OpenCourseWare

Cálculo integral

para primer curso de los Grados en Matemáticas y en Física

José Manuel Bayod
Universidad de Cantabria

Enero 2017

Índice

El acordeón de Schwarz 5

Prólogo 9

Integrales de una variable e integrales sobre curvas 15
1.1 Integral de Riemann para funciones de una variable real . . . 17
1.1.1 Introducción 17
1.1.2 Teorema fundamental del cálculo 20
1.1.3 Cálculo de primitivas 22
1.2 Integrales sobre caminos 23
1.2.1 Integral de un campo escalar sobre un camino 23
1.2.2 Integral de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria 30
1.2.3 Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados 33
1.2.4 Teorema fundamental del Cálculo generalizado 33
1.2.5 Cambios de parámetro 34
1.2.6 Efectos de los cambios de parámetros en el valor de las integrales 37
1.3 Integrales sobre curvas 40
1.4 Campos conservativos 44

Integrales de dos variables 53
2.1 Introducción 55
2.2 Integración de funciones definidas sobre rectángulos 58
2.2.1 Definiciones 58
2.2.2 Integrabilidad 60
2.2.3 Propiedades elementales 66
2.2.4 Integrales reiteradas 67
2.3 Funciones definidas sobre otros conjuntos acotados 71
2.3.1 Introducción 71
2.3.2 Regiones bidimensionales simples 73
2.3.3 Área de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ 77
2.3.4 Otras propiedades 79
2.4 Cambios de variable 83
2.4.1 Fórmula del cambio de variable 83
2.4.2 Coordenadas polares 88
2.5 Teorema de Green-Riemann 91
2.5.1 Fórmula de Green-Riemann para rectángulos 92
2.5.2 Fórmula de Green-Riemann para regiones simples en las dos direcciones 93
2.5.3 Fórmula de Green-Riemann para regiones más generales 95
2.5.4 Otras formulaciones del teorema de Green-Riemann 98
2.5.5 Aplicaciones del teorema de Green-Riemann 101
2.6 Integrales impropias 104
2.6.1 Condición suficiente 104
2.6.2 Aplicaciones 107

Integrales sobre superficies 111
3.1 Superficies en $\mathbb{R}^3$ definidas en forma paramétrica 113
3.1.1 Introducción 113
3.1.2 Ejemplos previos a la definición 116

3.1.3 Definición formal de superficie . . . 122
3.2 Integral de un campo escalar sobre una superficie . . . 125
3.3 Integral de un campo vectorial sobre una superficie orientada . 131
3.3.1 Integral de un campo vectorial sobre una parametrización . . . 131
3.3.2 Orientación de superficies definidas en forma explícita . . . 132
3.3.3 Orientación de superficies generales . . . 133
3.3.4 Integral de un campo vectorial sobre una superficie orientada . . . 139
3.4 Teorema de Stokes (clásico) . . . 143
3.4.1 Fórmula de Stokes para superficies definidas explícitamente . . . 143
3.4.2 Fórmula de Stokes para superficies más generales . . . 145
3.4.3 Aplicaciones del teorema de Stokes . . . 147

Integrales de tres variables . . . 149
4.1 Introducción . . . 151
4.2 Integrabilidad, teorema de Fubini y regiones tridimensionales simples . . . 152
4.3 Ejemplos . . . 155
4.4 Coordenadas esféricas . . . 163
4.5 Coordenadas cilíndricas . . . 165
4.6 Teorema de la Divergencia . . . 167
4.6.1 Fórmula de la Divergencia . . . 167
4.6.2 Aplicaciones del teorema de la divergencia . . . 170

Epílogo . . . 175
I. Definiciones alternativas de la integral de Riemann . . . 177
II. Otras integrales diferentes de la de Riemann . . . 178

Anexos . . . 181
A Anexo A: Axiomas de $\mathbb{R}$ . . . 183
B Anexo B: Funciones elementales (grupo de axiomas n° 13) . . . 187
C Anexo C: Infinitésimos. . . . 193
D Anexo D: Funciones elementales (continuidad y derivabilidad) . 197
E Anexo E: Otras dimensiones. Integración de formas diferenciales sobre cadenas . . . 201
F Anexo F: Aplicaciones de las integrales de campos escalares sobre superficies . . . 211
G Anexo G: Más aplicaciones del teorema de Stokes . . . 219
H Anexo H: Más aplicaciones del teorema de la Divergencia . . . 223
I Anexo I: Demostración del teorema de Green-Riemann (teorema 2.39) . . . 225
J Anexo J: Demostraciones topológicas . . . 231
K Anexo K: Algunas demostraciones adicionales . . . 235
L Anexo L: Integrales y simetría . . . 251
M Anexo M: Tabla de antiderivadas . . . 255

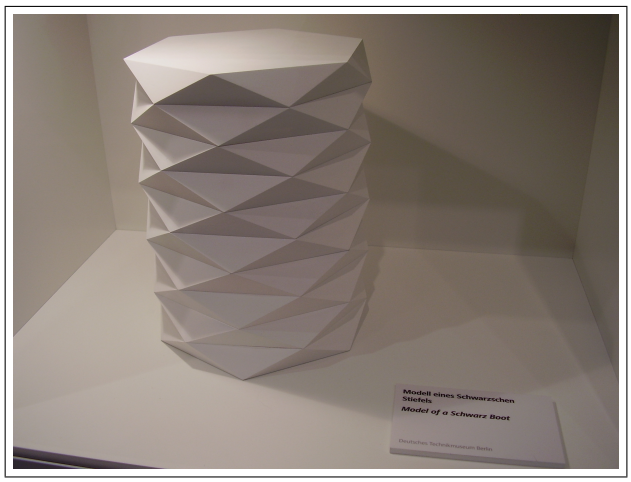
Referencias . . . 261

El acordeón de Schwarz

Tenemos la percepción intuitiva de que una medida aproximada de la longitud de una curva puede obtenerse sustituyéndola por tramos rectos cada vez más cortos. Y de que obtendremos una medida aproximada del área de una superficie curva si la sustituimos por pequeñas caras planas triangulares que se separen cada vez menos de la superficie. Ambas cosas son ciertas, pero sólo bajo ciertas condiciones.

Los fractales nos han enseñado que algunas "curvas" muy frecuentes en la Naturaleza, como las líneas de costa, crean serios problemas cuando se quiere aplicar este principio de aproximación a ciertos modelos teóricos de esas curvas. No obstante, para figuras sencillas, como una circunferencia, la intuición es correcta.

La solución no es tan simple en el caso de la triangulación de superficies. Desde finales del siglo XIX sabemos que, ni siquiera para la superficie de un cilindro, la mera proximidad entre los vértices de los triángulos que se aproximan al cilindro garantiza que la suma de las áreas de esos triángulos se acerque al área del cilindro. Para demostrarlo, en 1881 Hermann Schwarz propuso el siguiente contraejemplo, que se conoce con el nombre de "acordeón de Schwarz". El Museo de la Tecnología de Berlín expone una recreación artística del acordeón de Schwarz, lo que da idea de su importancia histórica (la foto que acompaña a este texto procede de wikipedia).



Sobre la superficie de un cilindro de radio R y altura h vamos a elegir una colección de puntos que luego uniremos con segmentos y formarán triángulos que serán las caras de un poliedro "inscrito" en el cilindro (en el sentido de que todos sus vértices están en la superficie cilíndrica) que en este caso quedará situado en la parte de dentro del cilindro. Lo hacemos de la siguiente manera.

Dividimos transversalmente el cilindro con $n+1$ circunferencias, todas a la misma distancia h/n entre sí, entre las que están las dos circunferencias que constituyen el borde del cilindro. Sobre cada circunferencia marcamos m puntos equidistantes (con ángulos $2\pi/m$), de modo que los de dos circunferencias consecutivas están "girados" entre sí un ángulo de valor π/m. Por último, construimos los triángulos uniendo cada punto con sus seis vecinos: dos en su misma circunferencia y dos en cada una de las dos circunferencias más próximas (figura 0.1).

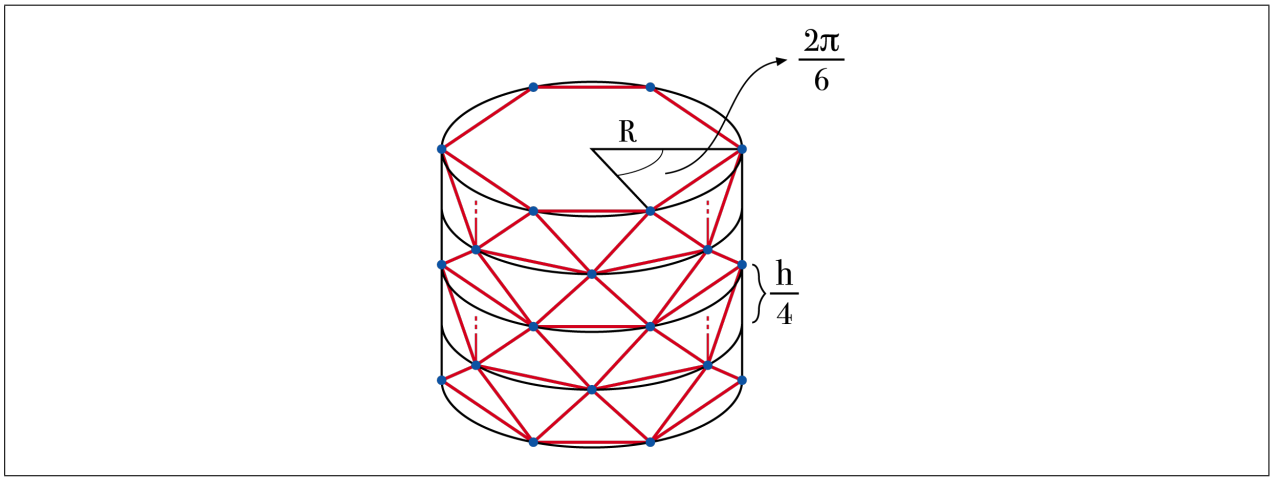


Figura 0.1: Poliedro que aproxima a un cilindro, tomando $n=4$ y $m=6$. Los únicos puntos de contacto son los azules

El poliedro consta entonces de $2mn$ triángulos isósceles iguales, de base $2R\sin\frac{\pi}{m}$ (figura 0.2) y de altura $\left[\frac{h^2}{n^2}+R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (figura 0.3), por lo que el área del poliedro formado por todos los triángulos es

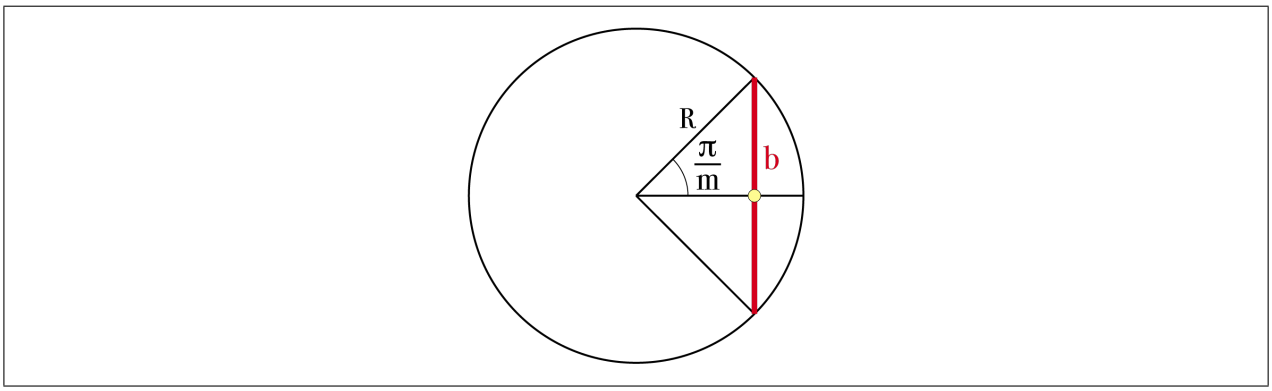


Figura 0.2: Cálculo de la base b de uno cualquiera de los triángulos (vista desde arriba)

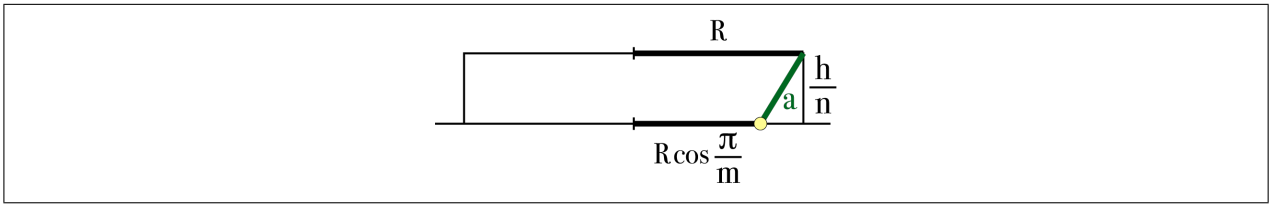


Figura 0.3: Cálculo de la altura a de uno cualquiera de los triángulos (vista de una sección perpendicular a la generatriz). Las marcas amarillas de esta figura y de la anterior señalan el mismo punto

$$2Rm\sin\frac{\pi}{m}\left[h^2+n^2R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

El factor $2Rm\sin\frac{\pi}{m}$ tiende a $2\pi R$ cuando m tiene a infinito, por lo que el comportamiento del límite doble (en n y m) de la expresión anterior viene fijado por el de $n\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)$, que a su vez depende de la relación entre n y m, como comprobamos a continuación:

- Si $m=n$, entonces aplicando la regla de l'Hôspital demostramos que $n\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)$ tiende a cero,

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(1-\cos\frac{\pi}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{t^2}\sin\frac{\pi}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=\pi\lim_{t\to+\infty}\sin\frac{\pi}{t}=0.$$

  Así que el área del poliedro tiende a $2\pi Rh$ (que sería el resultado esperado).

- Pero si, por ejemplo, $n=m^2$, entonces aplicamos dos veces la regla de L'Hôspital para ver que $n\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)$ tiende a $\pi^2/2$ ([1]),

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\left(1-\cos\frac{\pi}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{t}}{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{t^2}\sin\frac{\pi}{t}}{-\frac{2}{t^3}}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{t}}{\frac{1}{t}}=$$
$$=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to+\infty}\pi\cos\frac{\pi}{t}=\frac{\pi^2}{2}\lim_{t\to+\infty}\cos\frac{\pi}{t}=\frac{\pi^2}{2}.$$

  El área del poliedro tiende al inesperado valor de $\pi R\sqrt{R^2\pi^4+4h^2}$.

---

[1] Se puede obtener el mismo resultado utilizando desarrollos en serie.

