Vamos a estudiar en este segundo capítulo sobre los cambios de variable para funciones de varias variables, algunos de los más habituales: los cambios de coordenadas a coordenadas polares en el plano, y a coordenadas cilíndricas o esféricas en el espacio.

Recordamos el enunciado del Teorema de Cambio de Variable:

Teorema 1 (Cambio de Variable en $\mathbb{R}^n$).

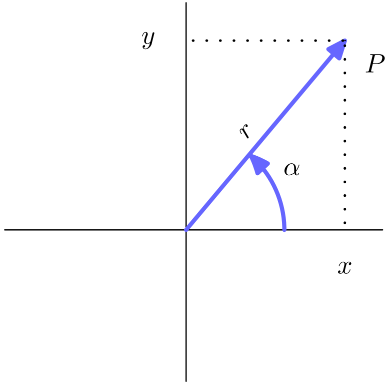
Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, y sea $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U. Sea M un conjunto medible-Jordan tal que $\overline{M} \subset U$, y supongamos que la restricción de Φ al interior de M, $\Phi\big|_{M^0}$ es un difeomorfismo de clase C^1. Sea f una función integrable en $\Phi(M)$. Entonces $(f \circ \Phi)$ es integrable en M, y

$$\int_{\Phi(M)} f = \int_M (f \circ \Phi)|J\Phi|$$

1. Coordenadas Polares en el plano

Como sabemos, los puntos del plano pueden identificarse mediante un sistema de referencia basado en la distancia del punto $P = (x, y)$ al origen de coordenadas, r , y el ángulo α que forma el vector $0P$ con el sentido positivo del eje horizontal. Estos dos valores, r y α se denominan *coordenadas polares de* P.

Este sistema de referencia es el que utiliza un radar de superficie:



El estudio trigonométrico del triángulo de la figura nos da las ecuaciones

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Para utilizar este sistema de referencia en la descripción del conjuntos del plano como un cambio de variable, consideramos la función

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definida por

$$\Phi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha)$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. Φ es de clase C^1 en el abierto $U = \mathbb{R}^2$, pues
$$d\Phi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}$$
2. Para cada punto (x, y) en $\mathbb{R}^2$ existen $r > 0$ y $\alpha \in [0, 2\pi)$ tales que $(x, y) = \Phi(r, \alpha)$
3. En el conjunto $V = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ es inyectiva:
   En efecto, si fuese $\Phi(r, \alpha) = \Phi(s, \beta)$, tendríamos
$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= s \cos \beta \\ r \operatorname{sen} \alpha &= s \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

elevando al cuadrado las dos ecuaciones, y sumándolas, se obtiene $r^2 = s^2$, y como r y s son estrictamente positivos en V, tiene que ser $0 \neq r = s$.

Dividiendo entonces las dos ecuaciones por $r = s$, se obtiene que α y β tienen a la vez el mismo seno y el mismo coseno; como ambos ángulos están en un mismo intervalo de longitud 2π, necesariamente tienen que ser iguales: $\alpha = \beta$.

Así que Φ es inyectiva en V.

4. Y además en V Jacobiano (el determinante de la diferencial) de Φ no se anula nunca

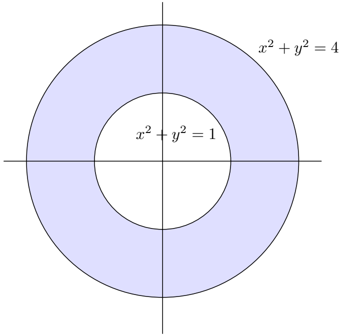
$$J\Phi(r,\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & r\cos\alpha \end{vmatrix} = r > 0$$

El teorema de la Función inversa nos sirve para asegurar que en V Φ es un difeomorfismo de clase C^1.

Supongamos ahora que tenemos que calcular la integral de una función f en un conjunto K del plano. Existirá un conjunto $M \subseteq [0,\infty) \times [0, 2\pi)$ tal que $K = \Phi(M)$, El interior de M está contenido en V, y por tanto la restricción de Φ a M^0 es inyectiva y regular (el Jacobiano no se anula nunca). Así que la restricción de Φ a M^0 es un difeomorfismo de clase C^1. Estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Cambio de Variable:

$$\begin{aligned}\iint_K f(x,y)d(x,y) &= \iint_M (f\circ\Phi)(r,\alpha)|J\Phi(r,\alpha)|d(r,\alpha) = \\ &= \iint_M f(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)\ r\ d(r,\alpha)\end{aligned}$$

Ejemplo 1.



