El Teorema más importante en este capítulo es el teorema de Lebesgue, que caracteriza la integrabilidad de una función acotada en términos del conjunto de puntos de discontinuidad. Para llegar a la demostración, utilizaremos algunas definiciones y lemas previos.

Definición (Oscilación de una función). *Sea A un conjunto en $\mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Dado un subconjunto B de A se define la oscilación de f en B como*

$$o(f, B) = \sup\{f(x) : \ x \in B\} - \inf\{f(x) : \ x \in B\}$$

Dado $\delta > 0$, se define para cada $x \in A$, $o(f, x, \delta) = o(f, B(x, \delta) \cap A)$
Y para cada x de A se define la oscilación de f en x como

$$o(f, x) = \inf\{o(f, x, \delta), \ \delta > 0\}$$

Lema 1. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, y $x \in A$. f es continua en x si y sólo si $o(f, x) = 0$*

Demostración:
Supongamos primero que f es continua en x, y sea $\epsilon > 0$. Existe un $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B(x, \delta) \cap A$ se tiene $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon/2$. Entonces

$$f(y) - f(z) \leq |f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| \leq \epsilon$$

para todos $y, z \in B(x,\delta) \cap A$, y tomando supremos en y e ínfimos en z, obtenemos

$$\begin{aligned} &o(f,x) \leq o(f,x,\delta) = \\ &= \sup\{f(y),\ y \in B(x,\delta) \cap A\} - \inf\{f(z),\ z \in B(x,\delta) \cap A\} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Y esto para todo $\epsilon > 0$, luego necesariamente $o(f,x) = 0$

Recíprocamente, supongamos ahora que $o(f,x) = 0$, y sea $\epsilon > 0$. Entonces

$$o(f,x) = \inf\{o(f,x,\delta),\ \delta > 0\} < \epsilon$$

y por tanto existe algún $\delta > 0$ tal que $o(f,x,\delta) < \epsilon$.

Sea ahora $y \in B(x,\delta) \cap A$. Tenemos

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq \sup\{f(u),\ u \in B(x,\delta) \cap A\} - \inf\{f(v),\ v \in B(x,\delta) \cap A\} = \\ &= o(f,x,\delta) \leq \epsilon \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\leq \sup\{f(u),\ u \in B(x,\delta) \cap A\} - \inf\{f(v),\ v \in B(x,\delta) \cap A\} = \\ &= o(f,x,\delta) \leq \epsilon \end{aligned}$$

luego $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon$. Así pues f es continua en x

$\square$

Lema 2. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Para todo $p > 0$, el conjunto $N_p = \{x \in A : \ o(f,x) \geq p\}$ es cerrado en A, con la topología relativa como subespacio métrico de $\mathbb{R}^n$, y en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración:

Sea $p > 0$; vamos a demostrar que $A \setminus N_p$ es abierto en A.

Sea $y \in A \setminus N_p$. Hay que demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que $B(y,\delta) \cap A$ está contenido en $A \setminus N_p$

Si $y \in A \setminus N_p, \ o(f,y) < p$, y por la definición de oscilación de una función en un punto, existe algún $\delta > 0$ tal que $o(f,y,\delta) < p$. Sea ahora $z \in B(y,\delta) \cap A$, y escojamos $\delta' > 0$ tal que $B(z,\delta') \subseteq B(y,\delta)$. Se tiene:

$$o(f,z) \leq o(f,z,\delta') \leq o(f,y,\delta) < p$$

luego $z \in A \setminus N_p$

Luego efectivamente N_p es cerrado en A, y como A es cerrado en $\mathbb{R}^n$, N_p es cerrado también en $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Lema 3. *Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Supongamos que existe $q > 0$ tal que $o(f,x) < q$ para todo $x \in A$. Entonces existe una partición P de A tal que $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq q\, v(A)$*

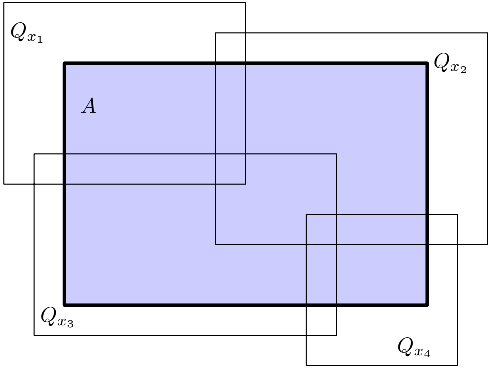
Demostración:

