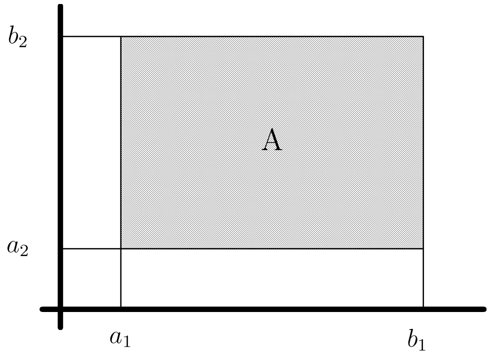
1. Construcción de la Integral

La integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$ es una generalización de la integral de funciones de una variable. La definición que vamos a dar reproduce el método de Darboux para funciones acotadas definidas en rectángulos. La generalización a otra familia más amplia de conjuntos se verá más adelante.

Llamamos rectángulo en $\mathbb{R}^n$ a un producto cartesiano de intervalos

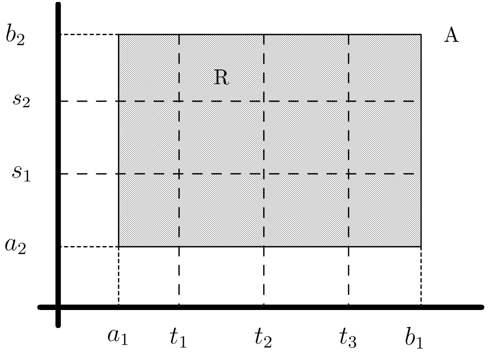
$$A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$



y llamamos volumen de A al producto de las longitudes de sus lados

$$v(A) = \Pi_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

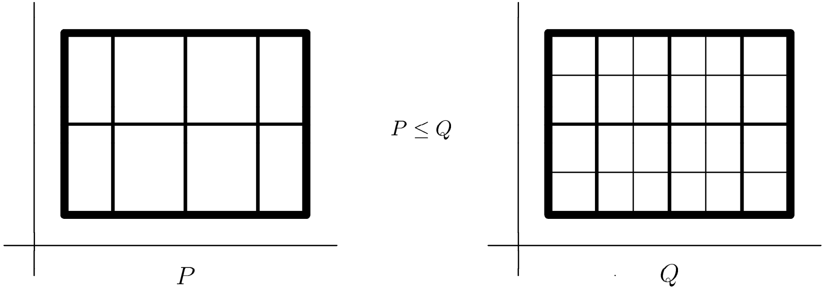
Llamamos partición de A a una familia P formada por una partición de cada uno de los intervalos, $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$, donde $P_i = \{a = t_0 \leq \cdots \leq t_{k_i} = b_i\}$ es una partición de $[a_i, b_i]$



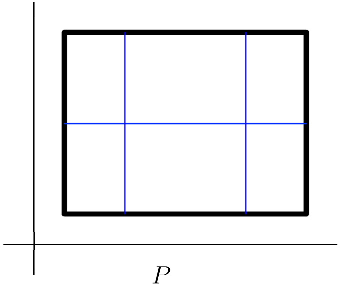
Una partición P de A define una familia finita de rectángulos, que llamaremos $\mathfrak{R}_P$, que verifica

$$A = \bigcup_{R \in \mathfrak{R}_P} R; \quad v(A) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} v(R)$$

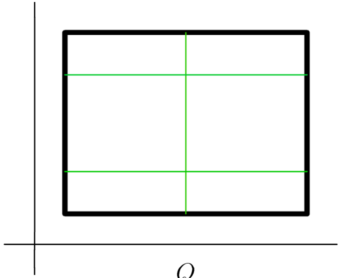
Si $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$ y $Q = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ son dos particiones de A, se dice que $Q \geq P$, o que Q es más fina que P, si para cada i entre 1 y n $P_i \subseteq Q_i$. En este caso, Q define en cada rectángulo R de $\mathfrak{R}_P$ una partición Q_R.