Dado el conjunto $K=\{(x,y):\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$, *calcular* $\displaystyle\int\int_K x^2y^2d(x,y)$

Un punto $(x,y)\in K$ si y sólo si $1\le x^2+y^2\le 4$, que en coordenadas polares (sustituyendo $x=r\cos\alpha$, $y=r\operatorname{sen}\alpha$) queda

$$1\le r^2\cos^2\alpha + r^2\operatorname{sen}^2\alpha = r^2\le 4$$

luego, como $r\ge 0$

$$1\le r\le 2$$

Como sobre el ángulo α no se obtiene ninguna condición, puede ser $\alpha \in [0, 2\pi)$.
El conjunto K en coordenadas polares es

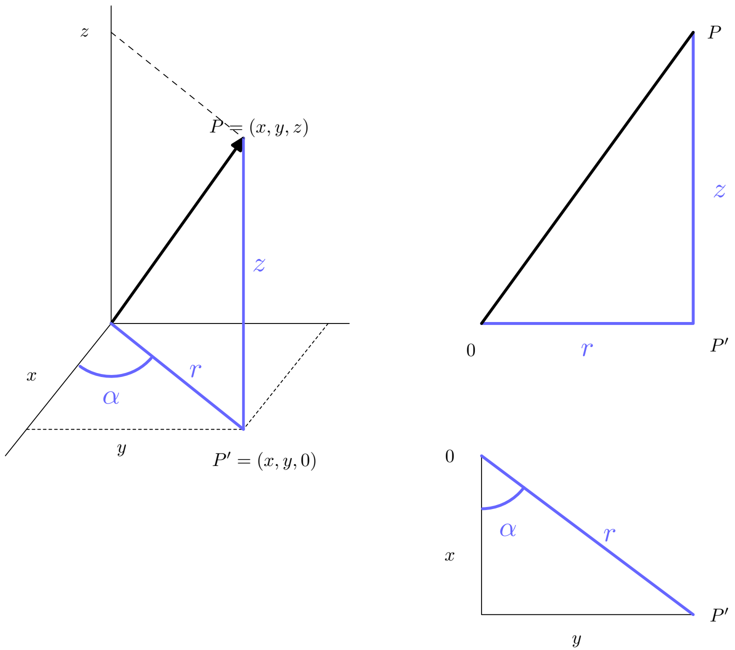
$$M = \{(r, \alpha) : \ 1 \leq r \leq 2, \ 0 \leq \alpha < 2\pi\}$$

y la integral queda

$$\begin{aligned}
\iint_K x^2y^2 d(x,y) &= \iint_M r^2 \cos^2\alpha \, r^2 \operatorname{sen}^2\alpha \, r \, d(r,\alpha) = \\
&= \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^5 \cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha d\alpha \, dr = \\
&= \int_1^2 r^5 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(2\alpha) d\alpha \, dr = \\
&= \frac{1}{4} \int_1^2 r^5 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4\alpha)}{2} d\alpha \, dr = \\
&= \frac{1}{4} \int_1^2 r^5 \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8} \operatorname{sen}(4\alpha) \right)_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} dr = \\
&= \frac{1}{4} \int_1^{2\pi} r^5 = \frac{\pi}{4} \frac{r^6}{6} \Big|_{r=1}^{r=2} = \frac{21\pi}{8}
\end{aligned}$$

◀◀ ▶▶ ◀ ▶

2. Coordenadas Cilíndricas en el Espacio



Un punto cualquiera $P = (x, y, z)$ del espacio se puede caracterizar unívocamente mediante su altura sobre el plano $z = 0$, que es la coordenada z, y las coordenadas polares de su proyección sobre el plano $z = 0$, $P' = (x, y, 0)$

Con respecto a estos parámetros r, θ, z se tiene

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \qquad r \in [0,\infty),\ \theta \in [0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R} \\ z &= z \end{aligned}$$

Los números r, θ y z se denominan *coordenadas cilíndricas* de P
El cambio de coordenadas viene dado por la función

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definida por

$$\Phi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$$

y verifica:

1. Φ es de clase C^1 en $U = \mathbb{R}^3$, y

$$d\Phi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ existe $(r, \theta, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z)$

3. En el conjunto $V = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ es inyectiva:

   En efecto, si $\Phi(r, \theta, z) = \Phi(s, \mu, w)$ entonces

$$\begin{aligned} r\cos\theta &= s\cos\mu \\ r\operatorname{sen}\theta &= s\operatorname{sen}\mu \\ z &= w \end{aligned}$$

   Elevando las dos primeras ecuaciones al cuadrado, y sumándolas, se obtiene $r^2 = s^2$, y como en V r y s son mayores que cero, tiene que ser $0 \neq r = s$.

