1. Teorema de Fubini

El teorema de Fubini nos va a dar una técnica para el cálculo de integrales de funciones de varias variables mediante el cálculo de varias integrales de funciones de una variable. A partir de ahí se podrán utilizar todas las técnicas conocidas del Análisis de una variable para el cálculo de integrales mediante cálculo de primitivas y el teorema fundamental del cálculo (Regla de Barrow): cambios de variables, integración por partes, etc.

Si A es un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, podemos descomponerlo como producto cartesiano de dos rectángulos, $A = A_1 \times A_2$, A_1 en $\mathbb{R}^p$ $(p < n)$ y A_2 en $\mathbb{R}^q$ $(q = n - p)$

$$A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \times [a_{p+1}, b_{p+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

$$A_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \qquad A_2 = [a_{p+1}, b_{p+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

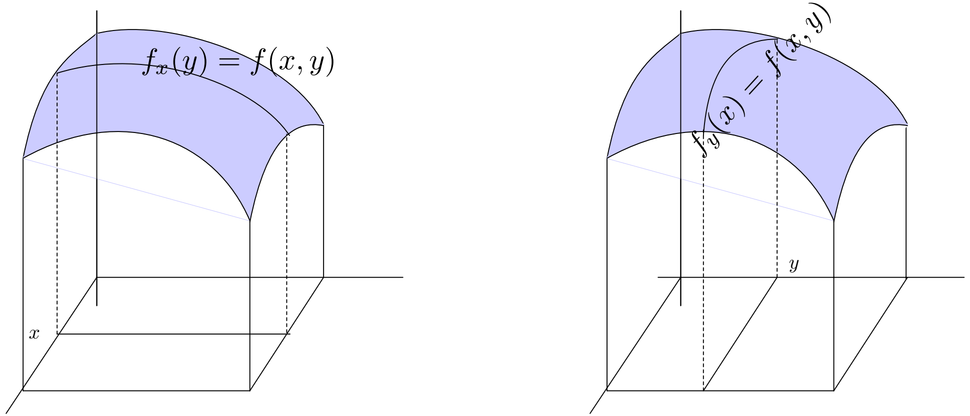
Los elementos de A los escribiremos como pares (x, y), con $x \in A_1$, e $y \in A_2$, y las funciones definidas en A como $f(x, y)$

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$$

Para cada $x \in A_1$ fijo, podemos considerar la función $f_x : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_x(y) = f(x, y)$$

donde x es una constante, y la variable es $y \in A_2$.



Y de igual manera, para cada $y \in A_2$ fijo,podemos considerar la función $f_y : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_y(x) = f(x,y)$$

donde y es una constante y la variable es $x \in A_1$.

AAVVR

Teorema de Fubini.

Teorema de Fubini

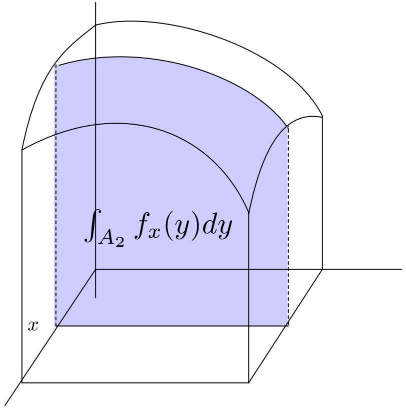
Aplicación al . . .

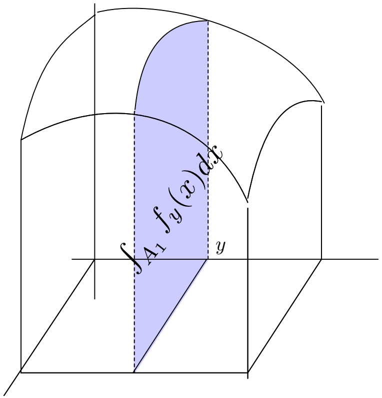
Si estas funciones son integrables, sus integrales se escribirían

$$\int_{A_2} f_x = \int_{A_2} f_x(y)dy = \int_{A_2} f(x,y)dy$$

y

$$\int_{A_1} f_y = \int_{A_1} f_y(x)dx = \int_{A_1} f(x,y)dy$$





Para la función inicial $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ escribiremos $\int_A f(x,y)d(x,y)$.

Con estas notaciones vamos a demostrar el siguiente teorema

Teorema (de Fubini).