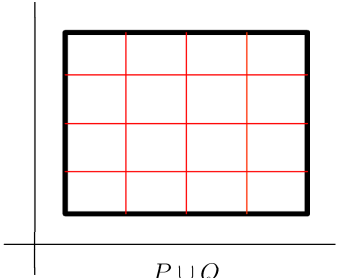
Dadas dos particiones P y Q de A, llamaremos $P \cup Q$ a la partición formada por todos los puntos de cada P_i y Q_i



P



Q



$P \cup Q$

Definición (Sumas de Riemann)**.**
Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada, y* P *una partición de* A*. Para cada rectángulo* $R \in \mathfrak{R}_P$ *se definen:*

$$m_R(f) = \inf\{f(x);\ x \in R\}$$

$$M_R(f) = \sup\{f(x);\ x \in R\}$$

Se definen la Suma Inferior de Riemann *y la* Suma Superior de Riemann *por*

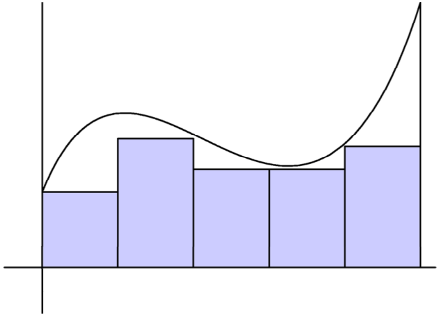
$$\underline{S}(f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} m_R(f)\, v(R)$$

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} M_R(f)\, v(R)$$

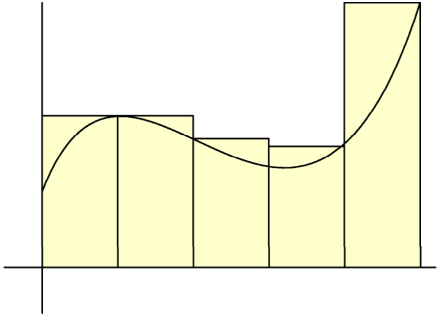
respectivamente.

Si f es una función no negativa, $\underline{S}(f,P)$ es la suma de los volúmenes de los rectángulos $R \times [0, m_R(f)]$, levantados por debajo de la gráfica de f, y $\overline{S}(f,P)$ es la suma de los volúmenes de los rectángulos $R \times [0, M_R(f)]$ construidos por encima de la gráfica de f

Caso n=1:



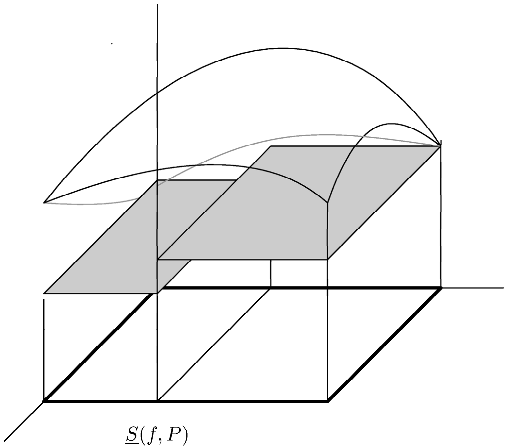
$\underline{S}(f,P)$



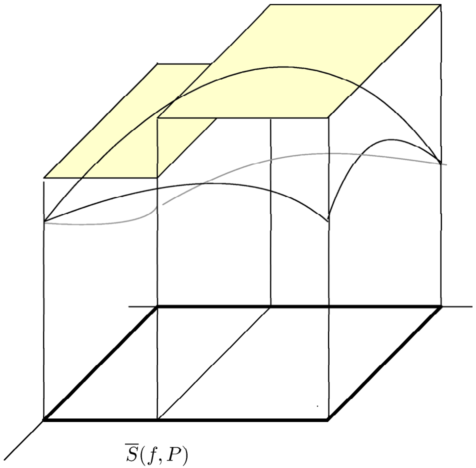
$\overline{S}(f,P)$

Integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$. Concepto y Propiedades Fundamentales.

Caso n=2



$\underline{S}(f, P)$



$\overline{S}(f, P)$

Estas sumas superiores e inferiores verifican las siguientes propiedades:

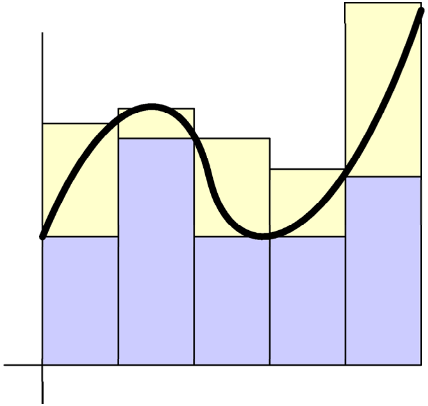
AAVVR

Integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$. Concepto y Propiedades Fundamentales.