   Dividiendo entonces las dos primeras ecuaciones entre $r = s$, se obtiene que θ y μ tienen a la vez el mismo seno y el mismo coseno, y como ambos están en el mismo intervalo $(0, 2\pi)$, tiene que ser $\theta = \mu$.

   Y la tercera ecuación nos da directamente que $z = w$.

4. Además Φ es regular en V, es decir, el Jacobiano no se anula nunca:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r > 0$$

Así pues, si K es un conjunto medible en $\mathbb{R}^3$, existe un conjunto M contenido en $[0,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R}$ tal que $K=\Phi(M)$, el interior de M estará contenido en V, y por tanto Φ es inyectiva y regular en M^0. Así, la restricción de Φ a M^0 es un difeomorfismo, y podemos aplicar el teorema de Cambio de Variable: Si f es integrable en K,

$$\begin{aligned}\iiint_K f(x,y,z)d(x,y,z) &= \iiint_M (f\circ\Phi)(r,\theta,z)|J\Phi(r,\theta,z)|\,d(r,\theta,z) = \\ &= \iiint_M f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\,r\,d(r,\theta,z)\end{aligned}$$

Ejemplo 2. *Sea* $K=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le z^2\le 1,\ z\ge 0\}$. *Se pide calcular la integral* $\displaystyle\iiint_K e^z(x^2+y^2)d(x,y,z)$

Utilizando coordenadas cilíndricas, $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $z=z$, las ecuaciones que describen el conjunto M quedan

$$r^2\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta=r^2\le z^2\le 1,\quad z\ge 0$$

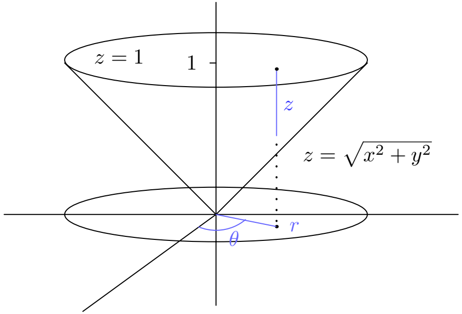
De aquí, como r es siempre positivo, tiene que ser $0\le r\le z\le 1$ y $0\le z\le 1$. Sobre el ángulo θ no hay ninguna condición.

Hay que resolver ese sistema de desigualdades: si fijamos primero r, necesariamente tiene que ser $0\le r\le 1$, y para un valor de r en esas condiciones tiene que ser $r\le z\le 1$. Como sobre

AAVVR

Algunos Cambios de Variable en el plano y en el espacio

θ no hay ninguna condición, puede tomar cualquier valor del dominio del cambio de variable, $0 \leq \theta \leq 2\pi$



La interpretación geométrica de lo que estamos haciendo con estas cuentas es mucho más intuitiva que las operaciones: para que un punto $P = (x, y, z)$ esté en M, su proyección $P' = (x, y, 0)$ sobre el plano horizontal tiene que estar en la circunferencia $\{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = 0\}$, que es la proyección del conjunto M sobre el plano horizontal. Y una vez que ponemos las condiciones para que esto se cumpla, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 1$, la altura sobre el plano horizontal puede variar desde la ecuación del cono, $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, hasta el plano $z = 1$, luego $r \leq z \leq 1$