Y también utilizando las propiedades de los números hiperreales (ver el anexo C). En efecto: De acuerdo con la caracterización de la convergencia de sucesiones de la sección (C.3), bastará con demostrar que para cualquier hipernatural infinito $H\in{}^*\mathbb{N}$, se cumple que $H^2(1-\cos(\pi/H))\approx\pi^2/2$. Sabemos (ver el corolario D.5) que $\cos'=-\sin$ y que $\cos''=-\cos$. Entonces, aplicando la fórmula de Taylor de grado 1 para la función coseno en el origen al infinitésimo π/H (cuya validez viene garantizada por el principio de transferencia, ver la sección (C.2)), existe un número $\varepsilon\in(0,\pi/H)$, y por tanto también infinitesimal, para el que que

$$\cos\frac{\pi}{H}=1-\frac{\cos\varepsilon}{2}\left(\frac{\pi}{H}\right)^2.$$

Operando,

$$1-\cos\frac{\pi}{H}=\frac{\pi^2}{H^2}\frac{\cos\varepsilon}{2}\quad\Rightarrow\quad H^2\left(1-\cos\frac{\pi}{H}\right)=\frac{\pi^2}{2}\cos\varepsilon\approx\frac{\pi^2}{2}\cos 0=\frac{\pi^2}{2}.$$

- Y si $n = m^m$ (y lo mismo para otros muchos valores de n), entonces $n\left(1 - \cos\frac{\pi}{m}\right)$ tiende a infinito (demostrarlo), y el área del poliedro también.

Para complicar más las cosas: puede demostrarse que el límite de las áreas de una sucesión de poliedros inscritos en el cilindro es siempre mayor o igual que $2\pi Rh$. Pero también puede demostrarse el sorprendente resultado de que *para cualquier número mayor que* $2\pi Rh$ siempre se puede elegir una sucesión de poliedros inscritos en el cilindro cuyas áreas converjan a ese número.

En este curso nos ocuparemos de analizar bajo qué condiciones y con qué fórmulas podemos aproximar longitudes, áreas y volúmenes.

1. Las herramientas teóricas que construiremos para ello serán utilizables también en la definición y en el cálculo de otras magnitudes más abstractas, que no son geométricas y que surgen en otros campos de aplicación del Cálculo Integral.

Prólogo

Contexto

El curso *Cálculo Integral* es una asignatura de 6 créditos (ECTS) que se imparte a estudiantes del segundo semestre del primer curso de los grados universitarios en Física y en Matemáticas de la Universidad de Cantabria. Parte, por consiguiente, de la suposición de que quien sigue el curso ha superado con éxito la educación preuniversitaria en la rama de Ciencias y ha cursado también un primer semestre de *Cálculo Diferencial*, en el que se han tratado las cuestiones elementales relativas a números reales, convergencia de sucesiones, continuidad y derivación de funciones (de una o de varias variables).

En el contexto de los citados planes de estudios de Grado en Física y de Grado en Matemáticas, la asignatura *Cálculo Integral* sirve como una introducción a los principales tipos de integrales que aparecen en las aplicaciones clásicas del Cálculo Infinitesimal, de una, dos o tres variables reales, incluyendo las integrales de línea y las de superficie. Despojada de su contexto local, la asignatura bien podría denominarse ***Primer curso de cálculo integral***.

Objetivos mínimos

Pretendemos que el estudiante que supere este curso alcance, al menos, los siguientes resultados del aprendizaje:

- Comprenda el concepto intuitivo de integral de 1, 2 o 3 variables y de las integrales sobre curvas o sobre superficies.
- Conozca una definición formal de cada una de ellas, y sepa para qué se utilizan en las aplicaciones.
- Conozca sus propiedades básicas y la manera de utilizarlas.
- Sepa la forma de calcularlas para funciones sencillas, usando, si es conveniente, un programa de cálculo simbólico.
- Sepa utilizarlas para modelizar problemas de otras disciplinas.
- Comprenda justificaciones de todos los cálculos, así como de todas las propiedades que utilice.
- Conozca los principales resultados, incluyendo las relaciones que existen entre las diferentes integrales (teoremas clásicos del cálculo vectorial).
- De algunos resultados, los menos, conocerá también una demostración, y de todos conocerá alguna justificación.
- Distinga con claridad entre demostraciones y justificaciones, apreciando el valor de ambas categorías.

Qué quiere ser —y qué no pretende ser— este OCW

(1) Resulta difícil ser muy original en un curso elemental de Cálculo Integral. Hay multitud de libros clásicos donde se tratan los temas de este curso y de los cuales hemos tomado ideas. Sin embargo, hay una obsesión que nos ha llevado a escribirlo, que es la de construir una teoría que sea a la vez *elemental* y *directamente aplicable* a todos los problemas que se espera que sepa resolver quien supere el curso, *sin comprometer el rigor matemático*.

Desarrollamos más esta observación en el apartado siguiente, relativo a la coherencia entre la teoría y las aplicaciones.

(2) El curso no está concebido como un apoyo al profesor, sino como una ayuda para el aprendizaje, con frecuentes comentarios explicativos que están fuera del discurso formal. Quiere parecerse a unos (buenos) apuntes, con explicaciones que unas veces descienden a los detalles y otras veces se mantienen en el nivel de las ideas directrices —como seguramente ocurre en las clases de todo buen profesor.

Pondremos una señal de curva peligrosa en el margen izquierdo, como la que aquí aparece, cuando

consideremos que estamos tratando un detalle especialmente resbaladizo.

Las observaciones numeradas y recuadradas con fondo azul contienen aclaraciones, avisos, consejos o advertencias que consideramos de especial trascendencia para el aprendizaje del estudiante.

(3) No aspira a mostrar los resultados más amplios, matemáticamente hablando, sino que quiere ser un fiel reflejo de lo que se explicaría en las clases de una asignatura presencial para estudiantes que se están introduciendo en el nivel universitario. El contenido de los capítulos 1 al 4, que es el corazón del curso, está ajustado a la realidad de los créditos ([2]) y de la formación previa de los estudiantes que acceden a la universidad.

Durante su futuro académico y profesional todos los alumnos de este curso precisarán manejar los contenidos que aquí se exponen, al menos a nivel básico. Y sólo una parte, quizá no todos, necesitarán manejarlos en toda su profundidad. Ahora bien, si eligiéramos incluir solamente lo imprescindible, lo que todo estudiante tiene que alcanzar, correríamos el riesgo de que los más motivados y/o más capaces se sintieran decepcionados en sus expectativas y perdieran una oportunidad de apreciar el interés y la belleza de esta parte del cálculo infinitesimal.

Por esta razón, no hemos escatimado espacio en utilizar las notas a pie de página o los anexos (que no deberían ser indispensables para la consecución de los objetivos mínimos), así como, en algunas ocasiones, los comentarios recuadrados, para proveer de sugerencias e indicaciones adicionales a quienes se interesen en profundizar en la materia a otro nivel. Esperamos con ello que en el curso convivan varios niveles de aprendizaje.

En coherencia con este planteamiento, el anexo E explica cómo generalizar *de manera elemental* ([3]) a dimensiones arbitrarias los resultados fundamentales de los capítulos 1 al 4, cosa que puede y debe interesar a los estudiantes más curiosos, pero que no cabe en el desarrollo ordinario de un semestre académico. También, hemos introducido ocasionalmente a lo largo de todo el texto algunos desarrollos cuya presentación detallada exigiría más aparato matemático del que podemos incluir aquí. Estos casos los señalamos con el símbolo ★ en el margen izquierdo de un párrafo o en el título de un apartado.

(4) No pretendemos que el estudiante conozca demostraciones de todas las propiedades, ni tampoco los enunciados más amplios posibles de los teoremas. Ambas cosas están fuera del alcance de un curso introductorio como éste. En algunas ocasiones, para acceder a estas demostraciones o enunciados, daremos una referencia a un libro o a una dirección de internet y en otras remitiremos a un material suplementario que se encuentra en los anexos.

2. Que no se hagan demostraciones de muchos teoremas no obsta, naturalmente, para que todos los razonamientos que hagamos con objetos matemáticos hayan de ser rigurosos.

En cierto modo, cualquier razonamiento (en la resolución de un problema, por ejemplo) es una demostración y, como tal, ha de ser riguroso ([4]). Para que un razonamiento sea riguroso la primera premisa es que estén claras cuáles son exactamente las hipótesis de las que se parte; y para ello será a su vez imprescindible que los conceptos que usemos tengan una definición precisa en términos técnicos, por lo que a lo largo del curso dedicaremos bastante esfuerzo a las definiciones. Las definiciones más formales aparecen numeradas y con un recuadro amarillo. En todo caso, tanto si es dentro de una definición numerada como si no, la primera vez que aparece definido un término está escrito **en rojo y en negrita**, salvo en la sección 1.1, que es un mero recordatorio.

No nos detendremos en demostrar muchas de las propiedades. De nuestras integrales nos interesará mucho más saber manejarlas, comprender el tipo de problemas que cada una quiere resolver (una muestra de estos problemas es la exposición sobre el acordeón de Schwarz que precede a este prólogo), conocer sus propiedades y hasta dónde llegan, así como saber razonar rigurosamente con ellas, que conocer demostraciones de todas sus propiedades.

Lo que queremos decir aquí con "demostrar" se refiere a argumentos que se basen únicamente en una

[2] Seis créditos europeos equivalen, al menos desde un punto de vista ideal, a 150 horas de trabajo por parte de un estudiante medio.

[3] *Elemental* no equivale aquí a *fácil*, ver la observación 43.

[4] La idea de lo que es riguroso y de lo que no lo es evoluciona con el tiempo. Se trata de un mero consenso entre quienes cultivan las matemáticas en un determinado momento histórico. Cuando hablamos de rigor nos referimos a la forma de razonar tal como se acepta actualmente por la inmensa mayoría de los matemáticos.

axiomática claramente identificada (que en nuestro caso será la que figura en los anexos A y B) o en resultados que previamente hayan sido demostrados con el mismo rigor, sin recurrir a argumentos de otro tipo, como pueden ser los gráficos, los intuitivos o los de analogía.

3. Es muy recomendable comenzar el curso con la lectura detallada de los anexos A al D, porque contienen conocimientos básicos que son útiles en cualquiera de los capítulos 1 al 4. Los demás anexos pueden consultarse a medida que aparezcan referencias a ellos.

No forma parte de los objetivos el haber comprendido demostraciones de todos los resultados que se manejen sobre integrales, como hemos señalado más arriba. A menudo nos conformaremos con comprender una "justificación", que unas veces será muy técnica y otras muy intuitiva, de por qué una determinada fórmula expresa lo que buscamos. O nos conformaremos con entender una explicación que ilustre el sentido o el origen de una propiedad.

4. Pero sí que nos interesará mucho aprender a distinguir entre una *demostración* de una propiedad y una *justificación* de por qué la propiedad es cierta.

Por ello, cuando de una aserción demos justificaciones pero no demos una demostración, procuraremos dejar claro, mediante el formato tipográfico o advirtiéndolo expresamente, que no se trata de una demostración. También lo advertiremos explícitamente cuando una demostración no esté completa porque solamente tratemos algún caso particular. ([5])

5. El estudiante no debe olvidar, sin embargo, que por convincente que sea la justificación, no puede sustituir a una demostración: solamente demostrando un resultado con razonamientos formalizables podemos estar seguros de que las conclusiones son matemáticamente correctas. Una justificación se apoya en la intuición, mientras que una demostración nos garantiza que la intuición no nos ha engañado. Así que justificar y demostrar son actividades complementarias, que no pueden contraponerse sino que sirven a distintas finalidades.

Coherencia entre la teoría y las aplicaciones

En un curso de nivel elemental en el que se detallasen todas las demostraciones habría que limitar drásticamente la amplitud de los casos a los que se quiere aplicar cada resultado, debido a las restricciones que impone la complejidad de su demostración ([6]).

Nuestra opción es otra. No es que los alumnos aprendan muchas demostraciones, sino que se ejerciten en el rigor matemático, que sufran los efectos de su exigencia y que aprendan a apreciarlo cuando lo encuentran, tanto en la teoría como en los problemas, y muy especialmente en la transición de una a otros. Para ello, nuestra prioridad será que la teoría, tal como se hayan enunciado las definiciones y los problemas, sea rigurosamente aplicable a los problemas de integrales con algunos objetos matemáticos concretos ([7]).

Con esta finalidad en mente ([8]), buscaremos un equilibrio entre la amplitud de los casos a los que queremos aplicar una tesis y la complejidad de las hipótesis (no la complejidad de la demostración, sino de las hipótesis). En ese equilibrio favoreceremos, en general, la aplicabilidad de los teoremas, aunque a veces nos pase factura por las complicaciones que tengamos que introducir en algunas definiciones o enunciados. Como nuestro objetivo no se podrá alcanzar a la perfección, habrá alguna excepción, cuyo número procuraremos reducir al mínimo.

6. Hemos puesto especial empeño en mantener la coherencia entre lo que se explica con detalle, en especial los enunciados de los teoremas, y lo que después se necesita utilizar en los ejemplos y problemas.

---

[5] De acuerdo con Steven G. Krantz, en [13], apartado 5.18, la madurez matemática significa distinguir entre una demostración y un argumento de plausibilidad. Nosotros pretendemos que al finalizar este curso el alumno sea capaz de apreciar esa diferencia.

[6] Puesto que no resultaría admisible que se utilizasen en los problemas resultados más generales que los demostrados en la teoría.

[7] En cuanto a los problemas que pretendemos que los estudiantes aprendan a resolver en el curso utilizaremos como referencia principal el libro de texto [15], de Marsden y Tromba.

[8] Durante un tiempo el libro de Marsden y Tromba, [15], sirvió como texto para la asignatura. La necesidad de adaptar, precisar o añadir algunas cuestiones es la que nos ha llevado a redactar este curso.

Varias muestras de lo que queremos decir:

— La definición que demos de superficie ha de ser, además de elemental, lo bastante amplia como para incluir a todos aquellos objetos sobre los que queremos hacer cálculos (conos, cilindros, poliedros que tienen aristas, etc.), por mucho que para ello se compliquen los enunciados y/o las demostraciones ([9]).

— Necesitamos manejar conjuntos que sean de magnitud despreciable a los efectos de la integración, pero queremos evitar hablar de medida nula o, incluso, de contenido nulo, conceptos que consideramos demasiado sofisticados para este curso. La solución será apelar a las gráficas de funciones continuas y a las imágenes de funciones derivables con continuidad, que serán más que suficientes en todas las aplicaciones.

— Hemos reducido la formulación abstracta de los conceptos topológicos, evitando hablar de compactos y de conexos, lo que nos ha llevado a considerar algunas de las propiedades solamente sobre conjuntos especialmente sencillos pero que sean suficientes para nuestros objetivos: los conjuntos definidos por desigualdades entre funciones continuas.

— Algunas superficies corrientes pueden describirse por completo de manera explícita pero de modo que en puntos del borde el plano tangente es paralelo al eje de la variable despejada. Las fórmulas habituales para el cálculo de áreas quedan, por tanto, en entredicho; y, sin embargo, siguen siendo válidas en muchos casos. Daremos una condición suficiente para que las integrales existan (en sentido propio o impropio), que bastará para resolver todos los problemas elementales que aparecen en las aplicaciones.