Estas sumas superiores e inferiores verifican las siguientes propiedades:

1.- Para toda partición P de A,

$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P)$$

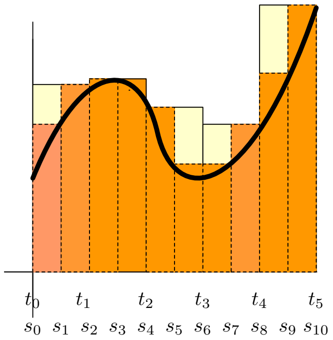


$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P)$$

2.- Si P y Q son dos particiones con $P \leq Q$, entonces

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \quad \text{y} \quad \overline{S}(f,P) \geq \overline{S}(f,Q)$$

es decir, cuanto más fina es la partición, la suma inferior es mayor y la superior es menor.



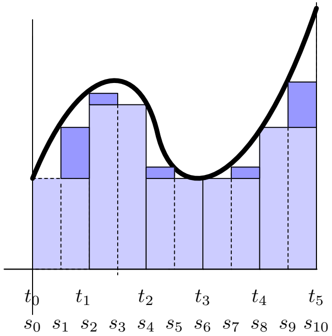
$P \leq Q$

$P = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$

$\overline{S}(f,P)$

$Q = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}\}$

$\overline{S}(f,Q)$



$P \leq Q$

$P = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$

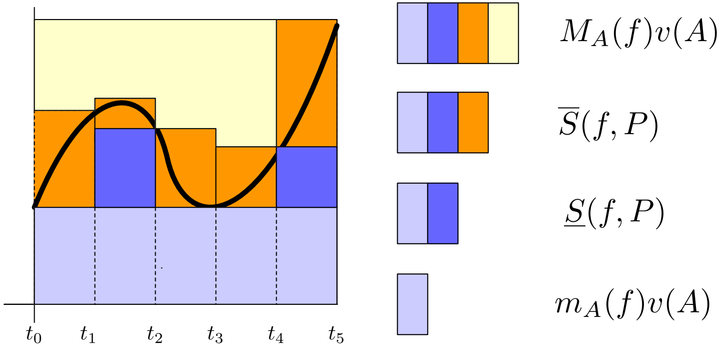
$\underline{S}(f, P)$

$Q = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}\}$

$\underline{S}(f, Q)$

3.- Para toda partición P de A,

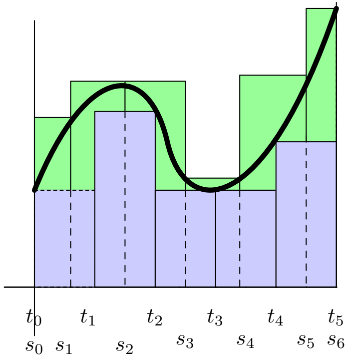
$$m_A(f)v(A) \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) \leq M_A(f)v(A)$$

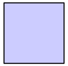


$$P = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

4.- Si P y Q son dos particiones cualesquiera de A,

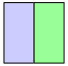
$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$$





$P = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$

$\underline{S}(f,P)$



$Q = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$

$\overline{S}(f,Q)$

Definimos ahora las integrales inferior y superior de una función de la siguiente manera:

Definición (Integral Superior e Integral Inferior)**.**
Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.
Se llama integral inferior de f en A a

$$\underline{\int}_A f = \sup\{\underline{S}(f,P);\ P \text{ partición de } A\}$$

Y se llama integral superior de f en A a

$$\overline{\int}_A f = \inf\{\overline{S}(f,P);\ P \text{ partición de } A\}$$

Las integrales superior e inferior están bien definidas, en el sentido de que como los conjuntos de sumas superiores e inferiores de Riemann de f son acotados, existen el supremo y el ínfimo respectivamente.

Además, por las propiedades que hemos visto antes, se tiene que

$$m_A(f)v(A) \leq \underline{\int}_A f \leq \overline{\int}_A f \leq M_A(f)v(A)$$

Definición (Función Integrable Riemann)**.**
Sea A *un rectángulo en* $\mathbb{R}^n$*, y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$*. Se dice que* f *es integrable Riemann en* A *si es acotada y las integrales superior e inferior de* f *en* A *coinciden. En este caso se llama integral de* f *en* A *a*

$$\int_A f = \overline{\int}_A f = \underline{\int}_A f$$

Ejemplo 1. *Toda función constante en un rectángulo es integrable. Además, si $f(x) = a$ para cada $x \in A$, entonces $\int_A f = av(A)$*

En efecto, si P es una partición cualquiera de A, y R es uno de los rectángulos definidos por P, $m_R(f) = a = M_R(f)$, así que

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} M_R(f)v(R) = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} av(R) = a\sum_{R\in\mathfrak{R}_P} v(R) = av(A)$$

y

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} m_R(f)v(R) = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} av(R) = a\sum_{R\in\mathfrak{R}_P} v(R) = av(A)$$

Por tanto

$$\overline{\int}_A f = \inf\{\overline{S}(f,P),\ P \text{ partición de } A\} = av(A)$$

y

$$\underline{\int}_A f = \sup\{\underline{S}(f,P),\ P \text{ partición de } A\} = av(A)$$

las dos integrales son iguales, f es integrable, y $\int_A f = av(A)$

Ejemplo 2. *La función de Dirichlet, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es integrable Riemann.

