3.1. Sea C la región encerrada en la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, sea D el semicírculo derecho, y A el semicírculo inferior. Decidir, sin calcular ninguna integral, cuáles son positivas, negativas o cero.

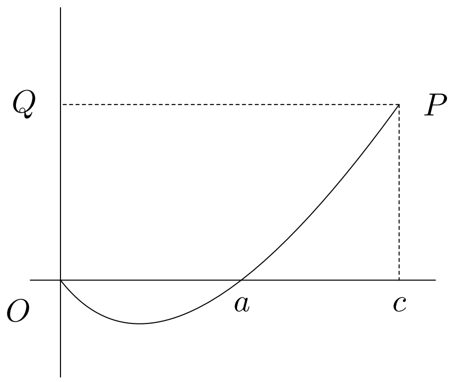
1. $\int_C d(x,y)$
2. $\int_A d(x,y)$
3. $\int_D 5x d(x,y)$
4. $\int_C 5x d(x,y)$
5. $\int_A 5x d(x,y)$
6. $\int_C (y^3+y^5) d(x,y)$
7. $\int_A (y^3+y^5) d(x,y)$
8. $\int_D (y^3+y^5) d(x,y)$
9. $\int_A (y-y^3) d(x,y)$
10. $\int_C (y-y^3) d(x,y)$
11. $\int_C \operatorname{sen} y\, d(x,y)$
12. $\int_C \cos y\, d(x,y)$
13. $\int_C e^x d(x,y)$
14. $\int_C x e^x d(x,y)$
15. $\int_C x y^2 d(x,y)$
16. $\int_A x \cos y\, d(x,y)$

3.2. Dada una función continua, en cada uno de los casos siguientes expresar la integral como integral doble (dibujando el conjunto de integración), y como integral iterada en el orden contrario:

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{\operatorname{arc\,sen} x} f(x,y)\, dydx$
2. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \int_{e^{-2y}}^{e^y} f(x,y)\, dxdy$
3. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{4-x} f(x,y)\, dydx$
4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\, dydx$
5. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{\operatorname{arc\,sen} y}^{\operatorname{arc\,cos} y} f(x,y)\, dxdy$
6. $\displaystyle\int_{1/e}^1 \int_{-\ln y}^{\sqrt{-\ln y}} f(x,y)\, dxdy$
7. $\displaystyle\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\, dydx$
8. $\displaystyle\int_4^5 \int_{12x}^{3x^2} f(x,y)\, dydx$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\cos x} f(x,y)\, dydx$
10. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_{\operatorname{sen} x}^{3\operatorname{sen} x} f(x,y)\, dydx$

3.3. Calcular el volumen de los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que se indican:
a) Sólido comprendido entre el paraboloide $2z = x^2+y^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$.
b) Cuerpo limitado por el cono $2(x^2+y^2)=z^2$ y el hiperboloide $x^2+y^2+1=z^2$.

3.4. Se considera la función $y = x(x-a)$ definida en un intervalo $[0,c]$ donde $0<a<c$.



a) Hallar el valor de c (en función de a), para que el volumen del cuerpo de revolución generado por el recinto limitado por la gráfica de $y(x)$ y los segmentos PQ y QO, al girar alrededor del eje vertical, sea igual al volumen del cono invertido generado al girar el triángulo $0cP$ alrededor del eje vertical.

b) Hallar el valor de c (en función de a), para que el volumen del cuerpo de revolución generado por el recinto limitado por la gráfica de la función $y(x)$, el segmento Oc y el segmento cP al girar alrededor del eje horizontal sea igual al volumen del cono generado al girar el triángulo OcP alrededor del eje horizontal.

3.5. a) Hallar el área encerrada por la curva $r = \operatorname{sen} 3\theta$ en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$
b) Hallar el área de $A \cap B$, siendo A el recinto limitado por la curva $\rho = 3\cos\theta$ y B el recinto limitado por la curva $\rho = 1 + \cos\theta$.

3.6. Calcular las siguientes integrales dobles:

$$(a) \int_0^1 \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(4+x^2+y^2)^2}\, dy\, dx \qquad (b) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

$$(c) \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, dy\, dx \qquad (d) \int_0^1 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} y(4+x)^{-2}\, dx\, dy$$

3.7. Sea S el recinto limitado por las parábolas $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$. Hallar la imagen de S por la transformación $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$. Calcular el área de S.

3.8. Calcular las siguientes integrales dobles en los conjuntos que se indican:

1. $\displaystyle\iint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, d(x,y)$, $\quad A$ el interior de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

2. $\displaystyle\iint_A (x^2+y^2)\, d(x,y)$, $\quad A = \{(x,y) : 1 \le x^2 - y^2 \le 9,\ 2 \le xy \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

3. $\displaystyle\iint_A x\, d(x,y)$, $\quad A$ el recinto limitado por la curva $\rho = 1 + \cos\theta$

3.9. Calcular el volumen de los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que se indican:
a) Interior del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a, b, c > 0)$.
b) Sólido limitado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2 + 1$, el plano $x + y = 1$ y los planos coordenados.
c) Cuerpo comprendido entre $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$ $(a > 0)$.
d) Cuerpo limitado por las superficies $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm a$ $(a > 0)$.

3.10. a) Expresar mediante el cálculo de integrales una fórmula para calcular el volumen de la unión de los dos conjuntos $A = \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2\}$ y $B = \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 1\}$
b) Expresar una integral para calcular el volumen que queda de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ al quitarle la parte que está en $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$
c) Escribir las integrales necesarias para calcular el centro de gravedad de un muñeco de nieve formado por una paraboloide $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ y una esfera de centro $(0, 0, 5)$ y radio 1