— Las demostraciones que damos se apoyan en el conjunto de axiomas que exponemos en los anexos A y B. Otros manuales de este nivel también hacen explícitos los axiomas en los que se basan, pero difieren de lo que aquí hacemos en que utilizan profusamente las funciones elementales sin haber deducido su existencia a partir de los axiomas. Para evitar esa incoherencia entre la teoría y las aplicaciones, hemos preferido añadir la propia existencia y las propiedades básicas de las funciones elementales a la colección de axiomas. Algunos de nuestros axiomas son, sin duda, redundantes (ver apartado (A.3)), pero es que lo más frecuente en los otros textos es que también haya axiomas redundantes (aunque no siempre se diga), por lo que el coste conceptual de añadir más redundancia es nulo.

— En un anexo hemos incluido una demostración de la fórmula de Green-Riemann en el plano sobre conjuntos más generales que los rectángulos. Aparecen varias cuestiones sutiles, incluso cuando se hace solamente para regiones que son simples en las dos coordenadas. No sólo no evitaremos hablar de esas cuestiones, sino que las haremos aflorar para indicar cómo se pueden resolver, aunque no siempre podamos explicar todos los detalles de la solución.

— Dedicamos otro anexo a explicar cómo utilizar de modo riguroso las simetrías para simplificar los cálculos de integrales.

Sin perjuicio de todo lo dicho hasta ahora, dudamos de que en un texto elemental que quiere apelar de modo sistemático a la intuición sea posible mantener la total coherencia a la que aquí nos referimos, por lo que es posible que el lector encuentre detalles que puedan ser discutibles a este respecto.

INFINITÉSIMOS Y NÚMEROS INFINITOS

Los infinitésimos y los números infinitos los utilizaremos libremente en las gráficas y en las justificaciones, procurando que los razonamientos matemáticos que con ellos hagamos no solamente ayuden a la comprensión de un concepto o de un resultado, sino cuidando además de que sean formalizables dentro de los *números hiperreales*, que forman parte del llamado *análisis no estándar*. En el desarrollo del curso no entraremos a explicar en detalle esas formalizaciones, ni los utilizaremos en las demostraciones, puesto que nos moveremos dentro del cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

No obstante, en el anexo C exponemos una rápida aproximación a los números hiperreales, para que el estudiante compruebe que los infinitésimos también pueden utilizarse con rigor y no solamente como un instrumento heurístico. Y en el anexo D damos una muestra detallada de cómo se usan en las demostraciones, utilizándolos para probar las propiedades de continuidad y derivabilidad de las funciones elementales que se han descrito en el anexo B.

[9] Hemos seguido básicamente las ideas del texto [2].

Competencias y conocimientos previos

Imprescindibles

- Conocimiento de un conjunto de propiedades básicas de $\mathbb{R}$ de las que se derivan todas las demás. Para nosotros serán los axiomas en los que apoyaremos todos los razonamientos.
- Concepto de función continua de una y de varias variables. Propiedades elementales de las funciones continuas. Propiedad de los valores intermedios para las funciones continuas de una variable.
- Concepto de derivada parcial y de diferencial para funciones de varias variables. Matriz jacobiana. Funciones derivables con continuidad. Regla de la cadena.
- Enunciado y aplicaciones del teorema de la función inversa y de la función implícita.
- Uso riguroso de límites de sucesiones y de sus propiedades.
- Concepto de integral para funciones de una variable. Regla de Barrow. Obtención de primitivas de funciones sencillas.
- Manejo con soltura de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, así como de sus propiedades (representación gráfica, diferenciación, integración).
- Saber hacer demostraciones por reducción al absurdo.
- Distinguir entre condición necesaria y condición suficiente.
- Comprender la manera de enunciar la propiedad recíproca y la contrarrecíproca de una propiedad que contenga cuantificadores.
- Saber expresar, mediante ecuaciones, rectas y cónicas en el plano, así como planos y esferas en el espacio.
- Producto escalar y producto vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Convenientes, pero no estrictamente necesarios

- Concepto de serie.
- Continuidad uniforme.
- Propiedad de Weierstrass para funciones continuas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ cerrados y acotados.
- Dibujar gráficas de funciones de una o dos variables, incluido el uso de un programa de cálculo simbólico.
- Interior, frontera y clausura de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ definidos a través de desigualdades con funciones elementales.
- Manejo riguroso de los infinitésimos en ${}^*\mathbb{R}$.

No hacen falta

- Construcción del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, a partir del de los números racionales, $\mathbb{Q}$.
- Construcción de un conjunto de hiperreales ${}^*\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{R}$.
- Construcción de las funciones elementales a partir de una axiomática de $\mathbb{R}$.
- Demostraciones de teoremas de la función inversa o de la función implícita.
- Saber sumar series (más allá de las series geométricas y similares).
- Saber calcular antiderivadas complicadas.
- Series de potencias. Convergencia de funciones.

Palabras clave

Cálculo infinitesimal, Cálculo integral, Cálculo vectorial, Calculus, Análisis matemático, Fundamentos matemáticos, Integral de Riemann, Integral de línea, Integral de superficie, Integral definida, Matemáticas.

Para finalizar la presentación

Resulta obligado mostrar públicamente el agradecimiento del autor a la Universidad de Cantabria por promover la realización y publicación del material de los cursos abiertos OpenCourseWare; a los responsables de este servicio de la Universidad, por su comprensión y por su impagable colaboración con la confección de la práctica totalidad de las figuras; y a la profesora Cristina Pérez García, por su desinteresada ayuda en multitud de ocasiones.

Santander, enero de 2017

CAPÍTULO 1

Integrales de una variable e integrales sobre curvas

1.1 Integral de Riemann para funciones de una variable real

Este apartado es un resumen que sirve para recordar ideas y unificar notaciones sobre un concepto y unos resultados que los alumnos que acceden a este curso deben haber conocido en sus estudios previos, como es la integral de una variable y sus primeras propiedades. En el capítulo 2 volveremos sobre las mismas cuestiones y las repetiremos con todo detalle para las funciones de dos variables.

1.1.1. Introducción

Consideramos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida sobre un intervalo cerrado y acotado de números reales $[a, b]$ y que supondremos acotada y tomando solamente valores positivos. Nuestro objetivo inmediato es *definir*, manejar y calcular el valor numérico del "área" de la región del plano contenida entre la gráfica

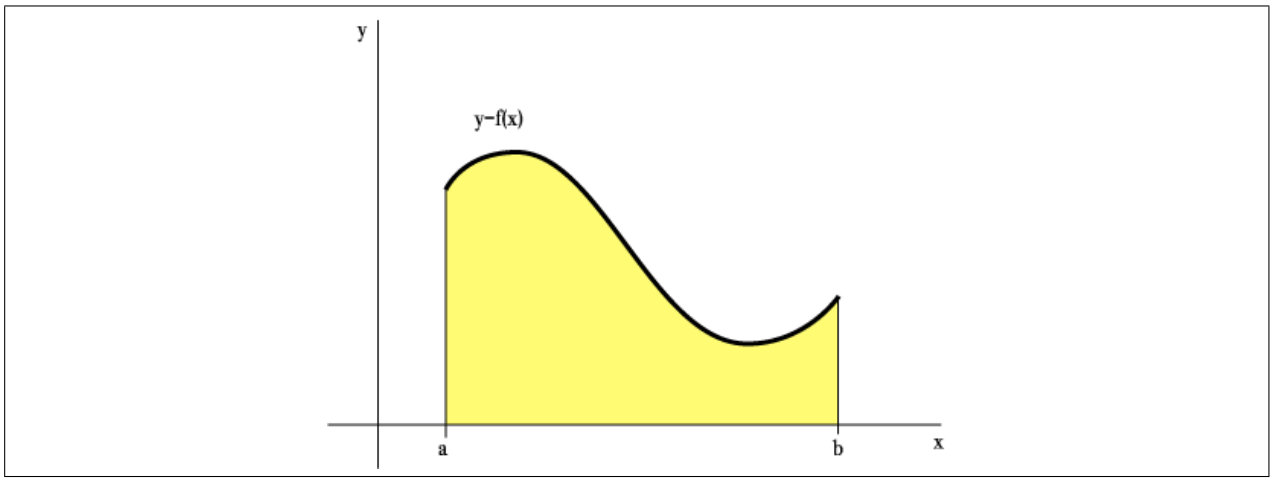


Figura 1.1: Región cuya área queremos definir

de f, el eje X de las abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$. ([10])

La idea es sustituir esta región por una aproximación suya formada por rectángulos que tienen una base infinitesimal, $dx \approx 0$, y una altura igual al valor de f en algún punto de la base (figura 1.2). Cada uno de esos rectángulos tiene área infinitesimal (base $\times$ altura) y la suma de todos ellas esperamos que sea una aproximación al área de la región.

Hay varias formas de concretar técnicamente esta idea. Pensemos, por ejemplo, en si todas las bases de los rectángulos tienen que medir lo mismo, o no; en si el punto donde se evalúa la función en cada tramo infinitesimal es arbitrario o está determinado de alguna forma; etc. Algunas de estas formas son equivalentes entre sí y otras no; sobre esto volveremos en el epílogo.

Podríamos utilizar directamente infinitésimos ([11]), pero evitaremos por el momento las aproximaciones infinitesimales y utilizaremos en su lugar pasos al límite.

Empezaremos con una forma similar a como lo hizo Riemann a mediados del siglo XIX. Dado $n \in \mathbb{N}$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales, cada una de longitud $\Delta x = (b - a)/n$, y construimos una

[10] Ponemos el acento en *definir* porque el área no es para nosotros un concepto primitivo. Aunque utilicemos con mucha frecuencia figuras, donde el área puede parecer algo evidente, en los razonamientos formales nos basaremos únicamente en los axiomas de $\mathbb{R}$ y en sus consecuencias.

Las figuras servirán en unos casos para guiarnos la intuición en los razonamientos y en otros para convencernos de que el modelo matemático que estamos construyendo se adecúa a lo que queremos modelizar.

[11] En 1960 A. Robinson demostró que se puede ampliar el cuerpo $\mathbb{R}$ de números reales a un cuerpo ${}^*\mathbb{R}$ de números hiperreales que incluye números infinitamente próximos a cualquier número real, así como infinitamente grandes. El procedimiento de Robinson no sólo amplía $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$ sino que además identifica la manera sistemática de transferir propiedades entre ambos cuerpos. Ver el anexo C.

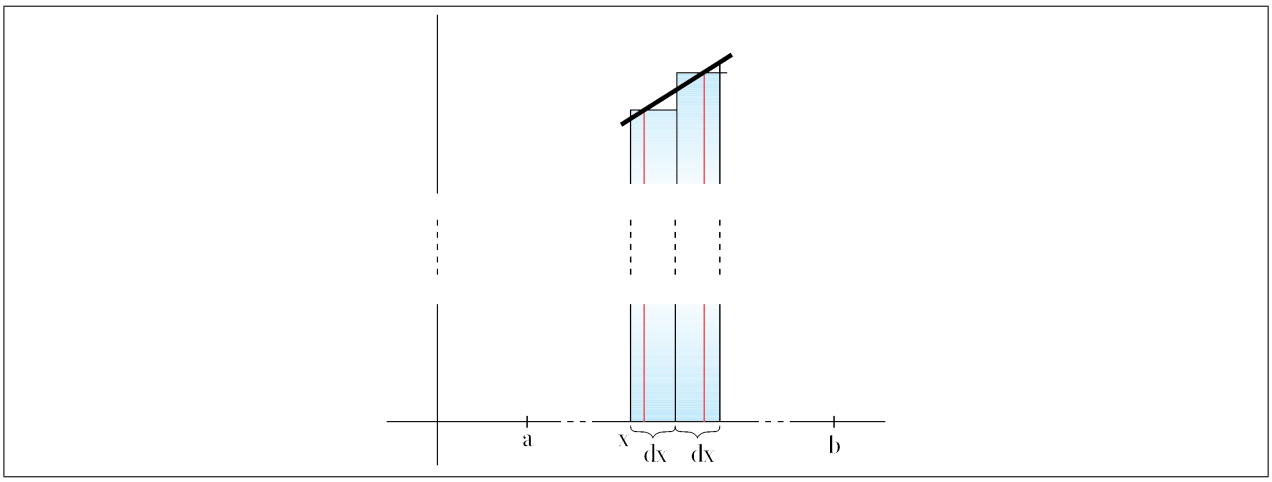


Figura 1.2: Aproximación con rectángulos de base infinitesimal dx

colección de rectángulos de base cada una de esas partes, o subintervalo, y altura igual al valor de f en un punto sin determinar del subintervalo:

$$\text{llamamos} \qquad x_0 = a, \;\; x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \;\; \ldots, \;\; x_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}, \;\; x_n = b,$$

y para cada $i = 1, \ldots, n$ elegimos un punto ξ_i en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A continuación formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x,$$

y pasamos al límite cuando n tiende a infinito.

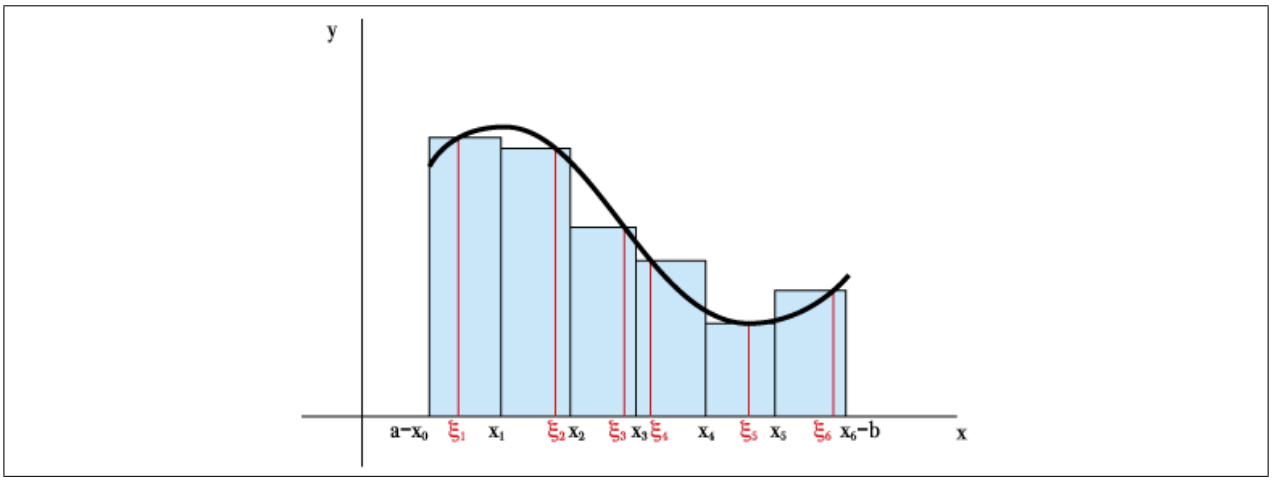


Figura 1.3: Una suma de Riemann S_6

Si ocurre que las sumas de Riemann convergen a un número real y además siempre que elegimos unos ξ_i^* distintos de los ξ_i las sumas de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x$ también convergen al mismo número real, entonces es cuando decimos que la función f es integrable en el sentido de Riemann, y el valor del límite se llama la integral de Riemann de f, denotada mediante $\int_a^b f(x)\,dx$. Puede demostrarse que toda función continua $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

En el caso de que la función f no sólo tome valores positivos, podemos seguir el mismo proceso para formar las sumas de Riemann y pasar al límite, teniendo en cuenta que ahora la integral de Riemann representará también el área comprendida entre la gráfica de f y el eje horizontal, pero considerando como negativas las áreas que hay por debajo del eje. A partir de ahora dejaremos de suponer que f es positiva.