En efecto, si P es una partición cualquiera de A, y R es uno de los rectángulos definidos por P, en R habrá números racionales y números irracionales, de modo que $m_R(f) = 0$ y $M_R(f) = 1$, así que

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} M_R(f) v(R) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} v(R) = v([0,1]) = 1$$

y

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} m_R(f) v(R) = 0$$

Por tanto

$$\overline{\int_A} f = \inf\{\overline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = 1$$

y

$$\underline{\int_A} f = \sup\{\underline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = 0$$

Ejemplo 3. *Funciones no integrables en* $\mathbb{R}^2$

Partiendo del ejemplo anterior, es fácil construir funciones que no sean integrables, definidas en conjuntos de $\mathbb{R}^2$, o en general de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, puede ser

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

definida en $A = [0,1] \times [0,1]$, o

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin \mathbb{Q}^2 \end{cases}$$

$\square$

2. Criterio de Riemann

El primer teorema que vamos a demostrar, da una condición equivalente para la integrabilidad de una función, aunque no da el valor de su integral. Es una condición parecida a la condición de Cauchy de las sucesiones de números reales, o de vectores de $\mathbb{R}^n$.

Teorema (Criterio de Integrabilidad de Riemann).
Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en A. f es integrable en A si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ de A tal que

$$\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) \leq \epsilon$$

Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

Supongamos primero que f es integrable en A, y sea $\epsilon > 0$. Por la definición de la integral superior como el ínfimo de las sumas superiores de Riemann, existirá al menos una partición P_1 de A tal que $\overline{S}(f, P_1) < \overline{\int}_A f + \epsilon/2$. Y por la definición de la integral inferior como supremo de las sumas inferiores, existirá al menos una partición P_2 de A tal que $\underline{S}(f, P_2) > \underline{\int}_A f - \epsilon/2$.

Consideramos entonces la partición P unión de P_1 y P_2, y tenemos

$$\overline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P_1) < \overline{\int}_A f + \epsilon/2$$

y

$$\underline{S}(f,P) \geq \underline{S}(f,P_2) > \underline{\int}_A f - \epsilon/2$$

de donde restando las dos desigualdades se obtiene

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \overline{\int}_A f + \epsilon/2 - \underline{\int}_A f + \epsilon/2 = \epsilon$$

ya que por ser f integrable $\overline{\int}_A f = \underline{\int}_A f$.

Recíprocamente, supongamos ahora que para cada $\epsilon > 0$ existe alguna partición P_ϵ de A tal que $\overline{S}(f,P_\epsilon) - \underline{S}(f,P_\epsilon) < \epsilon$

Entonces como $\overline{\int}_A f \leq \overline{S}(f,P_\epsilon)$ y $\underline{\int}_A f \geq \underline{S}(f,P_\epsilon)$, tenemos

$$0 \leq \overline{\int}_A f - \underline{\int}_A f \leq \overline{S}(f,P_\epsilon) - \underline{S}(f,P_\epsilon) < \epsilon$$

y esto para todo $\epsilon > 0$, luego necesariamente

$$\overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f$$

y por tanto f es integrable en A.

◀(Volver al enunciado) □

Como consecuencia de este teorema es fácil demostrar que toda función continua en un rectángulo es integrable, o incluso que toda función monótona es integrable (ver problemas)

3. Propiedades

Para terminar este primer capítulo, vamos a demostrar las propiedades elementales de la integral

Teorema (Propiedades de la Integral de Riemann).
Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en A.

1. *la suma $f+g$ es integrable y $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$*
2. *para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el producto αf es integrable, y $\int_A (\alpha f) = \alpha \int_A f$*
3. *si $f \geq 0$, entonces* $\displaystyle\int_A f \geq 0$
4. *si $f \geq g$, entonces* $\displaystyle\int_A f \geq \int_A g$
5. *$|f|$ también es integrable, y* $\displaystyle\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$
6. *$\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son integrables*
7. *el cuadrado f^2 es integrable*
8. *el producto fg es integrable*

Demostración: (Saltar al final de la demostración)

(1) Como f y g son acotadas, también $f+g$ es acotada.

