5.1. Estudiar si los siguientes conjuntos son medibles–Lebesgue:
a) $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 < e^{-x^2-y^2}\} \subset \mathbb{R}^2$ b) $\{(x,y) : x^2 - y^2 + x + y - 1 \notin \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$

5.2. Sean A y B dos conjuntos tales que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ tenga medida cero (se diferencian en un conjunto de medida cero). Demostrar que A es medible - Lebesgue si y sólo si B lo es.

5.3. Decidir si alguna de las siguientes funciones es medible–Lebesgue:
a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ x & \text{si} \quad (x,y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \end{cases}$
c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in E \\ \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \notin E \end{cases}$ donde E es un conjunto no medible–Lebesgue

5.4. En cada uno de los casos siguientes, dibujar aproximadamente las funciones f_n y calcular $\lim_n f_n(x) = f(x)$

I

$$f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

II

$$f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^n & \text{si} & 0 \leq x \leq 1 \\ x^{-n} & \text{si} & x > 1 \end{array} \right\}$$

III

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{n^4 - n^3 + 1}{(x+1)^n} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$$

IV

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n^{\ln(n)} \chi_{[n,n+1]}(x)$$

V

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n) \chi_{[n,\infty)}(x)$$

VI

$$f_n : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \operatorname{sen}^{2n+1}(x)$$

VII

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

5.5. Demostrar el siguiente criterio de comparación para la integral de Lebesgue:
Sean f y g dos funciones medibles y no negativas en $[a,\infty)$, integrables en cada sub-intervalo acotado $[b,c]$, $a \leq b < c < \infty$, y supongamos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

a) Si $L \neq 0$, entonces f es integrable en $[a,\infty)$ si y sólo si g lo es.
b) Si $L = 0$, entonces si g es integrable en $[a,\infty)$, f también lo es, y si f no es integrable, g tampoco.

5.6. Estudiar las siguientes integrales, calculando su valor cuando sea posible.

1. $\int_0^1 x^p dx$	4. $\int_0^1 x \log x \, dx$	7. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$	10. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$
2. $\int_1^{\infty} x^p dx$	5. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$	8. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	11. $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x} dx$
3. $\int_0^{\infty} \exp(px) dx$	6. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^4}}$	9. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$	12. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x \log x}$

5.7. En los siguientes casos, estudiar si f es integrable en E; y cuando lo sea, hallar $\int_E f$:

a)$f(x,y) = (1+x^2+y^2)^{-1};\ E = \mathbb{R}^2$ b) $f(x,y) = \exp(-y^2);\ E = \{(x,y) : x \le y\}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2};\ E = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1;\ x > 0;\ y > 0\}$

d) $f(x,y) = \dfrac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2};\ E = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$

e) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)\ln^2(x+y)};\ E = \{(x,y) : 0 < y < 1;\ 1 < x+y\}$

f) $f(x,y) = xe^{-y}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y^2};\ E = \mathbb{R}^2$

5.8. En los siguientes casos, calcular $\int_E f$, comprobando que f es integrable en E:

a) $E = \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1\};\ \ f(x,y) = \ln\left((x^2+y^2)^{1/2}\right)$

b) $E = [0,1] \times [0,1];\ \ f(x,y) = \begin{cases} (1-x-y)^{-1/3} & \text{si } x+y \ne 1 \\ 0 & \text{si } x+y = 1 \end{cases}$

c) $E = \mathbb{R}^2;\ \ f(x,y) = \exp(-(x^2+y^2))$

c) $E = (0,1) \times (0,1);\ \ f(x,y) = \dfrac{-x^2}{\sqrt{y}}$