7.1. a) Parametrizar la curva

$$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + y^2$$

y dibujarla aproximadamente
b) Dibujar aproximadamente las curvas

1. $\alpha(t) = (0, \cos(\pi t)),\ t \in [-1, 1/3]$
2. $\alpha(t) = (t^2, -t),\ t \in [0, 3]$
3. $\alpha(t) = (2\cos(t), -\operatorname{sen}(t)),\ t \in [0, \pi/2]$
4. $\alpha(t) = (e^t, 4e^{2t}),\ t \in [-1, 1]$

c) Hallar una parametrización del polígono de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(4,4)$, y $(4,2)$

7.2. Calcular la longitud de los siguientes arcos de curva:

1. $\gamma(t) = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$
2. $\rho = \theta^2$, $\theta \in [0, 2\pi]$
3. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$
4. $C = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

7.3. En los siguientes casos, calcular $\int_C f$, siendo $C = \gamma[a, b]$:

a) $f(x, y, z) = x + y + yz \qquad \gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, 1),\ 0 \le t \le 2\pi$
b) $f(x, y, z) = x \cos z \qquad \gamma(t) = (t, t^2, 0),\ 0 \le t \le 1$

En los siguientes casos, calcular $\int_{C^+} F$, siendo $C^+ = \gamma[a, b]$:

a) $F(x, y) = (y^2, x^2), \qquad \gamma(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t), \quad 0 \le t \le \pi$
b) $F(x, y) = (x, y, z), \qquad \gamma(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, t), \quad 0 \le t \le 4$

7.4. a) Calcular $\displaystyle\int_C \sqrt{2y^2 + z^2}$, donde C es la circunferencia $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x = y \end{cases}$
b) Calcular $\displaystyle\int_{C^+} 2xydx + (x^2 - y^2)dy$, ; C^+ la curva definida por la ecuación $r = 1 + \cos\theta$ orientada en sentido positivo.
c) Calcular $\displaystyle\int_{C^+} yzdx + xzdy + xydz$, C^+ la poligonal que une $(1,0,0)$ con $(0,1,0)$ y con $(0,0,1)$

7.5. Parametrizar la curva C intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 - ax = 0$ con $x \ge 0$, $y \ge 0$ y $z \ge 0$, y expresar una integral para calcular $\displaystyle\int_{C^+} z$, donde C^+ se orienta de modo que el punto inicial esté en el eje z (no se pide calcular la integral)

7.6. Utilizar el teorema de Green para calcular $\displaystyle\int_{C^+} y^2dx + xdy$ con C^+ orientada positivamente, en los siguientes casos: a) C es el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$. b) C es la circunferencia de radio 2 centrada en el origen.

7.7. a) Calcular el área limitada por la curva $\gamma(t) = (a\cos^3 t, a\operatorname{sen}^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $(a > 0, cte.)$
b) Calcular el área limitada por un arco del cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta), \ 0 \le \theta \le 2\pi, \ (a > 0,\ cte.)$, y el eje x

7.8. a) Sea C^+ el segmento que los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Demostrar que

$$\frac{1}{2}\int_{C^+} -ydx + xdy = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

b) Sean $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ los vértices de un polígono convexo, recorridos en sentido anti-horario. Demostrar que el área encerrada por el polígono es

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)$$

siendo $x_{n+1} = x_1$ e $y_{n+1} = y_1$

7.9. Hallar una función potencial f (e.d. tal que $\nabla f = F$) para los campos:
a) $F(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$ b) $F(x, y) = (\operatorname{sen} 2x \cos^2 y, -\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2y)$
c) $F(x, y) = (4x\cos^2(y/2), -x^2 \operatorname{sen} y)$ d) $F(x, y, z) = (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz})$

7.10. Sea C^+ la curva parametrizada por la función $\alpha(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{-t}{1+t^4}, \frac{t}{1+t^6}\right)$, con $t \in [0, 1]$. Calcular la integral

$$\int_{C^+} y^2z^3dx + (2xyz^3 + z^2)dy + (3xy^2z^2 + 2yz + 1)dz$$

7.11. Se considera el campo

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

Comprobar que:
a) integral a lo largo de cualquier circunferencia que no rodee al origen de coordenadas vale cero.
b) la integral a lo largo de cualquier circunferencia centrada en el origen de coordenadas, orientada en sentido negativo, vale 2π.
c) la integral a lo largo de cualquier circunferencia que pase por el origen vale π
(sug: utilizar el teorema de Green cuando sea posible, justificándolo; parametrizar en cada caso la circunferencia de forma adecuada.)

7.12. Dado un campo vectorial $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ en $\mathbb{R}^2$, de la forma

$$f_1(x, y) = [xf(x) + g(x)]y^2 + 3x^2y \qquad f_2(x, y) = yf(x) + g(x)$$

donde f y g son funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}$
a) ¿qué ecuaciones deben cumplir f y g para que $\int_C F(x, y)$ sea 0 a lo largo de cualquier curva cerrada?
b) suponiendo que f es un polinomio de segundo grado, y que $g(0) = 0$, determinar f y g.
c) encontrar una función potencial del campo F.