Sea P una partición cualquiera de A, y $R \in \mathfrak{R}_P$ un rectángulo cualquiera definido por P. entonces

$$\begin{aligned} m_R(f+g) &= \inf\{f(x)+g(x),\ x \in R\} \geq \\ &\geq \inf\{f(x),\ x \in R\} + \inf\{g(y),\ y \in R\} = m_R(f) + m_R(g) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_R(f+g) &= \sup\{f(x)+g(x),\ x \in R\} \leq \\ &\leq \sup\{f(x),\ x \in R\} + \sup\{g(y),\ y \in R\} = M_R(f) + M_R(g) \end{aligned}$$

En consecuencia, multiplicando por $v(R)$ y sumando

$$\begin{aligned} \underline{S}(f,P) + \underline{S}(g,P) &\leq \underline{S}(f+g,P) \leq \underline{\int}_A (f+g) \\ &\leq \leq \overline{\int}_A (f+g) \leq \overline{S}(f+g,P) \leq \overline{S}(f,P) + \overline{S}(g,P) \end{aligned}$$

Si tomamos ahora dos particiones cualesquiera de A, P^1 y P^2, y consideramos la unión $P = P^1 \cup P^2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,P^1)+\underline{S}(g,P^2) &\leq \underline{S}(f,P)+\underline{S}(g,P)\leq \underline{S}(f+g,P)\\
&\leq \underline{\int}_A (f+g)\leq \overline{\int}_A (f+g)\leq \overline{S}(f+g,P)\leq\\
&\leq \overline{S}(f,P)+\overline{S}(g,P)\leq \overline{S}(f,P^1)+\overline{S}(g,P^2)
\end{aligned}$$

Dejando fija P^2, y tomando a la izquierda de la cadena supremos en P^1, como f es integrable queda

$$\int_A f+\underline{S}(g,P^2)\leq \underline{\int}_A (f+g)\leq \overline{\int}_A (f+g)\leq \overline{S}(f,P^1)+\overline{S}(g,P^2)$$

y tomando ahora supremos en P^2

$$\int_A f+\int_A g\leq \underline{\int}_A (f+g)\leq \overline{\int}_A (f+g)\leq \overline{S}(f,P^1)+\overline{S}(g,P^2)$$

Repitiendo estos argumentos con la parte derecha de la desigualdad, tomando ínfimos en vez de supremos, obtenemos

$$\int_A f+\int_A g\leq \underline{\int}_A (f+g)\leq \overline{\int}_A (f+g)\leq \int_A f+\int_A g$$

luego en efecto $f+g$ es integrable, y su integral es la suma de las integrales de f y g

(2) Si f es integrable, entonces es acotada y evidentemente entonces también αf es acotada.
Supongamos ahora que $\alpha \geq 0$.
Sea P una partición cualquiera de A, y R uno de los rectángulos de $\mathfrak{R}_P$.

$$m_R(\alpha f) = \inf\{\alpha f(x),\ x \in R\} = \alpha \inf\{f(x),\ x \in R\} = \alpha m_R(f)$$

y análogamente

$$M_R(\alpha f) = \sup\{\alpha f(x),\ x \in R\} = \alpha \sup\{f(x),\ x \in R\} = \alpha M_R(f)$$

Entonces, multiplicando por el volumen de cada rectángulo de la partición, y sumando

$$\underline{S}(\alpha f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} m_R(\alpha f) v(R) = \sum_{r \in \mathfrak{R}_P} \alpha m_R(f) v(R) = \alpha \underline{S}(f, P)$$

y

$$\overline{S}(\alpha f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} M_R(\alpha f) v(R) = \sum_{r \in \mathfrak{R}_P} \alpha M_R(f) v(R) = \alpha \overline{S}(f, P)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\underline{\int_A} \alpha f &= \sup\{\underline{S}(\alpha f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\
&= \sup\{\alpha \underline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\
&= \alpha \sup\{\underline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\
&= \alpha \underline{\int_A} f
\end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned}
\overline{\int_A} \alpha f &= \inf\{\overline{S}(\alpha f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\
&= \inf\{\alpha \overline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\
&= \alpha \inf\{\overline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\
&= \alpha \overline{\int_A} f
\end{aligned}$$

Así que como f es integrable, αf también lo es, y $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$