Sean $A_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ y $A_2 \subseteq \mathbb{R}^q$ dos rectángulos, $A = A_1 \times A_2$, y f de A en $\mathbb{R}$ una función integrable. Entonces las funciones

$$I(x) = \underline{\int}_{A_2} f(x,y)dy \quad \text{y} \quad S(x) = \overline{\int}_{A_2} f(x,y)dy$$

son integrables en A_1, y además se verifica

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{A_1} I(x)dx = \int_{A_1} S(x)dx$$

Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

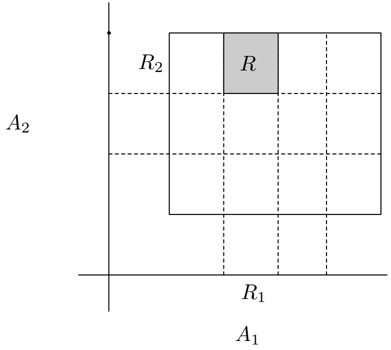
AAVVR

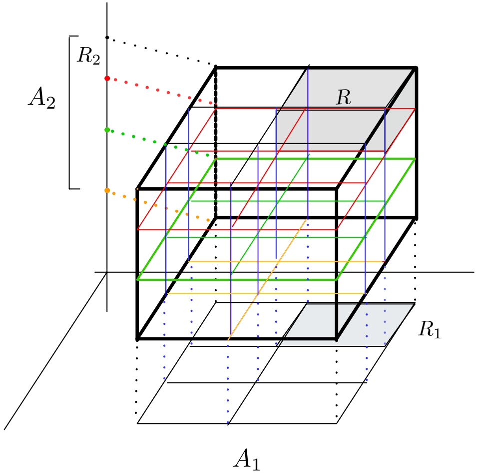
Teorema de Fubini.

Teorema de Fubini

Aplicación al . . .

Observemos en primer lugar que una partición de $A = A_1 \times A_2$ esta formada por una partición de A_1 y otra de A_2, $\Pi = \{P, Q\} = \{P_1, \ldots, P_p, Q_1, \ldots, Q_q\}$. Y cualquier rectángulo de la partición Π es de la forma $R = R_1 \times R_2$, producto de un rectángulo de la partición P y otro de la partición Q, y $v(R) = v(R_1)v(R_2)$





Sea entonces Π una partición cualquiera de A. Tenemos

$$\underline{S}(f,\Pi) = \sum_{R\in\Re_\Pi} m_R(f)v(R) = \sum_{R_1\in\Re_P, R_2\in\Re_Q} m_{R_1\times R_2}(f)v(R_1)v(R_2) =$$

$$= \sum_{R_1\in\Re_P}\left(\sum_{R_2\in\Re_Q} m_{R_1\times R_2}(f)v(R_2)\right)v(R_1)$$

Sea ahora $x_0 \in R_1$ fijo. Entonces

$$\begin{aligned} m_{R_1\times R_2}(f) &= \inf\{f(x,y);\ x\in R_1, y\in R_2\} \leq \\ &\leq \inf\{f(x_0,y);\ y\in R_2\} = m_{R_2}(f_{x_0}) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_{R_2\in\Re_Q} m_{R_1\times R_2}(f)v(R_2) &\leq \sum_{R_2\in\Re_Q} m_{R_2}(f_{x_0})v(R_2) = \\ &= \underline{S}(f_{x_0},Q) \leq I(x_0) = \underline{\int}_{A_2} f_{x_0} \end{aligned}$$

Y esto para todo $x_0 \in R_1$, luego tomando ínfimos cuando x_0 pertenece a R_1, tenemos

$$\sum_{R_2\in\Re_Q} m_{R_1\times R_2}(f)v(R_2) \leq m_{R_1}(I)$$

y por tanto

$$\underline{S}(f,\Pi) \leq \sum_{R_1\in\Re_P} m_{R_1}(I)v(R_1) = \underline{S}(I,P)$$

Análogamente se prueba que $\overline{S}(f,\Pi) \geq \overline{S}(S,P)$

Y uniendo las dos desigualdades

$$\underline{S}(f,\Pi) \leq \underline{S}(I,P) \leq \overline{S}(I,P) \leq \overline{S}(S,P) \leq \overline{S}(f,\Pi)$$

Como f es integrable por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existirá alguna partición Π de A de modo que la diferencia entre la suma superior y la inferior de f con esa partición Π sea menor que ϵ, y entonces la diferencia

$$\overline{S}(I,P) - \underline{S}(I,P) \leq \overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) \leq \epsilon$$

así que I es integrable en A_1.

