4.1. Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\iiint_A (x+y)\, d(x,y,z), \quad A = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1,\, x^2+y^2+z^2 \le 2z\}$

2. $\displaystyle\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z), \quad A = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\}$

3. $\displaystyle\iiint_A z\, d(x,y,z), \quad A = \{(x,y,z) : 3z^2 \le x^2+y^2 \le z^2+1,\, z \ge 0\}$

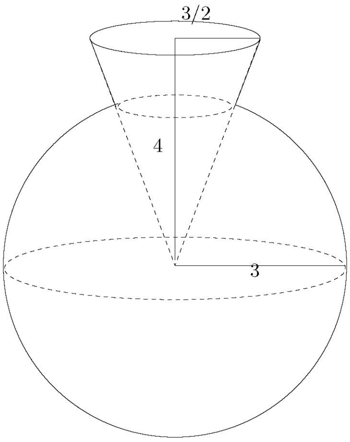
4. $\displaystyle\iiint_A (x+y+z)^2\, d(x,y,z),$ A es la parte común de los conjuntos
$2z \ge x^2+y^2$ y $x^2+y^2+z^2 \le 3$

5. $\displaystyle\iiint_A z\, d(x,y,z),$ A es el recinto limitado por $z^2 = x^2+y^2,\ z=0,$ y $z=1$

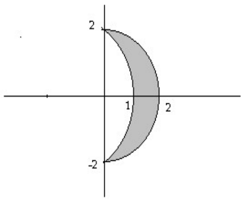
6. $\displaystyle\iiint_A zy\sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y,z), \quad A = \{(x,y,z) : 0 \le z \le x^2+y^2,\, 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}\}$

7. $\displaystyle\iiint_A z\exp(-(x^2+y^2))\, d(x,y,z),$ A es el recinto limitado por
$2(x^2+y^2) = z^2,\, z \ge 0,$ y $x^2+y^2 = z^2-1$

4.2. Escribir las integrales necesarias para calcular el volumen del cuerpo representado en la figura



4.3. Una media luna está formada por dos arcos de circunferencia, como se indica en el dibujo.
a) Hallar el área de la media luna
b) Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar la media luna alrededor del eje horizontal. (sug: puede colocarse la figura en otra posición más cómoda)



4.4. a) Sobre una plataforma en forma de cardioide (ecuación en coordenadas polares: $r(t) = a(1 + \operatorname{sen} t)$, $(a > 0)$) se construye una cubierta apoyando una recta desde cada punto del borde de la plataforma hasta el punto $(0, 0, 1)$. Calcular el volumen encerrado.
b) Considérese la curva $x^2 + y^2 = 2y;\ z = 0$. Para cada punto P en ella se construye un triángulo rectángulo isósceles, de forma que uno de los catetos es la cuerda que une P y el origen de coordenadas, y el otro es paralelo al eje z, en el punto P. Hallar el volumen encerrado en el cuerpo formado por esos triángulos.
c) Considérese la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ay;\ z = 0;\ (a > 0)$. Por cada punto P de la circunferencia se construye un triángulo rectángulo isósceles, de modo que uno de los catetos es la cuerda que une P con el origen de coordenadas, y el otro está situado sobre el eje z positivo. Hallar el volumen encerrado.
d) Considérese la elipse $\begin{cases} x^2 + 4y^2 & = 1 \\ z & = 0 \end{cases}$ Sobre cada plano Π perpendicular al eje mayor se construye un cuadrado, contenido en el semiespacio $z \geq 0$, de manera que uno de sus lados es la cuerda intersección de la elipse y el plano. Calcular el volumen encerrado.

4.5. Sea M el conjunto definido como la parte de la esfera de centro $(0, 0, a)$ y radio a $(a > 0)$ contenida en el paraboloide $z \geq x^2 + y^2$
Calcular el volumen de M (distinguir los casos $a \geq 1/2$ y $a < 1/2$)

4.6. Se considera la función $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $H(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv) = (x, y)$.
a) Dado el rectángulo R de vértices $A = (1, 1),\ B = (2, 1),\ C = (2, 3)$ y $D = (1, 3)$, determinar su imagen por H, $H(R) = M$, y dibujarla en el plano cartesiano.
b) Hallar el centro de gravedad de M.

4.7. Sea D la región del plano limitada por las curvas

$$x + y = 2;\ x + y = 4;\ x - y = 0;\ x^2 - y^2 = 4$$

a) Hallar la imagen de D por la transformación $H(x, y) = (x + y, x - y) = (u, v)$. Hallar la transformación inversa.
b) Calcular el centro de gravedad de D

4.8. a) Hallar el centro de gravedad del cuerpo que queda al quitar a una esfera de radio R otra esfera de radio r $(r < R)$ tangente e interior a ella.
b) Calcular la masa del sólido limitado por un cilindro circular recto de radio R y altura h, si la densidad en cada punto es igual al cuadrado de la distancia entre el punto y el centro de la base del cilindro .
b) Hallar el valor medio de la suma de los cuadrados de tres números, $x,\ y$, y z, cada uno de los cuales está entre 0 y 2.
c)Demostrar que para un triángulo rectángulo, la media de las distancias de un punto cualquiera a uno de los catetos es un tercio de la longitud del otro cateto.