Cuando $\alpha < 0$, hay que tener en cuenta que para sacar α de un supremo o un ínfimo, hay que cambiar el sentido de las desigualdades, con lo que se cambian los ínfimos por supremos y los supremos por ínfimos:

$$m_R(\alpha f) = \inf\{\alpha f(x),\ x \in R\} = \alpha \sup\{f(x),\ x \in R\} = \alpha M_R(f)$$

y análogamente

$$M_R(\alpha f) = \sup\{\alpha f(x),\ x \in R\} = \alpha \inf\{f(x),\ x \in R\} = \alpha m_R(f)$$

de modo que

$$\underline{S}(\alpha f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} m_R(\alpha f) v(R) = \sum_{r \in \mathfrak{R}_P} \alpha M_R(f) v(R) = \alpha \overline{S}(f, P)$$

y

$$\overline{S}(\alpha f, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} M_R(\alpha f) v(R) = \sum_{r \in \mathfrak{R}_P} \alpha m_R(f) v(R) = \alpha \underline{S}(f, P)$$

De aquí

$$\begin{aligned}
\underline{\int_A} \alpha f &= \sup\{\underline{S}(\alpha f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\
&= \sup\{\alpha \overline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\
&= \alpha \inf\{\overline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\
&= \alpha \overline{\int_A} f
\end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned}\overline{\int_A}\alpha f &= \inf\{\overline{S}(\alpha f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\ &= \inf\{\alpha \underline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\ &= \alpha \sup\{\underline{S}(f, P),\ P \text{ partición de } A\} = \\ &= \alpha \underline{\int_A} f\end{aligned}$$

Así que también αf es integrable y $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$

(3) Es trivial, ya que si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, entonces

$$\int_A f \geq \underline{\int_A} f \geq m_A(f)v(A) \geq 0$$

(4) Se deduce de las tres propiedades anteriores: por (2), $-g$ es integrable, y $\int_A(-g) = -\int_A g$. Por (1), $f - g = f + (-g)$ es integrable, y $\int_A(f-g) = \int_A f + \int_A(-g) = \int_A f - \int_A g$. Y por (3), como $f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in A$,

$$\int_A f - \int_A g = \int_A (f-g) \geq 0$$

luego

$$\int_A f \geq \int_A g$$

(5) Como f es integrable, en particular es acotada, y por tanto también $|f|$ es acotada.

Sea P una partición cualquiera de A, y R uno de los rectángulos definidos por P, $R \in \mathfrak{R}_P$, y sean x e y dos puntos cualesquiera en R. Se tiene

$$m_R(f) - M_R(f) \leq f(x) - f(y) \leq M_R(f) - m_R(f)$$

luego

$$|f(x)| - |f(y)| \leq \big|\, |f(x)| - |f(y)| \,\big| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_R(f) - m_R(f)$$

y tomando supremos en x e ínfimos en y,

$$M_R(|f|) - m_R(|f|) \leq M_R(f) - m_R(f)$$

Multiplicando cada una de estas desigualdades por el volumen de R, y sumando

$$\overline{S}(|f|, P) - \underline{S}(|f|, P) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} (M_R(|f|) - m_R(|f|))\, v(R) \leq$$

$$\leq \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} (M_R(f) - m_R(f))\, v(R) \leq \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)$$

Como f es integrable, aplicando el Criterio de Riemann, dado $\epsilon > 0$ existe alguna partición P_ϵ de A tal que $\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon$. Y entonces

$$\overline{S}(|f|, P_\epsilon) - \underline{S}(|f|, P_\epsilon) \leq \overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

luego aplicando el mismo criterio a $|f|$, también es integrable.

Además, como para todo $x \in A$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

aplicando las propiedades (2) y (4)

$$-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f|$$

de donde se deduce que

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

(6) Basta observar que para cada cada $x \in A$

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

y

$$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

y aplicar las propiedades anteriores.

(7) Como f es integrable, es acotada, y entonces también f^2 es acotada. Además también $|f|$ es integrable, como ya hemos visto.

Sea $k>0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in A$, y sea $\epsilon > 0$. Aplicando el criterio de Riemann a la función $|f|$, existe una partición P de A tal que

$$\overline{S}(|f|, P) - \underline{S}(|f|, P) \leq \frac{\epsilon}{2k}$$

Si R es uno de los rectángulos definidos por esa partición, tenemos

$$\begin{aligned} M_R(f^2) &= \sup\{f^2(x),\ x \in R\} = \sup\{|f(x)|^2,\ x \in R\} = \\ &= \sup\{|f(x)|, x \in R\}^2 = M_R(|f|)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_R(f^2) &= \inf\{f^2(x),\ x \in R\} = \inf\{|f(x)|^2,\ x \in R\} = \\ &= \inf\{|f(x)|, x \in R\}^2 = m_R(|f|)^2 \end{aligned}$$

(es decir, el cuadrado se puede sacar fuera del supremo y del ínfimo de una familia de números positivos)

Entonces

$$\begin{aligned} M_R(f^2) - m_R(f^2) &= M_R(|f|)^2 - m_R(|f|)^2 = \\ &= (M_R(|f|) - m_R(|f|))(M_R(|f|) + m_R(|f|)) \\ &\leq 2k(M_R(|f|) - m_R(|f|)) \end{aligned}$$

Multiplicando estas desigualdades por el volumen de cada rectángulo R, y sumando, queda

$$\overline{S}(f^2, P) - \underline{S}(f^2, P) \leq 2k(\overline{S}(|f|, P) - \underline{S}(|f|, P)) \leq 2k\frac{\epsilon}{2k} = \epsilon$$

Aplicando el criterio de Riemann a la función f^2, ésta es integrable.