Además se deduce de las desigualdades anteriores que

$$\underline{S}(f,\Pi) \leq \underline{S}(I,P) \leq \underline{\int}_{A_1} I \leq \overline{\int}_{A_1} I \leq \overline{S}(I,P) \leq \overline{S}(f,\Pi)$$

para toda partición Π de A, luego

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{A_1} I(x)dx = \int_{A_1} \left(\underline{\int}_{A_2} f(x,y)dy \right) dx$$

Y análogamente se puede obtener $\displaystyle\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{A_1} \left(\overline{\int}_{A_2} f(x,y)dy \right) dx$

◀(Volver al enunciado) □

Observaciones:

1. Intercambiando el papel de la x y la y en la demostración, se puede obtener una fórmula de integración en orden inverso:

   Si f es una función integrable en un rectángulo $A = A_1 \times A_2$, las funciones $I(y) = \underline{\int}_{A_1} f(x,y)d$

   y $S(y) = \overline{\int}_{A_1} f(x,y)dx$ son integrables en A_2, y además

   $$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{A_2} I(y)dy = \int_{A_2} S(y)dy$$

2. Si f es continua en A, cada una de las funciones $f_x : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es también continua, y por tanto integrable, así que

   $$I(x) = \underline{\int}_{A_2} f_x(y)dy = \overline{\int}_{A_2} f_x(y)dy = S(x) = \int_{A_2} f_x(y)dy$$

   de modo que

   $$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{A_1} \left(\int_{A_2} f(x,y)dy \right) dx$$

Análogamente, cada una de las funciones $f_y : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, y por tanto integrable, de modo que

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_{A_2} \left(\int_{A_1} f(x,y)dx \right) dy$$

sin necesidad de utilizar integrales inferiores o superiores. Estas integrales se denominan *integrales iteradas*.

Sin embargo si f es integrable, como en la hipótesis del teorema, es imprescindible utilizar integrales inferiores o superiores, porque las funciones f_x o f_y pueden no ser integrables.

Ejemplo 1. *Función integrable*

Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}; y \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}; y = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

definida en $A = [0,1] \times [0,1]$

Esta función es integrable, y su integral vale cero (ver problemas)

Sin embargo si queremos aplicar el teorema de Fubini, para cada $y \in [0,1]$ fijo tenemos:

- Si $y \notin \mathbb{Q}$, $f_y(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, y por tanto $\int_{A_1} f_y(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$
- pero si $y = p/q \ \in \mathbb{Q}$, entonces

$$f_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q & \text{si} \quad x \in Q \end{cases}$$

que no es integrable, por lo que es imprescindible utilizar la integral inferior o la superior.

3. Si f no es integrable, pueden existir o no las integrales iteradas, ser iguales, o ser distintas. Sólo en este último caso se puede deducir que la función no es integrable.

Ejemplo 2. *Función no integrable*

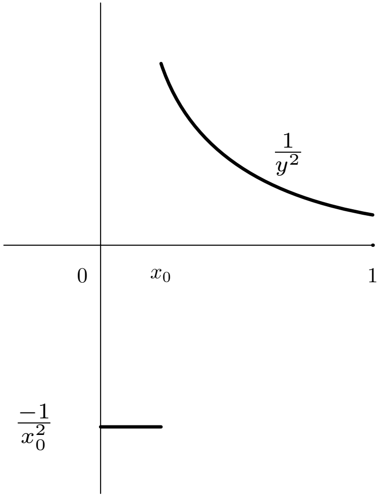
Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} & \text{si} \quad 0 < x < y < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si} \quad 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

definida en $A = [0,1] \times [0,1]$

Si aplicamos directamente el teorema para integrar primero respecto de y y luego respecto de x tenemos:

Para cada $x_0 \in [0, 1]$ fijo,



$$f_{x_0}(y) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x_0^2} & \text{si} \quad 0 < y < x_0 \\ \dfrac{1}{y^2} & \text{si} \quad x_0 < y < 1 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0,\ y = x_0, \\ & \quad \text{ó } y = 1 \end{cases}$$

que es integrable (sólo tiene tres puntos de discontinuidad), y verifica

$$\begin{aligned}\int_{A_2} f_{x_0}(y)dy &= \int_0^{x_0} \frac{-1}{x_0^2}dy + \int_{x_0}^1 \frac{1}{y^2}dy = \\ &= \left.\frac{-y}{x_0^2}\right]_{y=0}^{y=x_0} + \left.\frac{-1}{y}\right]_{y=x_0}^{1} = \frac{-1}{x_0} - 1 + \frac{1}{x_0} = -1\end{aligned}$$

Y si planteamos la integral en el orden contrario:

Para cada $y_0 \in [0,1]$ fijo,

$$f_{y_0}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y_0^2} & \text{si} \quad 0 < x < y_0 \\ \dfrac{-1}{x^2} & \text{si} \quad y_0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0,\ x = y_0,\ x = 1 \end{cases}$$

que es integrable (sólo tiene tres puntos de discontinuidad), y verifica

$$\begin{aligned}\int_{A_1} f_{y_0}(x)dx &= \int_0^{y_0} \frac{1}{y_0^2}dx + \int_{y_0}^1 \frac{-1}{x^2}dx = \\ &= \left.\frac{x}{y_0^2}\right]_{x=0}^{x=y_0} + \left.\frac{1}{x}\right]_{x=y_0}^{1} = \frac{1}{y_0} + 1 + \frac{-1}{y_0} = 1\end{aligned}$$

En este caso podemos asegurar. como consecuencia del teorema de Fubini, que f no es integrable (aunque de hecho ya debíamos habernos dado cuenta de que f no es una función acotada en $A = [0,1] \times [0,1]$, por lo que no está definida la integral de Riemann de f en A)

4. El teorema tiene un aspecto particular cuando se aplica para integrar funciones definidas en conjuntos medibles Jordan.

   Supongamos que M es medible Jordan en $\mathbb{R}^n$, y que $A = A_1 \times A_2$ es un rectángulo que contiene a M. Y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en M. Según la definición de integral de una función sobre un conjunto medible Jordan, y aplicando el Teorema de Fubini,

$$\int_M f = \int_A f\chi_M = \int_{A_1} \left(\underline{\int}_{A_2} f(x,y)\chi_M(x,y)dy \right) dx$$

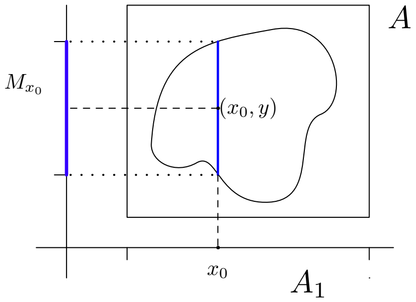
Es decir, para cada $x_0 \in A_1$ fijo hay que calcular

$$\underline{\int}_{A_2} f(x_0,y)\chi_M(x,y)dy$$

Ahora bien, fijo $x_0 \in A_1$

$$\begin{aligned}\chi_M(x_0, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x_0, y) \in M \\ 0 & \text{si} \quad (x_0, y) \notin M \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \in M_{x_0} \\ 0 & \text{si} \quad y \notin M_{x_0} \end{cases} = \\ &= \chi_{M_{x_0}}(y)\end{aligned}$$

donde $M_{x_0} = \{y \in A_2 : \ (x_0, y) \in M\}$ es la sección de M por el subespacio $x = x_0$.



Si cada conjunto M_x es medible Jordan cuando $x \in A_1$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_M f(x,y)d(x,y) &= \int_{A_1}\left(\underline{\int}_{A_2} f(x,y)\chi_{M_x}(x,y)dy\right)dx = \\ &= \int_{A_1}\left(\underline{\int}_{M_x} f(x,y)dy\right)dx\end{aligned}$$

o la expresión correspondiente con la integral superior.

Y análogamente, si para cada $y \in A_2$ los conjuntos $M_y = \{x \in A_1 : \ (x,y) \in M\}$ son medibles Jordan,

$$\begin{aligned}\int_M f(x,y)d(x,y) &= \int_{A_2}\left(\underline{\int}_{A_2} f(x,y)\chi_{M_y}(x,y)dx\right)dy = \\ &= \int_{A_2}\left(\underline{\int}_{M_y} f(x,y)dx\right)dy\end{aligned}$$

o la expresión correspondiente con la integral superior.