Otra forma distinta de aproximar con rectángulos, que no precisa de estas funciones ξ, que son arbitrarias,

fue sugerida por Darboux en 1875. En lugar de usar como altura el valor de f en un punto arbitrario, usamos la mayor y la menor posible de las alturas, mejor dicho, el supremo y el ínfimo de los valores de f. Como f la supusimos acotada, estos supremos y estos ínfimos existen, lo que no está garantizado es que coincidan con sendos valores de f ([12]). Y no nos limitamos a particiones del intervalo en subintervalos iguales. Llamamos partición del intervalo $[a, b]$ a un conjunto finito de puntos suyos entre los cuales están siempre los extremos, $\mathscr{P} = \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$, y los supondremos con los subíndices elegidos de modo que los puntos están ordenados:

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

y llamamos suma superior de Darboux y suma inferior de Darboux a

$$U(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad L(f, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

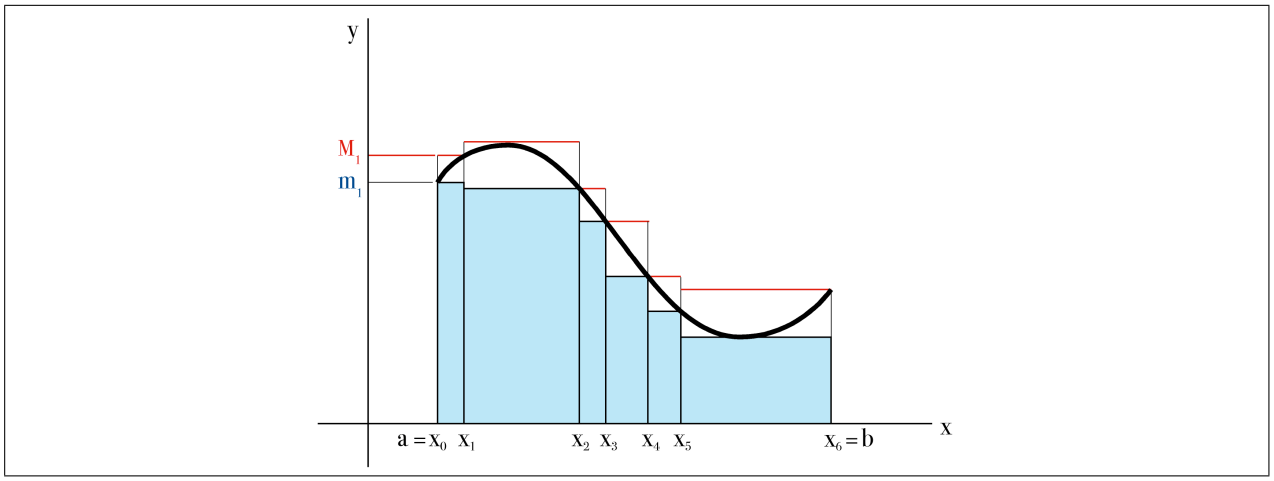


Figura 1.4: Sumas superior (con borde rojo) e inferior (coloreada en azul) de Darboux para la misma partición $\{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$

Ahora tomamos, respectivamente, ínfimo y supremo de todos los valores posibles de $U(f, \mathscr{P})$ y de $L(f, \mathscr{P})$, donde la que varía es la partición. Y a los resultados los llamamos integral superior de Darboux e integral inferior de Darboux,

$$U(f) = \inf\{U(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición de } [a, b]\}, \quad L(f) = \sup\{L(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición de } [a, b]\}.$$

En caso de que ambas integrales superior e inferior coincidan, decimos que la función f es integrable en el sentido de Darboux y que ese valor común es la integral de Darboux de f.

Teorema 1.1 (Darboux, 1875) *La integral de Riemann y la integral de Darboux coinciden. En otras palabras: una función acotada es integrable Riemann si y sólo si es integrable Darboux; y en caso de que lo sea, los valores de ambas integrales son el mismo.*

Obsérvese que lo que estamos haciendo al integrar es generalizar la operación de sumar. La suma para nosotros es una operación de dos sumandos (así lo asegura uno de los axiomas) que por inducción ampliamos a cualquier número finito de sumandos. Pero no a un número infinito. Una manera de generalizar la suma a un número infinito de sumandos la constituyen las series, pasando al límite de las sumas parciales. Los

[12] Al no estar garantizado que sean máximos o mínimos, no podemos hablar, en propiedad, de *la mayor de las alturas* o de *la menor de las alturas*.

procedimientos de Riemann y de Darboux son otras formas diferentes de sumar infinitos sumandos ([13]).

Hasta tal punto estamos hablando de una generalización de la suma que el propio símbolo de la integral es una "s" minúscula en la caligrafía del siglo XVII (del mismo modo, el símbolo de una serie es una "S" mayúscula en el alfabeto griego).

Vale la pena insistir en esto porque las aplicaciones de las integrales se refieren siempre a alguna forma generalizada de sumar. Simplificando bastante, puede decirse que cuando queremos pasar a una cantidad numerable de sumandos, las series son un instrumento adecuado; y cuando queremos utilizar una cantidad no numerable de sumandos, habremos de recurrir a las integrales ([14]).

Así, por ejemplo, si pensamos en una barra recta de un material con densidad variable y queremos

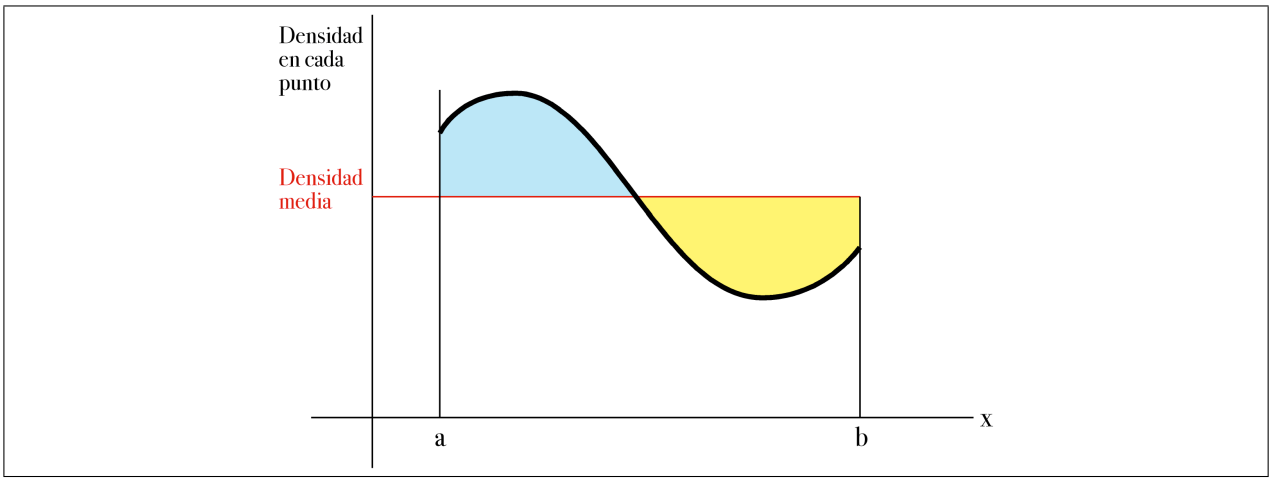


Figura 1.5: Definimos la densidad media como la altura de la línea roja para la que la zona de color azul tiene la misma área que la zona de color amarillo

hablar de su densidad media, una modelización adecuada es considerar la barra como un intervalo $[a, b]$ y la densidad como una función f sobre cada punto de ese intervalo. Si quisiéramos calcular la media de una colección finita de valores, sumaríamos esos valores y dividiríamos por el número de valores. En el caso de querer evaluar la densidad media, lo que haremos será integrar f sobre $[a, b]$ y dividir por la longitud $b - a$. Geométricamente, eso significa hallar la altura media de la gráfica de f.

7. Existen otras formas de definir y aproximar el área buscada utilizado sumas de áreas de rectángulos. Algunas de ellas también coinciden con la de Riemann y otras no (Integral de Lebesgue, Integral de Kurzweil-Henstock), ver el epílogo. Salvo en el epílogo, cuando digamos 'integral' nos referiremos siempre a la integral de Riemann.

1.1.2. Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo es el resultado que asegura que las operaciones de derivar y de integrar son recíprocas. Se trata por tanto de un teorema doble: si primero integramos y después derivamos, o si primero derivamos y después integramos, en ambos supuestos se obtiene la función original. A menudo se reserva la expresión 'teorema fundamental del cálculo' para cuando primero se integra y después se deriva, mientras que se llama 'regla de Barrow' el enunciado para cuando primero se deriva y después se integra.

Para un enunciado formal con integrales de Riemann es imprescindible añadir algunas hipótesis sobre las funciones:

Teorema 1.2 (fundamental del Cálculo) *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces para*

[13] Ninguno de estos dos procedimientos diferentes de sumar infinitos sumandos involucra a series, el primero pasa al límite unas sucesiones que no son sumas parciales de una serie y el segundo pasa al supremo y al ínfimo de unos conjuntos de valores que son sumas.

[14] También puede modelizarse directamente el problema de "sumar infinitos sumandos" mediante sumas hiperfinitas, que se manejan de manera muy similar a las finitas, ver [11], capítulo 6, o [21], capítulo 9.

todo $x \in [a, b]$,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

(en el caso de que $x = a$ *o* $x = b$*, la derivada es derivada lateral).*

JUSTIFICACIÓN: *Ver [22], 9.3. La figura 1.6, en la que* dx *indica un infinitésimo, proporciona una explicación de por qué una función definida a través de la integral de una función continua tiene por derivada a la función original.*

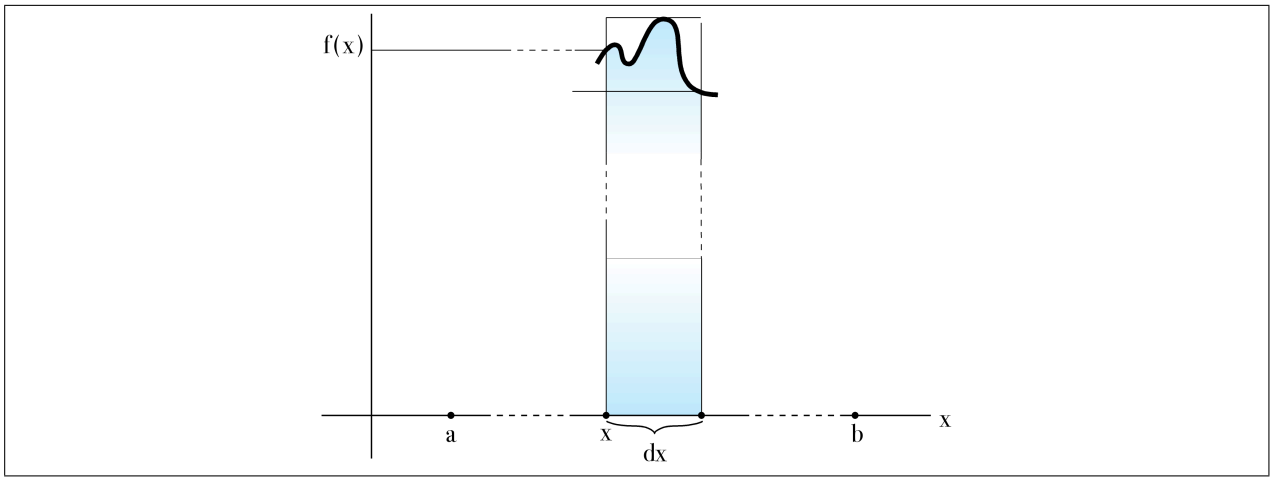


Figura 1.6: Tomamos un punto x y avanzamos un infinitésimo dx. Cuando no hay discontinuidades, la tasa de variación de la integral (parte coloreada divida por dx) es infinitamente próxima al valor de la función en x

En efecto: la parte coloreada es el incremento de área entre x *y* $x + dx$*, que está contenida entre dos rectángulos de base* dx *y alturas infinitamente próximas a* $f(x)$*, por lo que al dividir el incremento de área por el incremento de la variable* (dx)*, el resultado es siempre infinitamente próximo a* $f(x)$*.*

Teorema 1.3 (regla de Barrow) *Si* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función diferenciable* ([15]) *y con derivada continua (las funciones cuya primera derivada existe y es continua se llaman también* ***funciones de clase*** $\mathscr{C}^1$*, o* ***funciones derivables con continuidad****), entonces*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a). \qquad \textit{Notación que usaremos nosotros: } f(b) - f(a) = \Big[f(x)\Big]_a^b.$$

JUSTIFICACIÓN: *(Ver [21], Teorema 2.)*

Para cualquier número natural n*,*

$$f(1) - f(0) = \left[f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right].$$

Por otra parte, al dividir por $1/n$ *cada uno de los corchetes anteriores tendremos una aproximación de la derivada de* f*. Así que ponemos*

$$\varepsilon_i = n\left[f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right] - f'\left(\frac{i-1}{n}\right),$$

y obtenemos

$$f(1) - f(0) = \sum_{i=1}^{n}\left[f'\left(\frac{i-1}{n}\right) + \varepsilon_i\right]\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} f'\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{n}.$$

[15] A lo largo de todo el curso, una función **diferenciable sobre un intervalo** $[a, b]$ significa que tiene derivada en todos los puntos de (a, b) y derivada lateral en los extremos (esta nomenclatura es compatible con la observación 21).

Todas nuestras derivadas son finitas, salvo indicación expresa en sentido contrario.

Por el principio de transferencia (apartado (C.2)), la anterior igualdad es también válida para un hipernatural infinito H. Y ahora razonamos de la siguiente manera:

- $\sum_{i=1}^{H} f'\left(\frac{i-1}{H}\right)\frac{1}{H} \approx \int_0^1 f'(x)\,dx$, *por definición de integral (ver (C.3) para la interpretación del límite de una sucesión);*
- *Cada ε_i es infinitesimal, por ser f de clase $\mathscr{C}^1$ (ver nuevamente (C.3)), luego también lo es el máximo de sus valores absolutos, $\varepsilon = \max\{|\varepsilon_i| : i = 1, \ldots, H\}$. Por tanto,*

$$\left|\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}\varepsilon_i\right| \leq \frac{1}{H}H\varepsilon = \varepsilon \approx 0.$$

Por consiguiente, $f(1) - f(0) \approx \int_0^1 f'(x)\,dx$, y como ambos son números estándar, han de ser iguales.