(8) Por último, para demostrar que el producto de f y g es integrable basta escribir

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

y aplicar las propiedades anteriores.

(Volver al enunciado) $\square$

Y además

Proposición.
Sea P una partición cualquiera de A. f es integrable en A si y sólo si para cada rectángulo $R \in \mathfrak{R}_P$ la restricción de f a R es integrable. Además en este caso

$$\int_A f = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} \int_R f$$

Demostración:

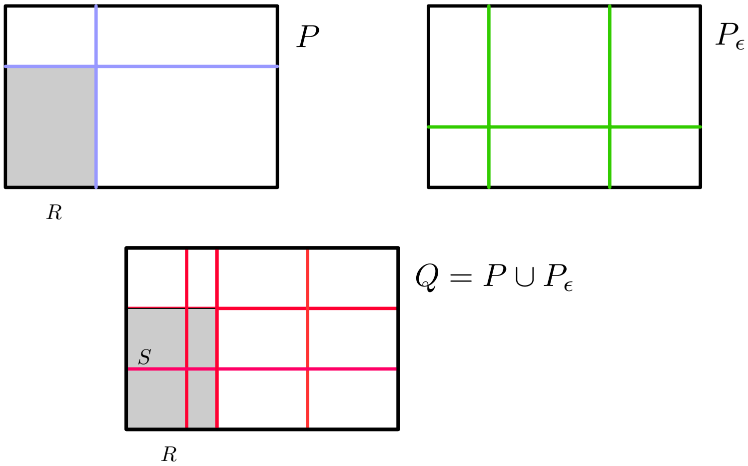
Sea P una partición cualquiera de A.

Supongamos primero que f es integrable en A,

Aplicando el criterio de Riemann a A, dado $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ de A tal que $\overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon$. Consideramos entonces en A la unión de las dos particiones, $Q = P \cup P_\epsilon$, que es mayor que P_ϵ, con lo que

$$\overline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P_\epsilon) - \underline{S}(f, P_\epsilon) < \epsilon$$

y también es mayor que P, con lo que define sobre cada rectángulo $R \in \mathfrak{R}_P$ una partición Q_R. Los rectángulos definidos por Q_R en R son los rectángulos $S \in \mathfrak{R}_Q$ que están contenidos en R.



Para un rectángulo $R \in \mathfrak{R}_P$ cualquiera, si calculamos para esa partición Q_R definida en R la diferencia entre la suma superior y la inferior, obtendremos

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f|_R, Q_R) - \underline{S}(f|_R, Q_R) &= \sum_{S \in \mathfrak{R}_Q, S \subseteq R} [M_S(f) - m_S(f)] v(S) \leq \\
&\leq \sum_{S \in \mathfrak{R}_Q} [M_S(f) - m_S(f)] v(S) = \\
&= \overline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) < \epsilon
\end{aligned}$$

Por tanto la restricción de f a R es integrable.

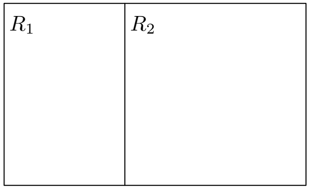
Recíprocamente, supongamos que la restricción de f a cada rectángulo R de $\mathfrak{R}_P$ es integrable.

Dado $\epsilon > 0$, aplicando en cada rectángulo R el criterio de Riemann, existirá una partición P_R de R tal que

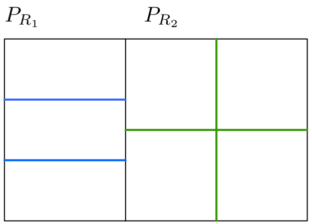
$$\overline{S}(f|_R, P_R) - \underline{S}(f|_R, P_R) \leq \frac{\epsilon}{k}$$

donde k es el número de rectángulos definidos por la partición P.

