1.1. Utilizando la definición mediante sumas superiores e inferiores, calcular las siguientes integrales:

a) $\int_a^b x dx$	b) b) $\int_a^b x^2 dx$	c) $\int_0^b e^x dx$	d) $\int_1^b \frac{1}{x} dx$

1.2. 1. Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Demostrar que f es integrable, utilizando el teorema de Riemann.

2. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona.

   Demostrar que f es integrable en $[a, b]$ (sug: comprobar el Criterio de Riemann, considerando particiones de $[a, b]$ en segmentos iguales)

3. Dar un ejemplo de una función no decreciente en $[0, 1]$ que sea discontinua en un número infinito de puntos.

1.3. Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Demostrar las propiedades de las sumas superior e inferior de Riemann:

1. Para toda partición P de A,

   $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P)$

2. Si P y Q son dos particiones con $P \leq Q$, entonces

   $\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q)$ y $\overline{S}(f, P) \geq \overline{S}(f, Q)$

   es decir, cuanto más fina es la partición, la suma inferior es mayor y la superior es menor.

3. Para toda partición P de A,

   $m_A(f)v(A) \leq \underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P) \leq M_A(f)v(A)$

4. Si P y Q son dos particiones cualesquiera de A,

   $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q)$

1.4. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable Riemann; utilizando las propiedades elementales de la integral,
a) probar que la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$.
b) probar que si $x_0 \in (a, b)$ y f es continua en x_0, entonces $F(x)$ es derivable en x_0, y $F'(x_0) = f(x_0)$

1.5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y acotado, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable, con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$. Supongamos que $\int_A f = 0$, y sea $x_0 \in A$ tal que f es continua en x_0. Demostrar que $f(x_0) = 0$.

1.6. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in \mathbb{Q} \\ 1 - t & \text{si} \quad t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Calcular $\underline{\int_0^1} f$ y $\overline{\int_0^1} f$

b) Deducir que en general dadas dos funciones acotadas en un intervalo,

$$\underline{\int_a^b} (f+g) \neq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$$

y

$$\overline{\int_a^b} (f+g) \neq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$$

1.7. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable. Demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe una función continua g en $[a,b]$ con $g \leq f$ y $\displaystyle\int_a^b f - \int_a^b g < \epsilon$

1.8. a) Sea $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ (irreducible)} \end{cases}$
Probar que g es integrable – Riemann en $[0,1]$.

b) Sea $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, y = \frac{p}{q} \text{ (irreducible)} \end{cases}$
Probar que f es integrable en $[0,1] \times [0,1]$ y calcular su integral.

1.9. Hallar dos funciones f y g que sean integrables, pero cuya composición no lo sea.

1.10. a) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que toda suma superior es igual a toda suma inferior?
b) ¿Qué funciones tienen la propiedad de que alguna suma superior es igual a alguna suma inferior?
c) ¿Qué funciones continuas tienen la propiedad de que todas las sumas inferiores son iguales?
d) ¿Qué funciones integrables tienen la propiedad de que todas las sumas inferiores son iguales? (Observar el problema 1.8)