1.1.3. Cálculo de primitivas

En este curso supondremos conocidas las propiedades elementales de las integrales: la integral de una suma es la suma de las integrales; las constantes pueden sacarse fuera de la integral; si una función es mayor o igual que otra en todos los puntos, entonces la integral de la primera también es mayor o igual que la integral de la segunda; el valor absoluto de una integral es menor o igual que la integral del valor absoluto; y la aditividad de los intervalos, es decir, si $a < c < b$ y f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Gracias a la regla de Barrow, para conocer el valor de la integral de una función es suficiente con conocer el valor de cualquier primitiva suya. También supondremos conocido el cálculo de primitivas

- de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales;
- de funciones racionales;
- a través de cambios de variable: al hacer el cambio $x = h(t)$,

$$\int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(h(t))h'(t)\,dt,$$

  (donde las funciones f y h se suponen de clase $\mathscr{C}^1$);
- a través de la integración por partes: si f y g son funciones de clase $\mathscr{C}^1$,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx;$$

- y, en general, de todas las funciones cuyas primitivas figuran en el anexo M.

1.2 Integrales sobre caminos

Las integrales sobre curvas son integrales de funciones definidas sobre unos objetos que en cierto modo son de dimensión 1 pero que no están contenidos en $\mathbb{R}$, sino que su espacio ambiente es $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ o, incluso, otro $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$. Modelizaremos las curvas como deformaciones de intervalos cerrados y acotados que, tras sufrir una deformación, se han salido, por así decir, de su espacio ambiente natural y han adquirido una forma que necesitaba de más dimensiones.

Una situación similar se nos dará con las superficies, objetos esencialmente de dos dimensiones pero que no están contenidos en $\mathbb{R}^2$ sino en $\mathbb{R}^3$ (ver la sección 3.1).

Querremos integrar sobre curvas dos tipos de aplicaciones distintas, funciones escalares y funciones vectoriales.

8. Un adjetivo aplicado a una función se refiere normalmente a sus imágenes, no a su dominio. Así, por ejemplo, una función compleja es la que toma valores en el cuerpo de los números complejos; en cambio, si es el dominio el que está formado por números complejos se llama función de variable compleja.

Nuestras funciones escalares, por tanto, toman valores en $\mathbb{R}$, y las funciones vectoriales toman valores en un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, donde n dependerá de cada caso.

Las funciones escalares y las vectoriales que integremos representarán en las aplicaciones de estas integrales una magnitud (de índole física, económica, etc., según cuál sea el campo de aplicación) de la que nos interesa conocer un comportamiento global a partir de que conozcamos su comportamiento local. En la introducción de cada tipo de integral concretaremos este planteamiento mediante alguna de sus aplicaciones más características.

En lugar de hablar de funciones escalares o vectoriales hablaremos a menudo de **campos escalares** y campos vectoriales.

9. Un rasgo adicional de los **campos vectoriales** es que el conjunto inicial y el final están contenidos en espacios vectoriales de la misma dimensión.

Para definir integrales sobre curvas necesitaremos precisar qué entenderemos por una curva. Una de las ideas intuitivas que tenemos de curva es de un subconjunto del plano o del espacio que se puede "trazar", que se puede "recorrer". Nos vamos a apoyar en esta visión dinámica de las curvas para describirlas. Supondremos que hay un cierto parámetro, que denotaremos con una t porque en las aplicaciones con frecuencia se refiere a una variable temporal, que es el que nos permite hacer el recorrido de la curva, comenzando en un punto y terminando en otro (o en el mismo), tras haber "pasado" por cada punto una o más veces.

La primera consecuencia de este planteamiento es que comenzaremos tratando, no con las curvas propiamente dichas, sino con su descripción a través de una función (ver la observación 25), que suele denominarse trayectoria, parametrización, camino, o con otros nombres similares.

1.2.1. Integral de un campo escalar sobre un camino

Nuestra aproximación a las curvas (de las que ya advertimos ahora que no daremos una definición hasta la sección 1.3), la haremos a través de lo que llamaremos caminos:

Definición 1.4 *Un **camino en** $\mathbb{R}^n$ es una aplicación continua, definida sobre un intervalo cerrado y acotado (con más de un punto, para evitar los casos degenerados) y con valores en $\mathbb{R}^n$, donde normalmente n será 2 o 3, pero también podría ser 1 o cualquier número natural mayor que 3.*

*Llamaremos **punto inicial** y **punto final** del camino a la imagen del punto inicial y del punto final del intervalo, respectivamente.*

*Usaremos las palabras **trayectoria** y **parametrización** como sinónimos de camino* ([16]).

Los caminos en $\mathbb{R}^2$ los consideraremos a menudo como un caso particular de caminos en $\mathbb{R}^3$, a base de sumergir $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, añadiendo una tercera coordenada nula.

Supóngase que $\boldsymbol{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un camino sobre cuya imagen queremos medir alguna cantidad escalar, como pueden ser, por ejemplo, la longitud de la imagen misma, $\boldsymbol{c}([a,b])$; o la masa de la imagen $\boldsymbol{c}([a,b])$ suponiendo que conozcamos la densidad $f(x,y,z)$ en cada punto suyo; o el área de una superficie tridimensional que tiene por base a $\boldsymbol{c}([a,b]) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ y una altura variable dada por una función positiva $z = f(x,y,0)$ ([17]). En todos estos casos nos proponemos medir una magnitud que está definida sobre una deformación del intervalo $[a,b]$, deformación que viene dada por la función $\boldsymbol{c}$.

Usaremos ideas muy parecidas a las de apartado 1.1.1, con las adaptaciones que nos impone el hecho de que ahora nuestro dominio de definición de la función a integrar f no sea un intervalo sino la imagen de un camino.

Para empezar, tomamos una partición de $[a,b]$, $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_m = b$, con la que pretendemos aproximar la imagen $\boldsymbol{c}([a,b])$ mediante el polígono que une los puntos $\boldsymbol{c}(t_0)$, $\boldsymbol{c}(t_1)$, $\ldots$, $\boldsymbol{c}(t_m)$ en este orden.

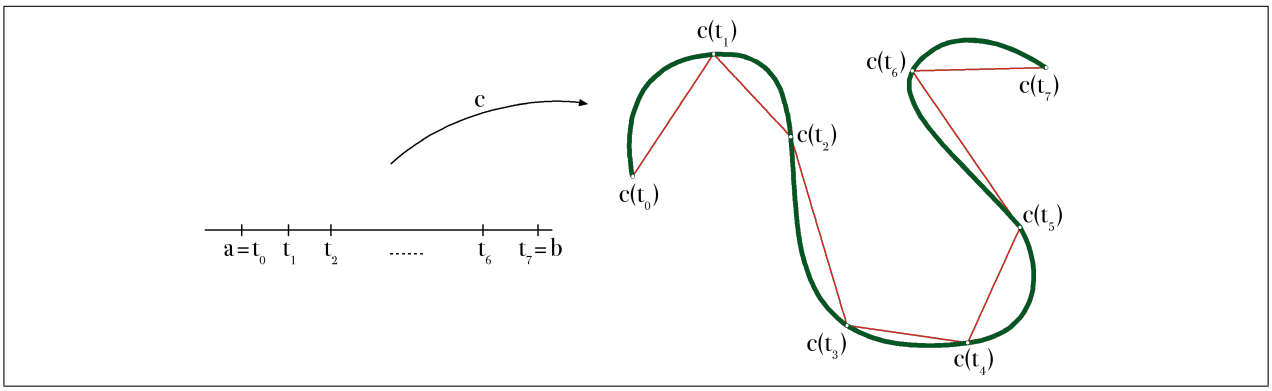


Figura 1.7: Aproximación con poligonales

Los tramos rectos de la poligonal serán las bases de unos rectángulos cuyas áreas sumaremos para aproximarnos a la integral que queremos definir. Para las alturas de estos rectángulos queremos tomar los valores de f en puntos "intermedios". Ahora bien, la función f sólo sabemos que está definida sobre puntos de la curva, no de la poligonal. En consecuencia, nuestros puntos intermedios ξ_i los elegiremos en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y evaluaremos f en los puntos $\boldsymbol{c}(\xi_i)$. Así, la suma de todas las áreas de los rectángulos será

$$\sum_{i=1}^{m} f(\boldsymbol{c}(\xi_i))\ \|\boldsymbol{c}(t_i) - \boldsymbol{c}(t_{i-1})\|,$$

y pasaremos al límite cuando $m \to \infty$.

Teorema 1.5 *Supóngase que $\boldsymbol{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino de clase $\mathscr{C}^1$ ([18]) y que f es un campo escalar continuo definido sobre la imagen de $\boldsymbol{c}$, $f : \boldsymbol{c}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces*

$$\lim_{m} \sum_{i=1}^{m} f(\boldsymbol{c}(\xi_i))\ \|\boldsymbol{c}(t_i) - \boldsymbol{c}(t_{i-1})\| = \int_a^b f(\boldsymbol{c}(t))\|\boldsymbol{c}'(t)\|\ dt.$$

JUSTIFICACIÓN: ([19]) *Las sumas de Riemann correspondientes a la integral de la derecha son de la forma*

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} f(\boldsymbol{c}(\xi_i))\ \|\boldsymbol{c}'(\xi_i)\|\ (t_i - t_{i-1}),$$

[16] Sin embargo, normalmente reservaremos la palabra *parametrización* para cuando nos estemos refiriendo a un camino asociado a una curva concreta.

[17] Ver la figura F.3.

[18] Ver la observación 21.

[19] Puede consultarse una demostración en [2], teorema 5.2.13.

Ahora bien, como la función derivada $\boldsymbol{c}'$ es continua, cada una de las derivadas $\boldsymbol{c}'(\xi_i)$ puede aproximarse por la derivada $\boldsymbol{c}'(t_i)$. Y, a su vez, la norma de $\boldsymbol{c}'(t_i)$ puede aproximarse por el cociente $\|\boldsymbol{c}(t_i)-\boldsymbol{c}(t_{i-1})\|/(t_i-t_{i-1})$ ([20]), de manera que S_m puede aproximarse por $\sum_{i=1}^{m} f(\boldsymbol{c}(\xi_i))\ \|\boldsymbol{c}(t_i)-\boldsymbol{c}(t_{i-1})\|$. Para terminar la demostración, lo que necesitamos es comprobar que estas últimas aproximaciones son lo bastante buenas como para que el límite de ambas sumas sea el mismo.

Antes de proceder a nuestra definición de integral de un campo escalar sobre un camino señalemos que, en las aplicaciones prácticas y en los cálculos aproximados que tengamos que hacer, un tipo de caminos que nos interesan especialmente es el formado por caminos cuyas imágenes y sus expresiones analíticas sean las más sencillas posibles: que vengan descritos por polinomios de grado 1 (la imagen será un segmento recto) o por una colección encadenada de polinomios de grado 1 (la imagen será una poligonal). No son trayectorias de clase $\mathscr{C}^1$ en cuanto tengan algún vértice ([21]), pero sí lo son en el entorno de cada uno de los valores del parámetro que no se corresponden con un vértice.

Definición 1.6 *Diremos que un camino $\boldsymbol{c}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es* ***de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos*** *cuando existe una partición del intervalo $[a,b]$, $\{a=t^0<t^1<\ldots<t^N=b\}$, de modo que la restricción de $\boldsymbol{c}$ a cada subintervalo $[t^{k-1},t^k]$ es de clase $\mathscr{C}^1$ $(k=1,\ldots,N)$.*

10. No olvidar que todos nuestros caminos, incluidos los de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, son funciones continuas.

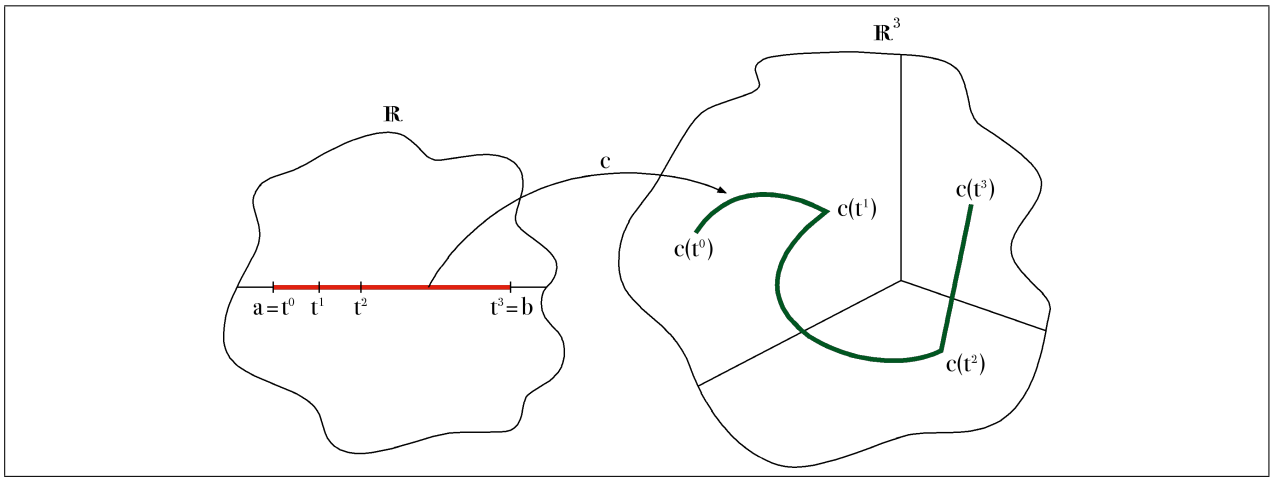


Figura 1.8: Esquema de un camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos

Apelando a todas estas consideraciones, definimos la integral de la siguiente manera:

Definición 1.7 *Sea $\boldsymbol{c}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, y sea f un campo escalar continuo definido al menos sobre la imagen de $\boldsymbol{c}$, $f:\boldsymbol{c}([a,b])\longrightarrow\mathbb{R}$. La* ***integral del campo f a lo largo del camino $\boldsymbol{c}$*** *es*

$$\int_{\boldsymbol{c}} f\,ds=\int_a^b f(\boldsymbol{c}(t))\|\boldsymbol{c}'(t)\|\,dt.$$

[20] Para esta aproximación nos podemos apoyar en el teorema del valor medio para derivadas de funciones vectoriales, a pesar de que nos proporciona solamente una desiguadad, y no una igualdad como en el caso de funciones escalares.

[21] Este comentario no contradice a la observación 25. Aquí es seguro que no son de clase $\mathscr{C}^1$ porque estamos considerando solamente expresiones polinómicas de grado 1.