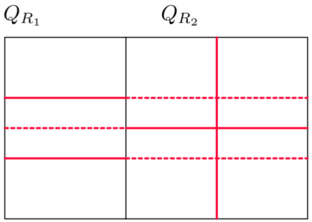
Definimos entonces la partición Q de A unión de la partición original P y todas las particiones P_R, que es mayor que P, y define en cada rectángulo R de $\mathfrak{R}_P$ una partición Q_R mayor que P_R, formada por los rectángulos $S \in \mathfrak{R}_Q$ que están contenidos en R



P



P



$Q = P \cup P_{R_1} \cup P_{R_2}$

Para calcular la diferencia entre la sumas superior e inferior definidas por Q, aplicamos la propiedad distributiva de la suma, agrupando los rectángulos $S \in \mathfrak{R}_Q$ que están en cada rectángulo $R \in \mathfrak{R}_P$

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) &= \sum_{S\in\mathfrak{R}_Q} [M_S(f) - m_S(f)]v(S) = \\
&= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} \left[\sum_{S\in\mathfrak{R}_Q, S\subseteq R} [M_S(f) - m_S(f)]v(S) \right] = \\
&= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} \left[\sum_{S\in\mathfrak{R}_{Q_R}} [M_S(f) - m_S(f)]v(S) \right] = \\
&= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} \left[\overline{S}(f|_R, Q_R) - \underline{S}(f|_R, Q_R) \right] \leq \\
&\leq \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} \left[\overline{S}(f|_R, P_R) - \underline{S}(f|_R, P_R) \right] \leq \\
&\leq \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} \frac{\epsilon}{k} = \epsilon
\end{aligned}
$$

Por tanto f es integrable en A.

Además, si P' es ahora una partición cualquiera de A, y consideramos la unión $Q = P \cup P'$, y como antes la partición Q_R definida por Q en cada rectángulo R de $\mathfrak{R}_P$, tenemos

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,P') &\leq \underline{S}(f,Q) = \sum_{S\in\mathfrak{R}_Q} m_S(f)v(S) = \\
&= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P}\left[\sum_{S\in\mathfrak{R}_Q, S\subseteq R} m_S(f)v(S)\right] = \\
&= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} \underline{S}(f|_R, Q_R) \leq \sum_{R\in\mathfrak{R}_P}\int_R f
\end{aligned}$$

y tomando supremos cuando P' recorre todas las posibles particiones de A se tiene

$$\int_A f \leq \sum_{R\in\mathfrak{R}_P}\int_R f$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P') &\leq \overline{S}(f,Q) = \sum_{S\in\mathfrak{R}_Q} M_S(f)v(S) = \\
&= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P}\left[\sum_{S\in\mathfrak{R}_Q, S\subseteq R} M_S(f)v(S)\right] = \\
&= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} \overline{S}(f|_R, Q_R) \geq \sum_{R\in\mathfrak{R}_P}\int_R f
\end{aligned}$$

y tomando ínfimos cuando P' recorre todas las posibles particiones de A, se tiene

$$\int_A f \geq \sum_{R\in\mathfrak{R}_P}\int_R f$$

Por tanto

$$\int_A f = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P}\int_R f$$

$\square$

Ejemplo 4. *Las funciones f^+ y f^-*

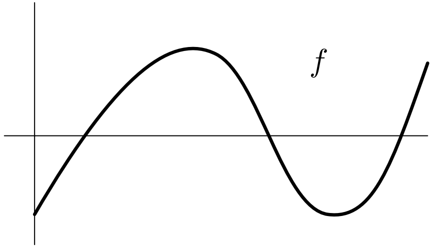
Un caso particular que se deduce de las propiedades anteriores, y que jugará un papel especial en la teoría de integración es el de las funciones f^+ y f^-.

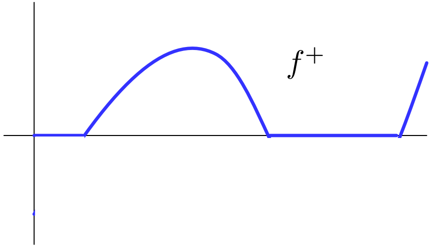
Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, se llaman

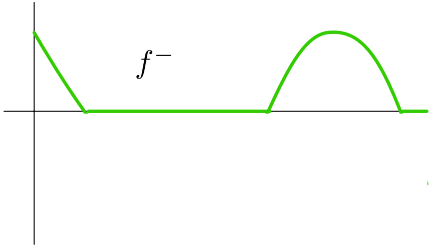
$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

y

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \max\{-f(x), 0\}$$







Las funciones f^+ y f^- son funciones no negativas, y cumplen

$$f = f^+ - f^-$$

y

$$|f| = f^+ + f^-$$

de donde se deduce, por ejemplo, que f es integrable si y sólo si f^+ y f^- son integrables.