Aplicando el teorema de cambio de variable, queda

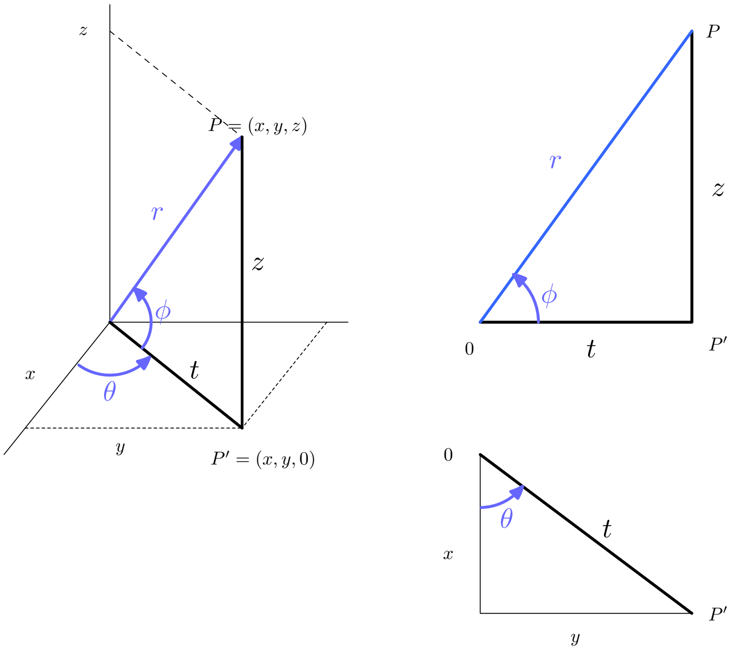
$$
\begin{aligned}
\iiint_K e^z(x^2+y^2)d(x,y,z) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 e^z\, r^2\, r\, dz\, dr\, d\theta = \\
&= 2\pi\int_0^1 r^3\,(e^z)_{z=r}^{z=1}\, dr = \\
&= 2\pi\int_0^1 r^3(e-e^r)dr = \\
&= 2\pi e\left.\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{r=1} - 2\pi\int_r^1 r^3 e^r\, dr
\end{aligned}
$$

La última integral se resuelve calculando la primitiva por integración por partes. El resultado final es

$$\iiint_K e^z(x^2+y^2)d(x,y,z) = \frac{7\pi\, e}{2}$$

□

3. Coordenadas esféricas en el espacio



Cualquier punto del espacio $P = (x, y, z)$ se puede identificar por tres números, uno que representa su distancia al origen de coordenadas, r, y dos ángulos, que representan uno el ángulo que forma el vector $0P$ con el plano horizontal, φ, y otro el ángulo que forma la proyección en el plano horizontal $P' = (x, y, 0)$ con el sentido positivo del eje x, θ. Estos tres números se denominan *coordenadas esféricas del espacio*.

Haciendo un poco de trigonometría, sabiendo las coordenadas esféricas de un punto P es fácil obtener sus coordenadas cartesianas, a partir de los triángulos:

Es claro en el triángulo de arriba que

$$z = r \operatorname{sen} \varphi \quad \text{y} \quad t = r \cos \varphi$$

y sustituyendo en el triángulo a abajo

$$x = t \cos \theta = r \cos \varphi \cos \theta \quad \text{y} \quad y = t \operatorname{sen} \theta = r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta$$

Así

$$\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = r \operatorname{sen} \varphi \end{array} \quad r \in [0, \infty),\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \theta \in [0, 2\pi)$$

Este sistema de referencia es el que utiliza sobre todo en la astronomía, y en la geografía terrestre (longitud y latitud), con la salvedad de que en este último caso todos los puntos están a la misma distancia del origen, situado en el centro de la tierra, con lo que r es constante.

Cabe indicar que este sistema de referencia no es universal: en algunos textos el ángulo φ no se mide desde el plano horizontal, sino desde el eje vertical, el eje z, hacia abajo, con lo que $\phi \in [0, \pi]$ y en las ecuaciones anteriores quedan cambiados el $\operatorname{sen} \varphi$ y el $\cos \varphi$

El cambio de coordenadas viene dado por la función $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi(r, \varphi\theta) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \varphi)$$

Esta función verifica:

1. Φ es de clase C^1 en $U = \mathbb{R}^3$, y

$$d\Phi(r, \varphi\theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \varphi \operatorname{sen} \theta & -r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

2. Para cada punto $P = (x, y, z)$ existe $(r, \varphi, \theta) \in [0, \infty) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi)$ tal que $\Phi(r, \varphi, \theta) = (x, y, z)$