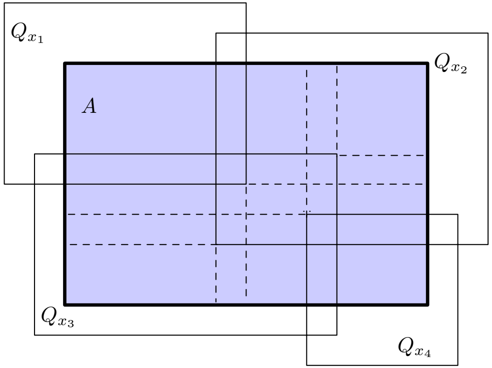
Para cada $x \in A$, como por hipótesis $o(f,x) < q$, existe un $\delta_x > 0$ tal que $o(f,x,\delta_x) < q$. Consideramos entonces un rectángulo abierto Q_x tal que

$$x \in Q_x \subseteq \overline{Q_x} \subseteq B(x,\delta_x)$$

Tenemos que $A \subseteq \bigcup_{x\in A} Q_x$ y $\{Q_x,\ x \in A\}$ es un recubrimiento abierto de A, que es compacto. Así pues, existe una familia finita $x_1,\ldots,x_k$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} Q_{x_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \overline{Q_{x_i}}$$





Sea P la partición de A determinada por los vértices de los rectángulos Q_{x_i} que están en A. Cada rectángulo $R \in \mathfrak{R}_P$ está contenido en alguno de los $\overline{Q_{x_i}} \cap A$, con lo que

$$o(f,R) \leq o(f,\overline{Q_{x_i}} \cap A) \leq o(f,B(x_i,\delta_{x_i}) \cap A) = o(f,x_i,\delta_{x_i}) < q$$

Entonces

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,p) &= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} (M_R(f) - m_R(f))v(R) = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} o(f,R)v(R) \leq \\ &\leq q \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} v(R) = qv(A) \end{aligned}$$

$\square$

Teorema (de Lebesgue para la integral de Riemann). *Sean A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y*

$$N = \{x \in A;\ f \text{ no es continua en } x\}$$

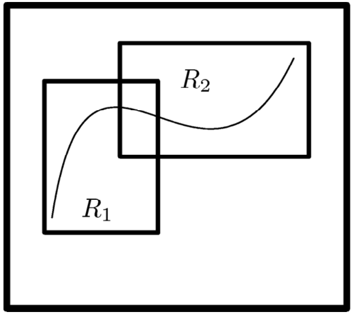
f es integrable - Riemann en A si y sólo si N tiene medida cero.

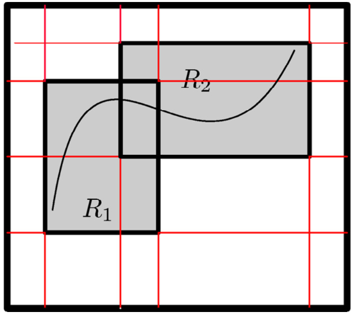
Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

Supongamos primero que N tiene medida cero, y veamos que entonces f es integrable en A. Para ello vamos a comprobar que se verifica el Criterio de Riemann (para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P de A de modo que $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$)

Sea $\epsilon > 0$. Llamamos $N_\epsilon = \{x \in A : \ o(f, x) \geq \epsilon\}$. Por el Lema 2, N_ϵ es cerrado en A, que es compacto, y por tanto N_ϵ es compacto. Además $N_\epsilon \subset \{x \in A : \ o(f, x) > 0\} = N$ (lema 1), y como por hipótesis N tiene medida cero, entonces N_ϵ también tiene medida cero. Por último, al ser N_ϵ compacto, tendrá contenido cero.