2. Aplicación al cálculo de volúmenes

Vamos a utilizar el teorema de Fubini como técnica para el cálculo de volúmenes de conjuntos medibles Jordan. De alguna forma esta última sección justifica la idea geométrica en la que se basa la construcción de la integral como un método para calcular el volumen encerrado entre la gráfica de una función y su dominio.

Necesitaremos hacer uso del siguiente lema técnico sobre los conjuntos de contenido cero:

Lema 1. *Sea M un conjunto en $\mathbb{R}^n$. M tiene contenido cero si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto M_ϵ medible Jordan que lo contiene, $M \subseteq M_\epsilon$, y que tiene volumen menor que ϵ, $v(M_\epsilon) < \epsilon$*

Demostración:

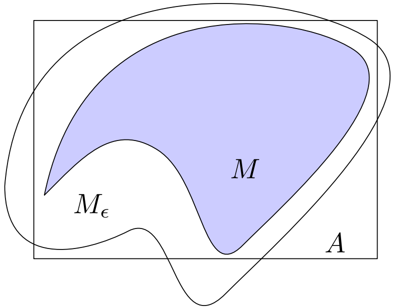
Supongamos primero que M tiene contenido cero, y sea $\epsilon > 0$. Aplicando la definición, existe una familia finita de rectángulos $R_1, \dots, R_k$ tales que

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k} v(R_i) < \epsilon$$

Definimos entonces el conjunto $M_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{k} R_i$, que es medible Jordan por ser unión finita de conjuntos medibles Jordan, y verifica

$$v(M_\epsilon) = v\left(\bigcup_{i=1}^{k} R_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} v(R_i) < \epsilon$$

Recíprocamente, supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto M_ϵ que contiene a M y que tiene volumen menor que ϵ. Vamos a demostrar que entonces M es medible Jordan y su volumen es cero, lo que ya hemos probado en el tema anterior que es equivalente a tener contenido cero.



Sea A un rectángulo que contenga a M; para cada $\epsilon > 0$ tenemos que en A la función característica de M es menor que la de $A \cap M_\epsilon$,

$$\chi_M \leq \chi_{A \cap M_\epsilon}$$

y por tanto

$$0 \leq \underline{\int}_A \chi_M \leq \overline{\int}_A \chi_M \leq \int_A \chi_{A \cap M_\epsilon} = v(A \cap M_\epsilon) \leq v(M_\epsilon) < \epsilon$$

Luego χ_M es integrable en A, y su integral vale cero, lo que es lo mismo que decir que M es medible Jordan, y que su volumen es cero.

□

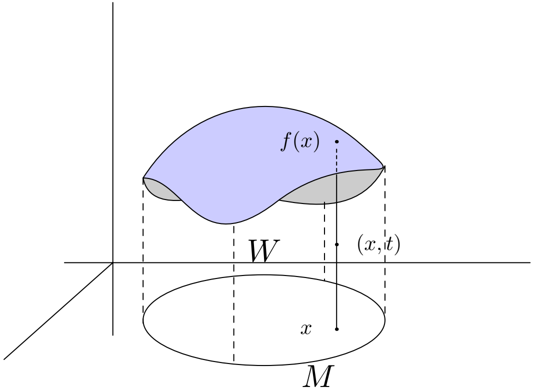
Este lema nos permite demostrar el siguiente teorema, sobre el volumen del cuerpo en $\mathbb{R}^{n+1}$ encerrado entre el dominio y la gráfica de una función integrable no negativa en un conjunto medible Jordan de $\mathbb{R}^n$

Teorema.
Sea M un conjunto medible Jordan, y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable - Riemann en M no negativa, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in M$. Sea W un conjunto en $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\{(x,t) : \ x \in M, \ 0 < t < f(x)\} \subseteq W \subseteq \{(x,y) : \ x \in M, \ 0 \leq t \leq f(x)\}$$

W es medible Jordan, y

$$v(W) = \int_M f(x)dx$$



Demostración:

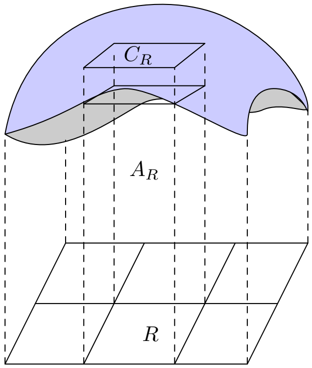
Vamos a hacer la demostración en dos pasos, suponiendo primero que M es un rectángulo, y luego en general cuando M es un conjunto medible Jordan.

