orientable, y el conjunto  $V$  es medible Jordan ya que es acotado y su frontera tiene medida cero.



**Teorema** (Teorema de Gauss, o de la Divergencia).

Sea  $V$  una región elemental del  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$  en un abierto que contenga a  $V$ . Entonces

$$\int_{Fr(V)^+} F = \int_V \operatorname{div} F(x, y, z) d(x, y, z)$$

donde  $Fr(V)^+$  se orienta de modo que el vector normal apunte hacia el exterior de  $V$ .

Demostración:

Si  $F = (f_1, f_2, f_3)$ , bastará demostrar que

$$\int_{Fr(V)^+} (f_1, 0, 0) = \int_V \frac{df_1}{dx}(x, y, z) d(x, y, z)$$

$$\int_{Fr(V)^+} (0, f_2, 0) = \int_V \frac{df_2}{dy}(x, y, z) d(x, y, z)$$

$$\int_{Fr(V)^+} (0, 0, f_3) = \int_V \frac{df_3}{dz}(x, y, z) d(x, y, z)$$

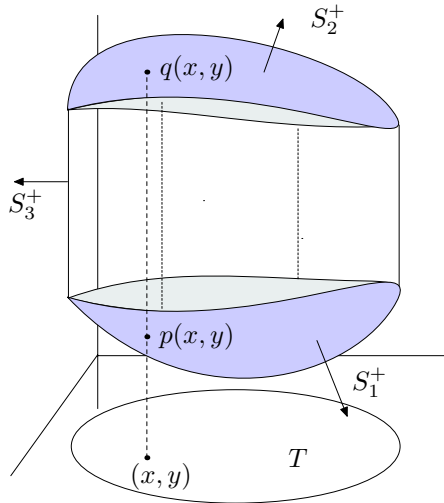
► (Saltar al final de la demostración)



y sumar las tres igualdades. Vamos a demostrar sólo la última de las tres; las otras dos se comprueban análogamente.

Como  $V$  es una región elemental, existen dos funciones de clase  $C^1$  definidas en una región elemental del plano,  $p : T \rightarrow \mathbb{R}$  y  $q : T \rightarrow \mathbb{R}$ , de modo que

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in T, p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$$



La frontera de  $V$  está formada por tres superficies,  $S_1$  la gráfica de  $p$ ,  $S_2$  la gráfica de  $q$ , y  $S_3$  un trozo de un cilindro vertical con base en la frontera de  $T$ , cada una orientada de modo que el vector normal apunte hacia el exterior de  $V$ . Entonces

$$\int_{Fr(V)^+} (0, 0, f_3) = \int_{S_1^+} (0, 0, f_3) + \int_{S_2^+} (0, 0, f_3) + \int_{S_3^+} (0, 0, f_3)$$

AAVVR

Integrales de Superficie.  
Teoremas de Stokes y de Gauss



$S_1$  se puede parametrizar fácilmente mediante la función

$$\Gamma(x, y) = (x, y, p(x, y))$$

definida en  $T$ . Esta función verifica

$$\frac{d\Gamma}{dx}(x, y) = \left(1, 0, \frac{dp}{dx}(x, y)\right) \quad \frac{d\Gamma}{dy}(x, y) = \left(0, 1, \frac{dp}{dy}(x, y)\right)$$

y por tanto

$$n_{\Gamma}(x, y) = \left(-\frac{dp}{dx}(x, y), -\frac{dp}{dy}(x, y), 1\right)$$

apunta hacia arriba, hacia el interior de  $V$  (pues tiene la tercera coordenada positiva). Es decir,  $\Gamma$  es una parametrización de  $S_1^-$ , y

$$\begin{aligned} \int_{S_1^+} (0, 0, f_3) &= - \int_{S_1^-} (0, 0, f_3) = \\ &= - \int_T \langle (0, 0, f_3 \circ \Gamma(x, y)), n_{\Gamma}(x, y) \rangle d(x, y) = \\ &= - \int_T f_3(x, y, p(x, y)) d(x, y) \end{aligned}$$

AAVVR

Integrales de  
Superficie.  
Teoremas de  
Stokes y de  
Gauss



De la misma manera,  $S_2$  se puede parametrizar mediante la función

$$\Lambda(x, y) = (x, y, q(x, y))$$

definida en  $T$ , que verifica

$$\frac{d\Lambda}{dx}(x, y) = \left(1, 0, \frac{dq}{dx}(x, y)\right) \quad \frac{d\Lambda}{dy}(x, y) = \left(0, 1, \frac{dq}{dy}(x, y)\right)$$

y por tanto

$$n_\Lambda(x, y) = \left(-\frac{dq}{dx}(x, y), -\frac{dq}{dy}(x, y), 1\right)$$

apunta hacia arriba. Así  $\Lambda$  es una parametrización de  $S_2^+$  y

$$\begin{aligned} \int_{S_2^+} (0, 0, f_3) &= \int_T \langle (0, 0, f_3 \circ \Lambda(x, y)), n_\Lambda(x, y) \rangle d(x, y) = \\ &= \int_T f_3(x, y, q(x, y)) d(x, y) \end{aligned}$$

Por último, la superficie  $S_3$  es paralela al eje vertical, y por tanto el vector normal en cualquier punto es paralelo al plano horizontal y tiene la tercera coordenada nula:  $n = (n_1, n_2, 0)$  Entonces

$$\int_{S_3^+} (0, 0, f_3) = 0$$





Así pues,

$$\begin{aligned} \int_{Fr(V)^+} (0, 0, f_3) &= - \int_T f_3(x, y, p(x, y)) d(x, y) + \int_T f_3(x, y, p(x, y)) d(x, y) = \\ &= \int_T (f_3(x, y, q(x, y)) - f_3(x, y, p(x, y))) d(x, y) \end{aligned}$$

Por otro lado, calculando ahora la integral en  $V$  mediante el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_V \frac{df_3}{dz}(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_T \left( \int_{p(x, y)}^{q(x, y)} \frac{df_3}{dz}(x, y, z) dz \right) d(x, y) = \\ &= \int_T (f_3(x, y, q(x, y)) - f_3(x, y, p(x, y))) d(x, y) \end{aligned}$$

Es decir, las dos integrales son iguales, como queríamos demostrar.

◀ (Volver al enunciado)



### Observaciones:

1- Es fácil comprobar que la divergencia del rotacional de un campo vectorial de clase  $C^2$  es cero. Aplicando entonces el Teorema de Gauss, la integral sobre la frontera de una región elemental (que es una superficie cerrada simple regular a trozos y orientable) de un rotacional es cero.

Esta propiedad de los rotacionales generaliza el concepto de los campos conservativos que estudiamos en el tema de las integrales de línea: en aquel caso vimos que la integral a lo largo de una curva cerrada de un campo conservativo es cero.

2- Como en el caso del Teorema de Green, el Teorema de Gauss se puede utilizar para calcular volúmenes de regiones elementales del espacio, haciendo la integral sobre la frontera de un campo de clase  $C^1$  cuya divergencia valga uno.