Dado ese mismo ϵ, existe entonces una familia finita de rectángulos cerrados $R_1, \ldots, R_k$ tales que $N_\epsilon \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} R_i^\circ$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} v(R_i) < \epsilon$

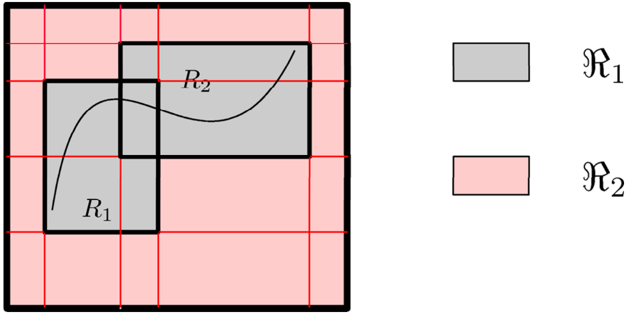




P

Consideramos la partición P de A determinada por las coordenadas de los vértices de los rectángulos R_i. Para cada rectángulo $R \in \Re_P$ se tiene que, o bien $R \subseteq R_i$ para algún i, $1 \leq i \leq k$, o bien $R \cap R_i^\circ = \emptyset$ para todo i, $1 \leq i \leq k$.

Sea $\Re_1$ la familia de los rectángulos $R \in \Re_P$ que están contenidos en alguno de los R_i; y sea $\Re_2$ el resto de los rectángulos de $\Re_P$.



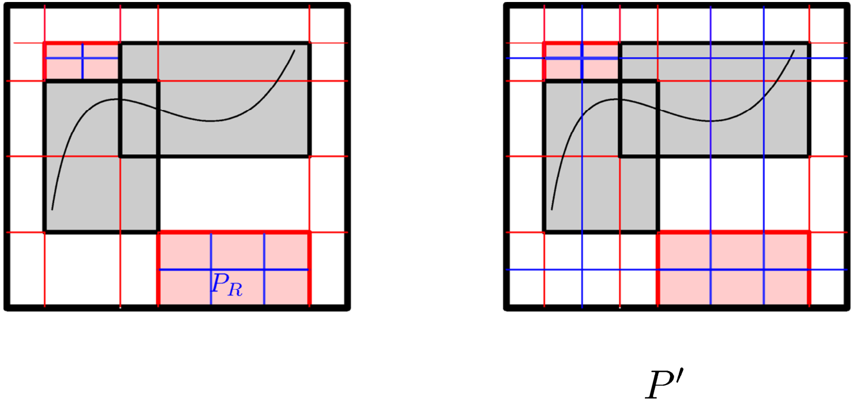
Si $R \in \Re_2$, $R \cap N_\epsilon = \emptyset$, luego para todo $x \in R$ la oscilación $o(f, x) < \epsilon$. Por el lema 3, existe una partición de R, P_R, tal que

$$\overline{S}(f|_R, P_R) - \underline{S}(f|_R, P_R) < \epsilon\, v(R)$$

Sea P' la partición de A determinada por todas las particiones P_R, $R \in \Re_2$, y la partición original P. P' es más fina que P, y determina sobre cada $R \in \Re_2$ una partición mas fina que P_R, $P'_R = \{R' \in \Re_{P'}, R' \subseteq R\}$

AAVVR

Teorema de Lebesgue



Así pues para cada R de $\Re_2$ se tiene

$$\sum_{R' \in \Re_{P'}, R' \subseteq R} (M_{R'}(f) - m_{R'}(f))v(R') = \overline{S}(f|_R, P'_R) - \underline{S}(f|_R, P'_R) \leq$$
$$\overline{S}(f|_R, P_R) - \underline{S}(f|_R, P_R) < \epsilon\, v(R)$$

Y para todo $Q \in \Re_1$, tomando M una cota de $|f|$,

$$\sum_{R'\in\Re_{P'},R'\subseteq Q}(M_{R'}(f)-m_{R'}(f))v(R')\le 2M\sum_{R'\in\Re_{P'},R'\subseteq Q}v(R')=2Mv(Q)$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P')-\underline{S}(f,P') &= \sum_{Q\in\Re_1}\Big(\sum_{R'\in\Re_{P'},R'\subseteq Q}(M_{R'}(f)-m_{R'}(f))v(R')\Big)+\\ &+\sum_{R\in\Re_2}\Big(\sum_{R'\in\Re_{P'},R'\subseteq R}(M_{R'}(f)-m_{R'}(f))v(R')\Big)\le\\ &\le 2M\sum_{Q\in\Re_1}v(Q)+\epsilon\sum_{R\in\Re_2}v(R)\le\\ &\le 2M\sum_{i=1}^{m}v(R_i)+\epsilon v(A)\le(2M+v(A))\epsilon\end{aligned}$$

Luego f cumple el Criterio de Integrabilidad de Riemann, y por tanto es integrable en A.