Primer paso: si M es un rectángulo en $\mathbb{R}^n$
Como f es integrable en M, f es acotada, luego existe una constante $K > 0$ tal que para todo $x \in M$ es $0 \leq f(x) \leq K$. Entonces el conjunto W está contenido en el rectángulo de $\mathbb{R}^{n+1}$ $A = M \times [0, K]$, y en particular W es acotado.
Además, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe alguna partición P de A tal que $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$.

Para cada rectángulo $R \in \mathfrak{R}_P$ consideramos los conjuntos de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$C_R = R \times [0, M_R(f)] \quad \text{y} \quad A_R = R^0 \times (0, m_R(f))$$

C_R es un rectángulo cerrado, y A_R es un rectángulo abierto.



Y sean

$$C = \bigcup_{R \in \mathfrak{R}_P} C_R \quad \text{y} \quad A = \bigcup_{R \in \mathfrak{R}_P} A_R$$

C y A son conjuntos medibles Jordan, claramente $A \subseteq W \subseteq C$, A es abierto, C es cerrado, y poniendo $C = A \cup (C \setminus A)$ como unión de conjuntos disjuntos tenemos

$$v(C) = v(A) + v(C \setminus A) \qquad \text{luego} \qquad v(C \setminus A) = v(C) - v(A)$$

y

$$\begin{aligned} v(C) - v(A) &\leq \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} (v(R) M_R(f)) - \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} (v(R) m_R(f)) = \\ &= \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon \end{aligned}$$

De esta forma tenemos

$$Fr(W) = \overline{W} \setminus W^0 \subseteq C \setminus A$$

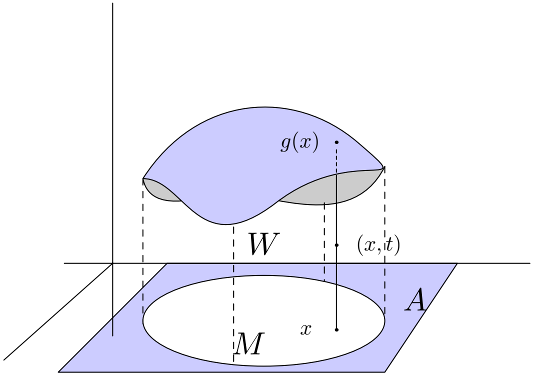
la frontera de W está contenido en un conjunto medible Jordan de volumen menor que ϵ. Como esto se puede hacer para cualquier $\epsilon > 0$, aplicando el lema anterior $Fr(W)$ es un conjunto de contenido cero, y por tanto W es medible Jordan.

Además, aplicando el teorema de Fubini para calcular el volumen de W,

$$\begin{aligned} v(W) &= \int_A \chi_W(x,t) d(x,t) = \int_M \left(\int_{W_x} \chi_W(x,t) dt \right) dx = \\ &= \int_M \left(\int_0^{f(x)} 1 dt \right) dx = \int_M f(x) dx \end{aligned}$$

Segundo paso: si M es un conjunto medible Jordan.

Sea A un rectángulo que contenga a M en $\mathbb{R}^n$, de modo que $g = f \chi_M$ es integrable en A.



Entonces

$$
\begin{aligned}
&\{(x,t):\ x\in A,\ 0<t<g(x)\} = \\
&\quad = \{(x,t):\ x\in M,\ 0<t<f(x)\} \cup \{(x,t):\ x\in A\setminus M, 0<t<0\} = \\
&\quad = \{(x,t):\ x\in M,\ 0<t<f(x)\} \subseteq W
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&\{(x,t):\ x\in A,\ 0\le t\le g(x)\} = \\
&\quad = \{(x,t):\ x\in M,\ 0\le t\le f(x)\} \cup \{(x,t):\ x\in A\setminus M, t=0\} \supseteq W
\end{aligned}
$$

Aplicando el paso anterior a la función g en el conjunto A, W es medible Jordan, y

$$v(W) = \int_A g(x)dx = \int_A f(x)\chi_M(x)dx = \int_M f(x)dx$$

Esto termina la demostración. $\square$

Como consecuencia es muy fácil demostrar un caso más general:

Corolario 1. *Sean M un conjunto medible Jordan en $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en M, y W un conjunto en $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que*

$$\{(x,t) : \; x \in M, \; g(x) < t < f(x)\} \subseteq W \subseteq \{(x,y) : \; x \in M, \; g(x) \leq t \leq f(x)\}$$

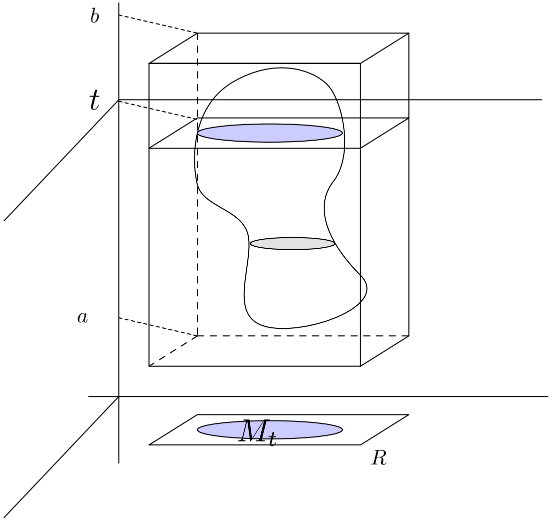
W es medible Jordan, y

$$v(W) = \int_M (f(x) - g(x))dx$$

Otra aplicación del teorema de Fubini para el cálculo de volúmenes de cuerpos en $\mathbb{R}^{n+1}$, es el principio de Cavalieri, que vamos a demostrar a continuación. Este resultado es especialmente útil en el caso de cuerpos geométricos obtenidos por revolución de areas planas alrededor de un eje, o por traslación a lo largo de una recta de figuras planas de area conocida. Pero esto se verá mejor en los ejemplos.

Teorema (Principio de Cavalieri)**.**
Sean M un conjunto medible Jordan en $\mathbb{R}^{n+1}$, R un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y $[a, b]$ un intervalo real, de modo que $M \subseteq R \times [a, b]$. Supongamos que para cada $t \in [a, b]$ la sección $M_t = \{(x \in R : (x, t) \in M\}$ es medible Jordan en $\mathbb{R}^n$, y sea $v(t) = v(M_t)$. Entonces

$$v(M) = \int_a^b v(t)dt$$



Demostración:

Como cada M_t es medible Jordan,

$$v(t) = \int_R \chi_{M_t}(x)dx$$

donde para cada $t \in [a, b]$ fijo,

$$\begin{aligned} \chi_{M_t}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in M_t \\ 0 & \text{si} \quad x \notin M_t \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,t) \in M \\ 0 & \text{si} \quad (x,t) \notin M \end{cases} = \\ &= \chi_M(x,t) \end{aligned}$$

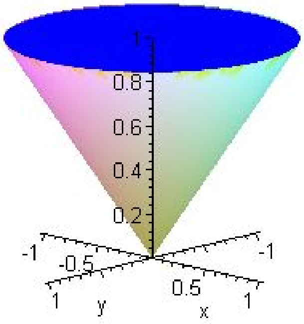
Luego $v(t) = \int_R \chi_M(x,t)dx$

Aplicando el teorema de Fubini

$$v(M) = \int_{R\times[a,b]} \chi_M(x,t)d(x,t) = \int_a^b \left(\int_R \chi_M(x,t)dx \right) dt = \int_a^b v(t)dt$$

$\square$

Ejemplo 3. *Calcular el volumen del conjunto* $M = \{(x, y) : \; x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1\}$



El conjunto M es la parte interior del cono de la figura, entre $z = 0$ y $z = 1$

M es acotado, y su frontera es la unión de las gráficas de las funciones $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, y $g(x, y) = 1$ definidas en el conjunto $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, que son continuas y por tanto integrables. Así que M es medible Jordan (habría que decir que también K es un conjunto medible Jordan en $\mathbb{R}^2$, con un argumento similar sobre su acotación y su frontera)

Para cada valor de $z_0 \in [0, 1]$, la sección de M con el plano $z = z_0$ es el conjunto de puntos (x, y) que cumple $x^2 + y^2 \leq z_0^2$, que es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio z_0. Por tanto $v(z_0) = \pi \; z_0^2$, y

$$v(M) = \int_0^1 v(z)dz = \int_0^1 \pi z^2 dz = \pi/3$$