Observación sobre la existencia de la integral en la definición 1.7: Si la derivada $\boldsymbol{c}'$ existe y es continua en todos los valores del parámetro, es seguro que la integral existe, puesto que el integrando se obtiene mediante operaciones y composiciones de funciones continuas, luego es a su vez una función continua.

Si no es así, es decir, si hay puntos donde $\boldsymbol{c}$ no es derivable o donde alguna de sus componentes no tiene derivada continua, entonces la integral en realidad hay que entenderla como la suma de las integrales sobre los subintervalos $[t^{k-1}, t^k]$ (notaciones de la definición 1.6): $\int_a^b f(\boldsymbol{c}(t))\|\boldsymbol{c}'(t)\|\,dt$ significa $\sum_{k=1}^N \int_{t^{k-1}}^{t^k} f(\boldsymbol{c}(t))\|\boldsymbol{c}'(t)\|\,dt$.

11. En las explicaciones que demos y en las figuras que hagamos (y a veces también en las demostraciones) será frecuente que supongamos que el camino es de clase $\mathscr{C}^1$, no solamente de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, de manera que para pasar al caso general simplemente argumentaremos sobre cada uno de los trozos de clase $\mathscr{C}^1$ para luego sumar los resultados, gracias a los teoremas 1.12 y 1.14.

Ejemplo 1.8 Hallar el promedio de la ordenada y de los puntos de la semicircunferencia de radio a parametrizada por $\boldsymbol{c} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\theta \rightsquigarrow (0, a\sin\theta, a\cos\theta)$, donde $a > 0$.

El promedio de una función $f(x, y, z)$ sobre una parametrización $\boldsymbol{c}$ se define como $\int_{\boldsymbol{c}} f\,ds / \int_{\boldsymbol{c}} ds$, en coherencia con definiciones de promedios en otros contextos.

12. La definición de **promedio** es una generalización de la fórmula para calcular la media ponderada de una colección finita de datos. Recuérdese que las integrales son una buena manera de generalizar las sumas finitas cuando tenemos una cantidad no numerable de datos.

Como

$$\int_{\boldsymbol{c}} y\,ds = \int_0^\pi a\sin\theta\left[a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta\right]^{1/2} d\theta = a^2\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = 2a^2,$$

y

$$\int_{\boldsymbol{c}} ds = \int_0^\pi \left[a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta\right]^{1/2} d\theta = a\int_0^\pi d\theta = a\pi,$$

el promedio buscado es igual a $\frac{2}{\pi}\,a$.

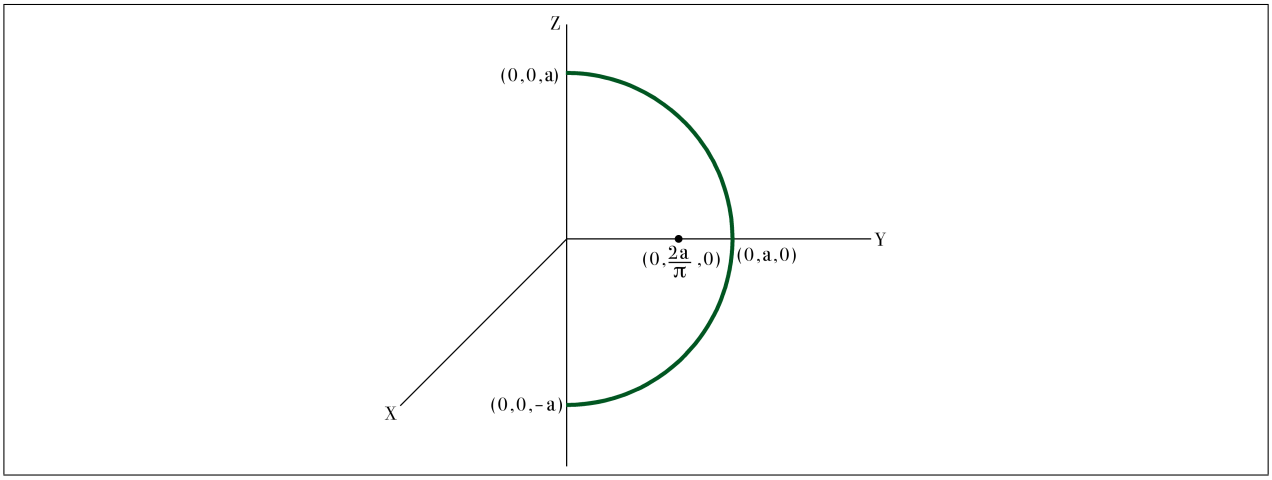


Figura 1.9: Imagen de la trayectoria del ejemplo 1.8

El promedio de x es cero porque x siempre lo es. Y el de z también es cero, como puede comprobarse por un cálculo directo,

$$\int_{\boldsymbol{c}} z\,ds = \int_0^\pi a\cos\theta\left[a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta\right]^{1/2} d\theta = a^2\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta = 0,$$

o justificarse por motivos de simetría: como $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$,

$$\int_0^{\pi}\cos\theta\ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\ d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\ d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\ d\alpha=0$$

(para la segunda igualdad, en una de las dos integrales se ha cambiado θ por $\pi-\alpha$).

13. En el cálculo de una integral, un argumento de simetría puede demostrarse que es riguroso mediante una utilización *ad hoc* del teorema del cambio de variable: se divide el dominio en dos partes, se aplica la aditividad de la integral y mediante un cambio de variable se demuestra que alguno de los sumandos es igual (u opuesto, según cuál sea el caso) al otro. Para más detalles, consultar el anexo L.

La figura ilustra el sentido de este resultado: el punto formado por los tres promedios es el **centro de gravedad** de la imagen de la trayectoria, que por cierto se encuentra fuera de la misma, y como $2/\pi$ es un número comprendido entre $0,5$ y 1, el centro de gravedad está más próximo a la curva semicircular que al centro de la semicircunferencia. ■

Las integrales de campos escalares tienen las mismas propiedades de aditividad, producto por un escalar, etc., que las que ya conocemos para la integral de Riemann y que citamos en el apartado 1.1.3. Su demostración es inmediata, apelando a la correspondiente propiedad en la integral de Riemann ([22]).

Más novedosa es la propiedad análoga a la aditiva para intervalos. Para enunciarla necesitamos precisar a qué adición de caminos nos referimos aquí.

La idea es muy sencilla, se trata de convertir dos imágenes de caminos, con la única condición previa de que una de las imágenes comience donde termina la otra, en la imagen de un solo camino.

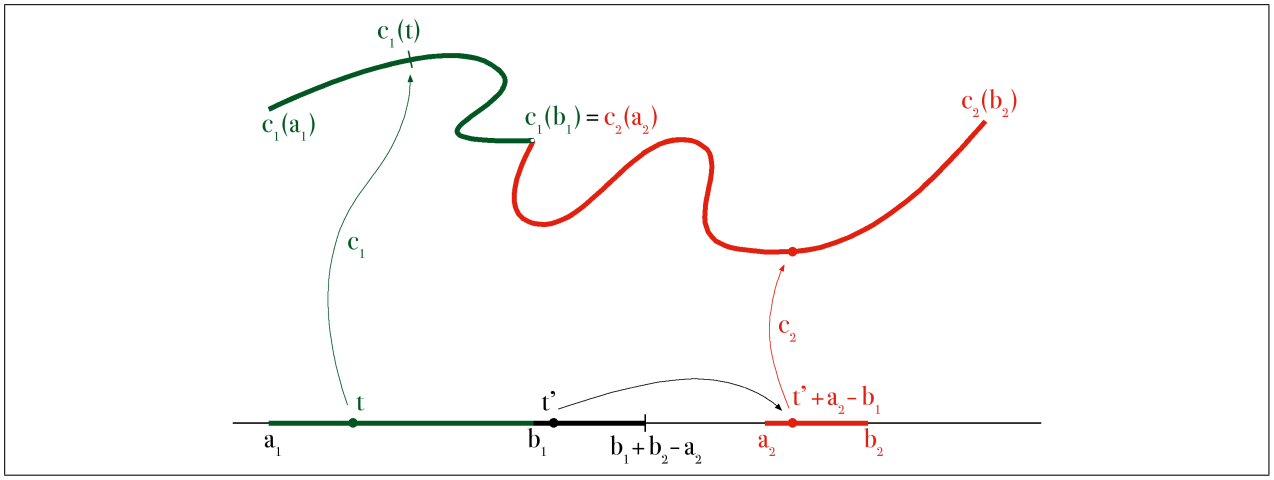


Figura 1.10: Suma de dos caminos

Dados dos caminos, una de cuyas imágenes comienza donde termina la imagen del otro ([23]), lo primero que hacemos es construir un dominio de parámetros que podamos usar para describir toda la imagen, a base de trasladar uno de los dominios para ponerlo a continuación del otro. Acto seguido hacemos una nueva traslación del segundo parámetro para poderle aplicar el segundo camino:

[22] Por ejemplo, para demostrar que las constantes pueden sacarse fuera de la integral argumentamos así

$$\int_{\boldsymbol{c}}(kf)\ ds=\int_a^b kf(\boldsymbol{c}(t))\ \|\boldsymbol{c}'(t)\|\ dt=k\int_a^b f(\boldsymbol{c}(t))\ \|\boldsymbol{c}'(t)\|\ dt=k\int_{\boldsymbol{c}} f\ ds.$$

[23] No definiremos la suma de dos caminos más que cuando se cumpla esta condición.

Definición 1.9 *Sean* $\boldsymbol{c_i} : [a_i, b_i] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, *dos caminos con la condición de que* $\boldsymbol{c_1}(b_1) = \boldsymbol{c_2}(a_2)$. *Llamaremos* ***suma*** *de* $\boldsymbol{c_1}$ *y* $\boldsymbol{c_2}$ *al camino* $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2} : [a_1, b_1 + (b_2 - a_2)] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definido por*

$$(\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2})(t) = \begin{cases} \boldsymbol{c_1}(t) & \text{si } t \leq b_1 \\ \boldsymbol{c_2}(t + (a_2 - b_1)) & \text{si } t \geq b_1. \end{cases}$$

Teorema 1.10 *La suma de caminos está* ***bien definida****. Diremos también que la definición 1.9 es* ***correcta****.*

14. Este enunciado merece un comentario aparte. Se asegura en él, y a continuación lo demostraremos, que una definición es "correcta". Pero una definición no es algo que necesite demostración, en matemáticas hay mucha libertad para definir conceptos matemáticos como uno quiera, ¿cómo se explica que aquí se tenga que comprobar que la definición "está bien"?

La explicación reside en que lo que sí se exige a una definición es que no contenga imprecisiones y que los objetos matemáticos que se manejen tengan garantizada su existencia ([24]).

En nuestra definición de camino suma no hay imprecisiones. El problema podría radicar en la existencia de la suma *como camino*: no es obvio que $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$ sea una aplicación; y, aun en el caso de que lo sea, tampoco es obvio que sea continua.

DEMOSTRACIÓN: *Para que la definición sea correcta hemos de comprobar que* $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$ *es un camino, o sea, que es una aplicación continua.*

En $t = b_1$ *hemos asignado, sorprendentemente, dos valores del camino suma. La explicación reside en que los dos valores son el mismo, gracias a la hipótesis* $\boldsymbol{c_1}(b_1) = \boldsymbol{c_2}(a_2)$. *Por tanto,* $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$ *es una aplicación.*

Para demostrar la continuidad de la aplicación $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$ *en un punto cualquiera* t *argumentamos de este modo:*

Supóngase que $a_1 \leq t < b_1$**.** $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$ *es continua por la continuidad de la aplicación* $\boldsymbol{c_1}$, *puesto que coincide con ella en un entorno de* t. *En efecto, cuando* $t_n \to t$ *existirá un* n_0 *tal que para* $n \geq n_0$, $(\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2})(t_n) = \boldsymbol{c_1}(t_n) \to \boldsymbol{c_1}(t) = (\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2})(t)$.

Supóngase que $b_1 < t \leq b_1 + b_2 - a_2$**.** $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$ *es continua por la continuidad de* $\boldsymbol{c_2}$ *y de la aplicación* $t \rightsquigarrow t + a_2 - b_1$, *puesto que coincide con la composición de ambas en un entorno de* t ([25]).

Supóngase que $t = b_1$**.** *Utilizando los mismos argumentos que en los dos casos anteriores se demuestra que*

$$\lim_{t \to b_1^-} (\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2})(t) = \boldsymbol{c_1}(b_1), \quad \lim_{t \to b_1^+} (\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2})(t) = \boldsymbol{c_2}(a_2),$$

y la conclusión de que $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$ *es continua en* b_1 *se obtiene de la hipótesis* $\boldsymbol{c_1}(b_1) = \boldsymbol{c_2}(a_2)$.

Con esto terminamos la comprobación de que la suma de caminos ha sido definida correctamente.

15. En cada una de las definiciones que encontremos a partir de ahora estaremos atentos a la posibilidad de que se den ambigüedades y a si puede asegurarse la existencia de todos los elementos que en ella se usan.

Teorema 1.11 *Si* $\boldsymbol{c_1}$ *y* $\boldsymbol{c_2}$ *son dos caminos que pueden sumarse, ambos de clase* $\mathscr{C}^1$ *a trozos, entonces también es de clase* $\mathscr{C}^1$ *a trozos el camino suma* $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$.

---

[24] Puede decirse lo mismo de modo más formal, apelando a que la imagen mediante una aplicación siempre existe y es única: en este caso, por ejemplo, diríamos que *la correspondencia que a cada par de caminos que cumplan la condición del enunciado les asocia su suma es una aplicación.*

[25] Razonemos como en el caso anterior. Si tomamos cualquier sucesión (t_n) dentro del intervalo $[a_1, b_1 + (b_2 - a_2)]$ que converja hacia t, ha de existir un n_0 a partir del cual $(\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2})(t_n) = \boldsymbol{c_2}(t_n + a_2 - b_1) \to \boldsymbol{c_2}(t + a_2 - b_1) = (\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2})(t)$.

DEMOSTRACIÓN: *No hay más que observar que si $a_i = t_i^0 < \ldots < t_i^{N_i} = b_i$ son los únicos puntos donde $\boldsymbol{c_i}$ no tiene derivada continua, de modo que las restricciones de $\boldsymbol{c_i}$ a cada intervalo $[t_i^{k-1}, t_i^k]$ son derivables con continuidad (todo ello para $i = 1, 2$), entonces el camino $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$ es también derivable con continuidad en cada uno de los intervalos cuyos extremos son dos puntos consecutivos de entre los siguientes:*

$$a_1 = t_1^0 < t_1^1 < \ldots < t_1^{N_1} = b_1 = t_2^0 - a_2 + b_1 < \\ < t_2^1 - a_2 + b_1 < \ldots < t_2^{N_2} - a_2 + b_1 = b_1 + b_2 - a_2,$$

puesto que sobre cada subintervalo son continuas las derivadas de $\boldsymbol{c_1}$, o de $\boldsymbol{c_2}$ y de $t \rightsquigarrow t + a_2 - b_1$ (según si estamos con $t \leq b_1$ o con $t \geq b_1$, respectivamente).