AAVVR

Teorema de Lebesgue

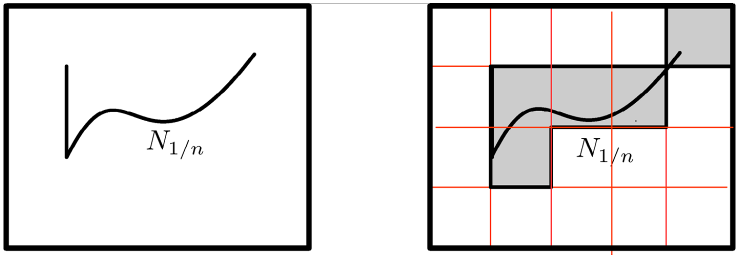
Recíprocamente, supongamos ahora que f es integrable en A.

Definimos los conjuntos $N_{1/n} = \{x \in A : \ o(f, x) \geq 1/n\}$, de modo que $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{1/n}$.

Vamos a ver que cada uno de los conjuntos $N_{1/n}$ tiene contenido cero, con lo que se obtendrá que N es una unión numerable de conjuntos de contenido cero, y por tanto tiene medida cero, terminando la demostración del Teorema.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y sea $\epsilon > 0$. Aplicando el criterio de integrabilidad de Riemann, existe una partición P de A tal que $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon/n$.

Llamamos $R_1, \dots, R_k$ los rectángulos definidos por P que tienen algún punto de $N_{1/n}$ en su interior ($N_{1/n} \cap R_i^\circ \neq \emptyset$),



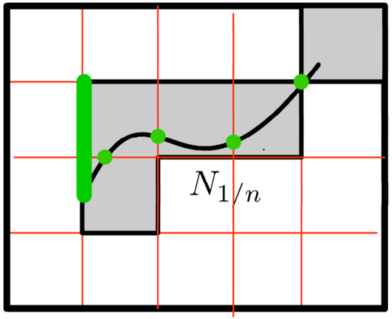
P

AAVVR

Teorema de Lebesgue

Y definimos los conjuntos

$$N^1_{1/n} = N_{1/n} \bigcap (\bigcup_{i=1}^{k} R_i^\circ)$$
$$N^2_{1/n} = N_{1/n} \bigcap (\bigcup_{R\in\Re_P} Fr(R))$$



$N^1_{1/n}$

$N^2_{1/n}$

separando por un lado los puntos de $N_{1/n}$ que están en el interior de algún rectángulo R_i, y por otro el resto, que estarán en la frontera de alguno de los rectángulos definidos por P.

Para cada rectángulo R, la frontera de R es una unión finita de rectángulos de volumen cero en $\mathbb{R}^n$, luego el conjunto $N^2_{1/n}$ está contenido en una unión finita de rectángulos con suma de volúmenes igual a cero.

Y por otro lado tenemos el conjunto $N^1_{1/n} \subseteq \bigcup_{i=1}^k R_i^\circ$.

Cada R_i contiene en su interior por lo menos un punto x_i de $N_{1/n}$, donde $o(f, x_i) \geq 1/n$. Tomamos $\delta > 0$ de modo que $B(x_i, \delta) \subset R_i$, y tenemos

$$o(f, R_i) \geq o(f, B(x_i, \delta)) = o(f, x_i, \delta) \geq o(f, x_i) \geq 1/n$$

de donde se deduce

$$1/n \sum_{i=1}^k v(R_i) \leq \sum_{i=1}^k o(f, R_i) v(R_i) \leq \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon/n$$

luego $\sum_{i=1}^k v(R_i) < \epsilon$

Así pues

$$N_{1/n} \subset (\bigcup_{i=1}^k R_i) \cup (\bigcup_{R \in \Re_P} Fr(R))$$

unión finita de rectángulos, cuya suma de volúmenes es menor que ϵ. y por tanto tiene contenido cero.

◀(Volver al enunciado) □