3. En el conjunto $V = (0, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$ Φ es inyectiva.

En efecto, si $\Phi(r,\varphi,\theta)=\Phi(s,\phi,\mu)$, entonces

$$\begin{aligned} r\cos\varphi\cos\theta &= s\cos\phi\cos\mu \\ r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta &= s\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\mu \\ r\,\mathrm{sen}\,\varphi &= s\,\mathrm{sen}\,\phi \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado las tres ecuaciones, y sumándolas, se obtiene

$$\begin{aligned} & r^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + r^2\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi = \\ & \quad = s^2\cos^2\phi\cos^2\mu + s^2\cos^2\phi\,\mathrm{sen}^2\,\mu + s^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} & r^2\cos^2\varphi(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi = \\ & \quad = s^2\cos^2\phi(\cos^2\mu + \mathrm{sen}^2\,\mu) + s^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi \end{aligned}$$

y simplificando queda $r^2=s^2$. Como $r>0$ y $s>0$ en V, tiene que ser $0\neq r=s$

Dividiendo ahora las tres ecuaciones entre $r=s$, tenemos en la tercera ecuación que $\mathrm{sen}\,\varphi=\mathrm{sen}\,\phi$, y como ambos ángulos están en el intervalo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, tiene que ser iguales, $\varphi=\phi$.

Entonces también $\cos\varphi = \cos\phi \neq 0$, y simplificando en las dos primeras ecuaciones, obtenemos que θ y μ, que están entre 0 y 2π, tienen a la vez el mismo seno y el mismo coseno, luego tienen que ser iguales, $\theta = \mu$

4. Por último, el Jacobiano de Φ no se anula nunca en V:

$$J\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\varphi\operatorname{sen}\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

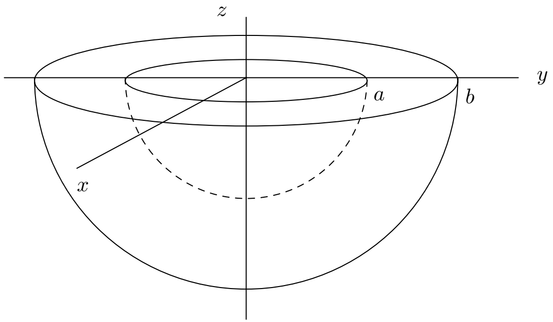
$$= -r^2\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta) - r^2\cos^2\varphi\cos\varphi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta) =$$

$$= -r^2\cos\varphi \neq 0$$

Sea ahora K un conjunto medible Jordan en $\mathbb{R}^3$. Existe un conjunto M medible Jordan, $M \subseteq [0,\infty)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi)$ tal que $K = \Phi(M)$. Además entonces el interior de M está contenido en V, y por tanto la restricción de Φ a M^0 es un difeomorfismo de clase C^1. Para calcular la integral de una función en K podemos aplicar el teorema de Cambio de Variable, y queda

$$\iiint_K f(x,y,z)d(x,y,z) = \iiint_M (f\circ\Phi)(r,\varphi,\theta)\,|J\Phi(r,\varphi,\theta)|\,d(r,\varphi,\theta) =$$
$$= \iiint_M f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\varphi)r^2\cos\varphi\, d(r,\varphi,theta)$$

Ejemplo 3. *Sea* $K = \{(x,y,z):\ a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2,\ z\le 0\}$*, donde* $0<a<b$ *son constantes, y sea* $f(x,y,z) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$*. Calcular la integral de* f *en* K



La simetría del conjunto respecto al origen de coordenadas sugiere hacer el cambio a coordenadas esféricas: poniendo

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad r\in[0,\infty),\ \varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ \theta\in[0,2\pi) \\ z &= r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{aligned}$$

y sustituyendo en las ecuaciones que definen K, obtenemos $a \le r \le b$ y $r\,\mathrm{sen}\,\varphi \le 0$. Para que esta última condición se cumpla, tiene que ser $\mathrm{sen}\,\varphi \le 0$, luego $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Sobre el ángulo θ no se obtiene ninguna restricción, así que $\theta \in [0, 2\pi)$

La integral queda entonces

$$\iiint_K \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_a^b \frac{\lambda}{r}r^2\cos\varphi\, dr d\varphi d\theta = \pi\lambda(b^2-a^2)$$

$\square$

4. Otros cambios de variable

Vamos a ver algunos ejemplos más de cambios de variables, a partir de algunos ejemplos:

Ejemplo 4. *Calcular*

$$\int_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}}\, d(x,y)$$

donde A *es el interior de la elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Ejemplo 5. *Calcular*

$$\int_A (x^2 + y^2)\, d(x,y)$$

si

$$A = \{(x,y) : \ 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9;\ 2 \leq xy \leq 4;\ x \geq 0;\ y \geq 0\}$$