16. Un camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos podemos verlo como las suma de un número finito de caminos de clase $\mathscr{C}^1$. Esta observación será muy útil en algunas demostraciones.

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar la aditividad de nuestra integrales para caminos:

Teorema 1.12 *Si f es un campo escalar continuo sobre una suma $\boldsymbol{c_1} + \cdots + \boldsymbol{c_m}$ de caminos de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos,*

$$\int_{\boldsymbol{c_1}+\cdots+\boldsymbol{c_m}} f\, ds = \int_{\boldsymbol{c_1}} f\, ds + \cdots + \int_{\boldsymbol{c_m}} f\, ds.$$

DEMOSTRACIÓN: *Sin pérdida de generalidad* ([26]) *podemos suponer que los caminos son de clase $\mathscr{C}^1$* ([27]). *Haremos la demostración solamente para $m = 2$, y luego argumentaríamos por inducción sobre m, repitiendo el razonamiento que damos para $m = 2$.*

Empezamos descomponiendo la primera integral en suma de otras dos, por aplicación de la aditividad de la integral de Riemann de una variable cuando se calcula sobre dos intervalos consecutivos:

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{c_1}+\boldsymbol{c_2}} f\, ds &= \int_{a_1}^{b_1+b_2-a_2} f((\boldsymbol{c_1}+\boldsymbol{c_2})(t))\, \|(\boldsymbol{c_1}+\boldsymbol{c_2})'(t)\|\, dt = \\
&= \int_{a_1}^{b_1} f((\boldsymbol{c_1}+\boldsymbol{c_2})(t))\, \|(\boldsymbol{c_1}+\boldsymbol{c_2})'(t)\|\, dt + \int_{b_1}^{b_1+b_2-a_2} f((\boldsymbol{c_1}+\boldsymbol{c_2})(t))\, \|(\boldsymbol{c_1}+\boldsymbol{c_2})'(t)\|\, dt = \\
&= \int_{a_1}^{b_1} f(\boldsymbol{c_1}(t))\, \|\boldsymbol{c_1}'(t)\|\, dt + \int_{b_1}^{b_1+b_2-a_2} f(\boldsymbol{c_2}(t+a_2-b_1))\, \|\boldsymbol{c_2}'(t+a_2-b_1)\|\, dt = \\
&= \int_{a_1}^{b_1} f(\boldsymbol{c_1}(t))\, \|\boldsymbol{c_1}'(t)\|\, dt + \int_{a_2}^{b_2} f(\boldsymbol{c_2}(u))\, \|\boldsymbol{c_2}'(u)\|\, du = \int_{\boldsymbol{c_1}} f\, ds + \int_{\boldsymbol{c_2}} f\, ds,
\end{aligned}$$

donde en una de las integrales hemos hecho el cambio $u = t + a_2 - b_1$.

---

[26]

17. En una demostración matemática, la expresión "sin pérdida de generalidad" significa que los casos restantes se pueden reducir al que vamos a tratar.

[27] Vamos a comprobar que no hay pérdida de generalidad al suponer que los caminos son de clase $\mathscr{C}^1$. Como indicamos en la observación 16, un camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos no es más que una suma finita de caminos de clase $\mathscr{C}^1$. Si $\boldsymbol{c_i}$ no es de clase $\mathscr{C}^1$, siempre podrá ponerse de la forma $\boldsymbol{c_i^1} + \cdots + \boldsymbol{c_i^{N_i}}$, $(i = 1, \ldots, m)$, con todos los sumandos de clase $\mathscr{C}^1$. Entonces el enunciado equivaldría a

$$\int_{\substack{\boldsymbol{c_1^1}+\cdots+\boldsymbol{c_1^{N_1}}+\cdots+ \\ +\boldsymbol{c_m^1}+\cdots+\boldsymbol{c_m^{N_m}}}} f\, ds = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,N_i}} \int_{\boldsymbol{c_i^k}} f\, ds,$$

donde cada $\boldsymbol{c_i^k}$ ya es de clase $\mathscr{C}^1$, con lo que hemos reducido el caso general al que sí que vamos a demostrar.

1.2.2. Integral de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria

Pretendemos ahora resolver un problema diferente. Cuando una partícula se mueve de modo rectilíneo desde un punto $\boldsymbol{A}$ hasta un punto $\boldsymbol{B}$ bajo la acción de una fuerza constante $\boldsymbol{F}$, el trabajo realizado por $\boldsymbol{F}$ sobre la partícula se define (por motivos en los que no vamos a entrar aquí) como el producto escalar $\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$. ([117])

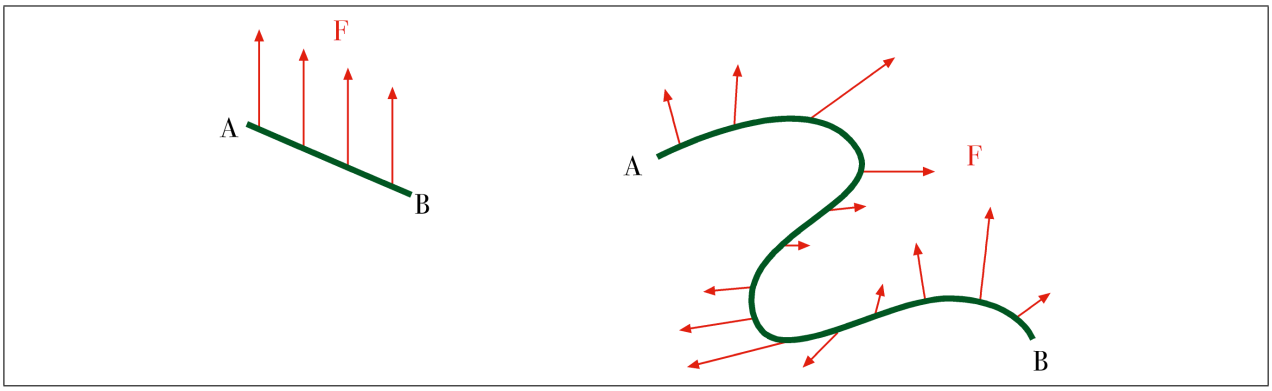


Figura 1.11: Un campo de fuerzas constante sobre un segmento y un campo de fuerzas variable sobre la imagen de una trayectoria arbitraria

En el caso de que la trayectoria recorrida por la partícula no sea recta o de que la fuerza varíe de un punto a otro del recorrido, la anterior fórmula no es aplicable, por lo que hay que buscar alguna alternativa. Lo que vamos a hacer es, en el espíritu del teorema 1.5, retocarla para darle un sentido aproximando con una trayectoria poligonal.

Tomamos una partición infinitesimal $t_0 = a < a + dt < a + 2\,dt < \ldots < a + H\,dt = b$ del intervalo $[a, b]$ (donde H es un hipernatural infinito y dt es el infinitésimo $dt = (b-a)/H$) y consideramos una aproximación de la suma de los trabajos realizados en los tramos rectos como si la fuerza fuese constante sobre cada uno de ellos, $\sum_{i=1}^{H} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t_i))\cdot[\boldsymbol{c}(t_i)-\boldsymbol{c}(t_{i-1})]$, puesto que, si suponemos que $\boldsymbol{F}$ es continuo, en cada tramo infinitesimal es indistinguible (a escala estándar) de $\boldsymbol{F}$ en su punto inicial. Y si suponemos que $\boldsymbol{c}$ es de clase $\mathscr{C}^1$, entonces a la escala del infinitesimal $1/H$ la imagen de la trayectoria no se distingue de un tramo recto en la dirección de la derivada (ver la figura 1.12). Sobre estos argumentos puede completarse una demostración de que

$$\sum_{i=1}^{H} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t_i))\cdot[\boldsymbol{c}(t_i)-\boldsymbol{c}(t_{i-1})] \approx \sum_{i=1}^{H} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t_i))\cdot\boldsymbol{c}'(t_i)\,dt.$$

Y como la segunda expresión es una suma de Riemann (infinita) de la integral de $(\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}'$, utilizamos esta integral como definición de la magnitud buscada.

Definición 1.13 *Sea $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos y sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial continuo definido al menos sobre la imagen de $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{c}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (obsérvese que la dimensión del espacio origen es la misma que la del espacio imagen). Definimos la* ***integral del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la trayectoria $\boldsymbol{c}$*** *mediante*

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t))\cdot\boldsymbol{c}'(t)\,dt.$$

También se utiliza, especialmente en algunas aplicaciones, el nombre de **circulación del campo $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la trayectoria $\boldsymbol{c}$**.

18. La notación nos recuerda que se trata de una generalización de la suma aplicada a una cantidad infinita los *elementos de longitud* infinitesimales, $d\boldsymbol{s}$.

En el anexo E damos otra interpretación más formalista del *elemento de longitud*, ver la definición E.13.

Análogas observaciones a las hechas tras la definición 1.7, de integral de un campo escalar sobre un

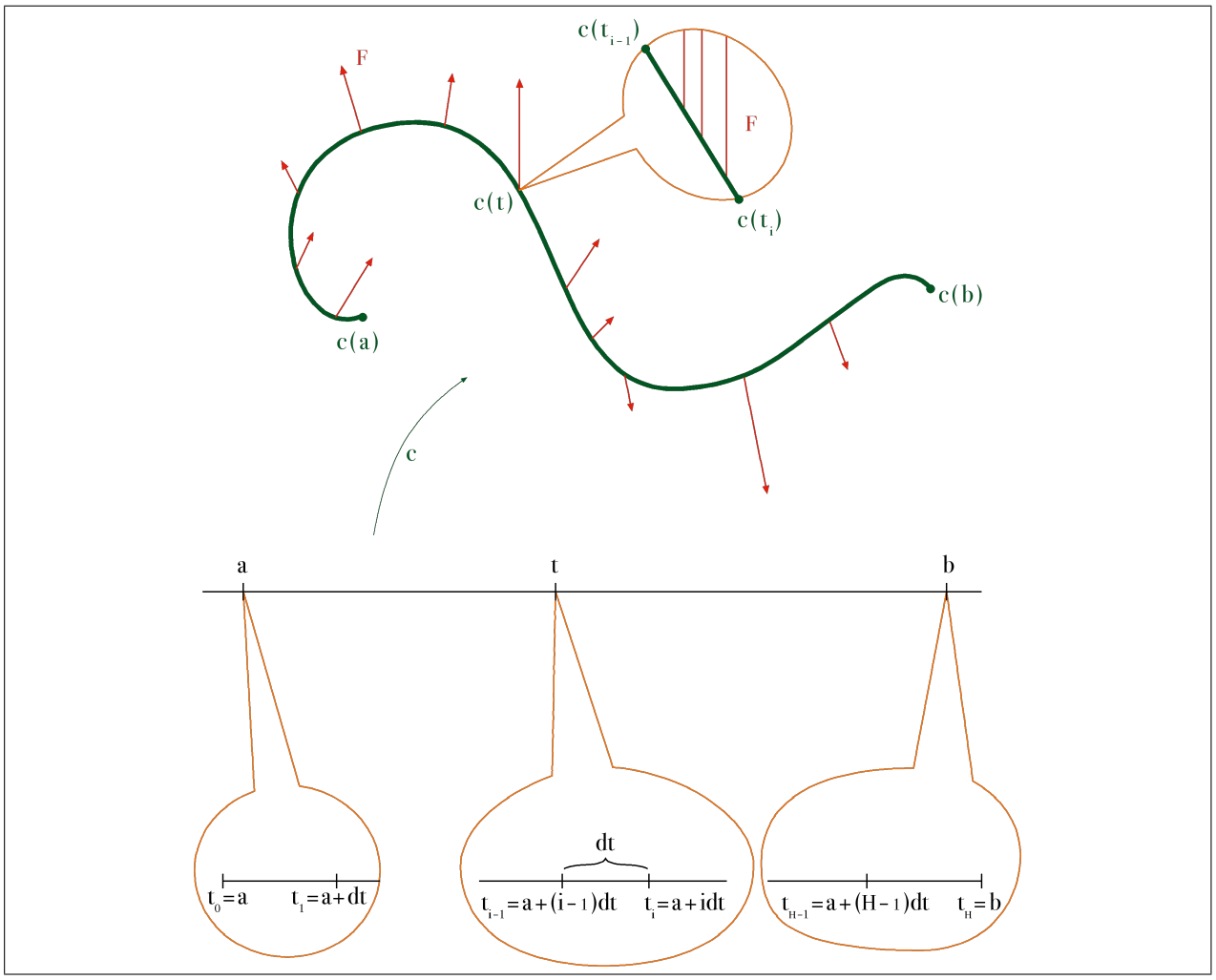


Figura 1.12: Resultado de aplicar un microscopio de potencia infinita $H = (b-a)/dt$ (cf. apartado (C.3)) a puntos del dominio del parámetro y a un punto de la imagen de la trayectoria de clase $\mathscr{C}^1$

camino, son válidas aquí: siempre que el camino sea derivable con continuidad, la integral de la derecha existe ([28]); y si solamente es de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, entonces la integral de la derecha es en realidad una suma de integrales.

Igualmente son válidas las propiedades elementales (ver la observación 43), incluida la relativa a la suma de caminos, que también para campos vectoriales se transforma en una suma de integrales:

Teorema 1.14 *Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial continuo sobre el camino suma $\boldsymbol{c_1} + \cdots + \boldsymbol{c_m}$, donde $\boldsymbol{c_1}, \ldots, \boldsymbol{c_m}$ son de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos,*

$$\int_{\boldsymbol{c_1}+\cdots+\boldsymbol{c_m}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{c_1}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \cdots + \int_{\boldsymbol{c_m}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

DEMOSTRACIÓN: *Es análoga a la de la misma propiedad para campos escalares (teorema 1.12).*

Las integrales de campos vectoriales no sólo comparten propiedades con las de campos escalares, sino que en muchos casos la integral de un campo vectorial coincide con la integral de la componente tangencial del campo:

Teorema 1.15 *Sea $\boldsymbol{c}$ un camino inyectivo y* ***regular*** *(es decir, $\boldsymbol{c}$ es una aplicación inyectiva, derivable, con derivada continua, y además la derivada $\boldsymbol{c}'$ es distinta de cero en todos los puntos). Sea $\boldsymbol{F}$ un campo*

[28] Puesto que el integrando es continuo, al ser el resultado de hacer operaciones y composiciones con funciones continuas.

vectorial continuo sobre la imagen de $\boldsymbol{c}$*. Entonces la integral de* $\boldsymbol{F}$ *a lo largo de* $\boldsymbol{c}$ *coincide con la integral a lo largo de* $\boldsymbol{c}$ *de la componente tangencial de* $\boldsymbol{F}$*:*

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, ds\ ,$$

donde $\boldsymbol{T}$ *es la* ***tangente unitaria*** *determinada por* $\boldsymbol{c}$ *en cada punto* $\boldsymbol{p}$ *de la imagen de* $\boldsymbol{c}$*,*

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{c}^{-1}(\boldsymbol{p}))}{\|\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{c}^{-1}(\boldsymbol{p}))\|}\ .$$

DEMOSTRACIÓN: *Un cálculo directo sirve para comprobar que*

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, ds = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{c}(t))\, \|\boldsymbol{c}'(t)\|\, dt = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \frac{\boldsymbol{c}'(t)}{\|\boldsymbol{c}'(t)\|} \|\boldsymbol{c}'(t)\|\, dt =$$
$$= \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt = \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

19. Al dividir por $\|\boldsymbol{c}'(t)\|$ es donde hemos aplicado la hipótesis de que la derivada de $\boldsymbol{c}$ sea no nula en todos los puntos.

No es tan evidente dónde hemos necesitado la inyectividad de $\boldsymbol{c}$. La hemos utilizado en la definición de la tangente unitaria, porque no está definida sobre el conjunto de parámetros, sino sobre los puntos de la imagen. Si el camino no fuera inyectivo podría ocurrir que pasara varias veces por el mismo punto y que la tangente unitaria en ese punto no fuese única, con lo cual no estaría bien definida (ver observación 14).

Cuando $n = 3$, la notación clásica para este tipo de integrales no es la que venimos usando, más compacta y funcional pero menos intuitiva que la clásica: llamando P, Q y R a las tres funciones componentes del campo vectorial $\boldsymbol{F}$,

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

la integral sobre el camino $\boldsymbol{c}$ se escribe a menudo como

20.
$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{c}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

El motivo que hace que sea una notación muy usada en la práctica es el siguiente. El camino $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene tres funciones componentes, que suelen denominarse con el mismo nombre que tienen las variables

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad \forall t \in [a, b],$$

(se dice "la coordenada x es función del parámetro t", etc.), con lo que se escribe formalmente $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt$. Entonces, $P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ no es más que una abreviatura de

$$\Big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big]\, dt,$$

que resulta ser el desarrollo del producto escalar que hay en la integral utilizada en la definición 1.13. Así, la notación ayuda a recordar la fórmula.

1.2.3. Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

En el estudio de funciones de una variable los intervalos juegan un papel clave como dominios de definición de las funciones. Así, por ejemplo, en nuestras integrales de una variable solamente tratamos con funciones cuyo dominio es un intervalo cerrado y acotado.

Al pasar a funciones de varias variables definidas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$), algunos de los resultados más importantes requieren que sus dominios de definición disfruten de propiedades que generalizan a algunas de las que disfrutan los intervalos cerrados o los intervalos abiertos.

Damos a continuación los conceptos que nos resultarán imprescindibles en este curso, dejando otros igualmente importantes por no tan urgentes ([29]) para la disciplina conocida como Topología.

Definición 1.16 *Un subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se llama* ***abierto (en $\mathbb{R}^n$)*** *cuando ningún punto suyo es límite de una sucesión de puntos de $U^c = \mathbb{R}^n \backslash U$. Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se llama* ***cerrado (en $\mathbb{R}^n$)*** *cuando el límite en $\mathbb{R}^n$ de cualquier sucesión que esté formada por puntos del conjunto C siempre pertenece al conjunto C.*

Si X es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se llama ***interior de X (en $\mathbb{R}^n$), $\operatorname{Int} X$,*** *al conjunto de puntos de X que no son límite de ninguna sucesión de puntos de $X^c = \mathbb{R}^n \backslash X$; y se llama* ***frontera de X (en $\mathbb{R}^n$), $\operatorname{Fr} X$,*** *al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que no pertenecen a $\operatorname{Int} X$ pero son límite de alguna sucesión de puntos de X.*

Es inmediato que $\mathbb{R}^n$ es, a la vez, abierto y cerrado. Y que hay subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que no son ni abiertos ni cerrados.

También es trivial que si C es cerrado entonces $\operatorname{Fr} C = C \backslash \operatorname{Int} C$.

Puede demostrarse que para que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sea abierto es suficiente, *pero no es necesario*, que esté definido por un número finito de conjunciones o disyunciones de desigualdades estrictas entre funciones continuas de n variables cuyos dominios sean todos abiertos. Y que para que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sea cerrado es suficiente *pero no es necesario*, que esté definido por un número finito de conjunciones o disyunciones de desigualdades no estrictas entre funciones continuas de n variables cuyos dominios sean todos cerrados. Ver el teorema J.1.

21. Siempre que hablemos de una función de n variables cuyo dominio de definición D no sea abierto, al decir que es **de clase $\mathscr{C}^1(D)$** querremos decir que la función está en realidad definida sobre un abierto U que contiene a D y es de clase $\mathscr{C}^1(U)$. Con ello garantizaremos que la diferencial es única en todos los puntos de D.

Un teorema de Weierstrass que nos será muy útil es que una función $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sobre un conjunto cerrado y acotado $C \subset \mathbb{R}^n$ siempre está acotada y además alcanza su máximo y su mínimo ([30]).

1.2.4. Teorema fundamental del Cálculo generalizado

Dada la definición de integral de un campo vectorial sobre un camino como integral de Riemann de otra función, es razonable preguntarse si existe alguna generalización a este caso de la regla de Barrow. La única dificultad es identificar qué es lo que ahora jugará el papel que jugaba la derivada de una función en la regla de Barrow. El siguiente teorema demuestra que en este caso es el gradiente lo que sustituye a la derivada ([31]).

Teorema 1.17 (fundamental del Cálculo generalizado) *Sea f un campo escalar, diferenciable con continuidad y definido sobre la imagen del camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{s} = f(\boldsymbol{c}(b)) - f(\boldsymbol{c}(a)).$$

[29] Como el de *conjunto conexo*.

[30] No demostraremos esta propiedad. Ni tampoco el hecho de que para funciones definidas sobre un abierto la diferencial, si existe, es única (ver la observación 21).

[31] Recuérdese que el **gradiente** de un campo escalar $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, es el campo vectorial cuyas componentes son las derivadas parciales de f,

$$\boldsymbol{grad}\, f = \boldsymbol{\nabla} f : U \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{p} \rightsquigarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}) \right) ,$$

que en el caso de que n sea igual a 1 coincide con la función derivada de f, f'.

DEMOSTRACIÓN: *También aquí podemos suponer que el camino $\boldsymbol{c}$ es derivable con continuidad, al igual que hicimos en la demostración del teorema 1.12* ([32]).

La demostración se reduce entonces a un simple cálculo, en el que utilizamos la regla de Barrow y la regla de la cadena para una composición de funciones diferenciables del tipo $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt = \int_a^b (f \circ \boldsymbol{c})'(t)\, dt = (f \circ \boldsymbol{c})(b) - (f \circ \boldsymbol{c})(a).$$

22. Una primera consecuencia del teorema fundamental del Cálculo generalizado es que la integral de un gradiente sobre un camino no depende propiamente del camino, sino solamente del punto inicial y del punto final. Volveremos sobre esta propiedad en la sección 1.4.

1.2.5. Cambios de parámetro

Nuestro enfoque en todo este apartado ha sido hasta ahora integrar campos vectoriales o campos escalares sobre un determinado recorrido de una curva, no sobre la curva misma (observar que todavía no hemos dado una definición formal de "curva", estamos apelando al concepto intuitivo). Es de suponer que este planteamiento se deba a que distintos recorridos, distintas trayectorias, de la misma curva den lugar también a distintas integrales. De no ser así, sería razonable sospechar que habríamos definido las integrales sobre una curva a base de utilizar cualquier recorrido suyo.

El siguiente ejemplo nos dará una pista de lo que ocurre cuando se recorre una misma imagen (la circunferencia unidad, $x^2 + y^2 = 1$) en sentidos opuestos.

Ejemplo 1.18 Calcular la integral de $x\,dy - y\,dx$ sobre $\boldsymbol{c_1}(t_1) = (\cos t_1, \sin t_1)$ y sobre $\boldsymbol{c_2}(t_2) = (\cos t_2, -\sin t_2)$ $(0 \le t_1, t_2 \le 2\pi)$.

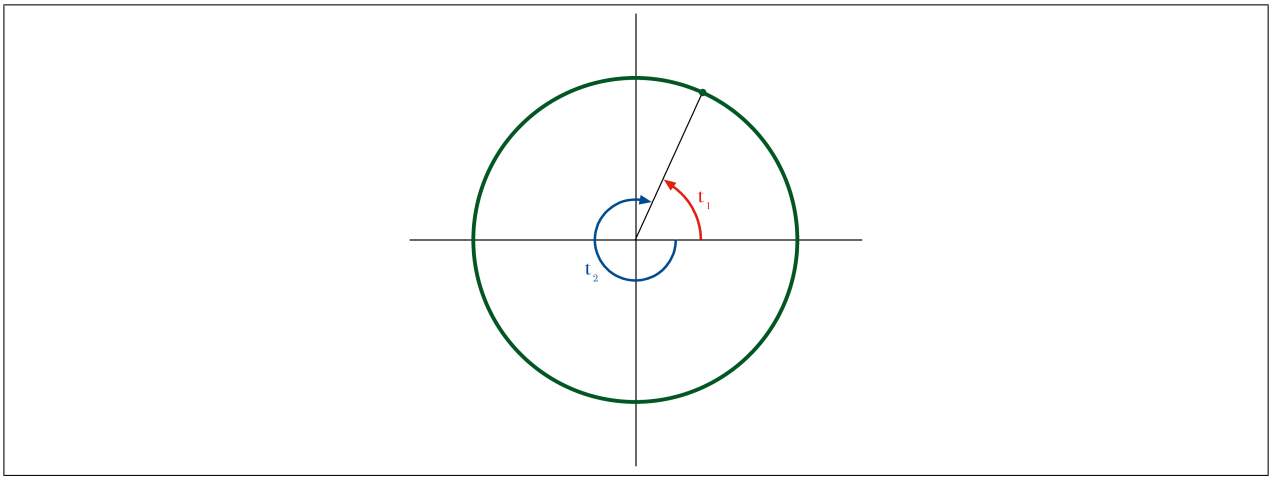


Figura 1.13: Las parametrizaciones de la circunferencia unidad utilizadas en el ejemplo 1.18

Todos los cálculos son muy sencillos:

$$\int_{\boldsymbol{c_1}} x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t_1 + \sin^2 t_1)\, dt_1 = \int_0^{2\pi} dt_1 = 2\pi,$$

$$\int_{\boldsymbol{c_2}} x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t_2 - \sin^2 t_2)\, dt_2 = -\int_0^{2\pi} dt_2 = -2\pi. \qquad \blacksquare$$

[32] En caso de que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c^1} + \cdots + \boldsymbol{c^N}$, con todos los $\boldsymbol{c^k}$ de clase $\mathscr{C}^1$, y que supongamos demostrado el resultado para cada $\boldsymbol{c^k}$,

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{s} = \sum_k \int_{\boldsymbol{c^k}} \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{s} = \sum_k \left[f \circ \boldsymbol{c^k}(t^k) - f \circ \boldsymbol{c^k}(t^{k-1}) \right] = f \circ \boldsymbol{c^N}(b) - f \circ \boldsymbol{c^1}(a) = f \circ \boldsymbol{c}(b) - f \circ \boldsymbol{c}(a).$$

Al tratarse de una imagen conocida, hemos sabido parametrizarla en dos sentidos de recorrido diferentes incluso utilizando el mismo dominio de parámetros (si bien en cada caso el parámetro representa un ángulo distinto). El siguiente procedimiento generaliza lo que hemos hecho en el planteamiento del ejemplo: nos servirá siempre que tengamos sobre una curva cualquiera una trayectoria y queramos pasar a otra con idéntico recorrido pero en sentido opuesto, y con el mismo dominio de parámetros.

Definición 1.19 *Si* $\boldsymbol{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es cualquier camino, se llama* ***camino opuesto de c*** *a* $\boldsymbol{c_{op}} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *definido por*

$$\boldsymbol{c_{op}}(t) = \boldsymbol{c}(a+b-t).$$

El paso de una trayectoria con un parámetro a otra trayectoria con la misma imagen pero con otro parámetro ocurre en más contextos que en los de cambio de sentido. Piénsese, por ejemplo, en el recorrido de una misma curva en el mismo sentido pero a velocidades diferentes. En orden a manejar integrales sobre la misma imagen pero obtenidas a través de trayectorias diferentes, formalizamos la situación de la siguiente manera.

Definición 1.20 *Sean* $\boldsymbol{c_1} : I_1 = [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c_2} : I_2 = [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *dos caminos de clase* $\mathscr{C}^1$ *a trozos y con la misma imagen, es decir,* $\boldsymbol{c_1}(I_1) = \boldsymbol{c_2}(I_2)$. *Diremos que la función* $h : I_2 \longrightarrow I_1$ *es un* ***cambio de parámetro(s)*** *cuando* $\boldsymbol{c_2} = \boldsymbol{c_1} \circ h$ *y además* h *cumple las siguientes condiciones:*

- *es biyectiva;*
- *es de clase* $\mathscr{C}^1$ *a trozos;*
- *su derivada (ya sea bilateral o lateral) es no nula en todos los puntos.*

Diremos que $\boldsymbol{c_2}$ *es una* ***reparametrización*** *de* $\boldsymbol{c_1}$ *cuando existe un cambio de parámetros que convierte el parámetro de* $\boldsymbol{c_1}$ *en el parámetro de* $\boldsymbol{c_2}$.

Diagrama de un cambio de parámetros:

$$\begin{tikzcd}
I_1 = [a_1, b_1] \arrow[dr, "\boldsymbol{c_1}"] & \\
& \boldsymbol{c_1}(I_1) = \boldsymbol{c_2}(I_2) \\
I_2 = [a_2, b_2] \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "\boldsymbol{c_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

23. En otros textos se utilizan definiciones similares pero no totalmente iguales.

24. Las condiciones impuestas a los cambios de parámetros nos permiten asegurar que la relación "$\boldsymbol{c_2}$ es una reparametrización de $\boldsymbol{c_1}$" es de equivalencia ([33]).

Ejemplo 1.21 (continuación del 1.18.) El camino $\boldsymbol{c_2}$ es una reparametrización de $\boldsymbol{c_1}$. El cambio de parámetros es $t_1 = h(t_2) = 2\pi - t_2$, con derivada constantemente igual a -1. ■

Ejemplo 1.22 La gráfica de $y = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$ puede parametrizarse de modo obvio tomando a la x como parámetro, $\boldsymbol{c_1}(x) = (x, |x|)$, y entonces la parametrización no tiene derivada en el origen (el punto que da lugar al vértice de la gráfica).

Pero también puede parametrizarse mediante $\boldsymbol{c_2} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{c_2}(t) = (t^3, |t^3|)$ y entonces sí que existe

[33] Esta afirmación no es evidente. Para demostrarla se utilizan, entre otros, el teorema de la función inversa para funciones reales de una variable.

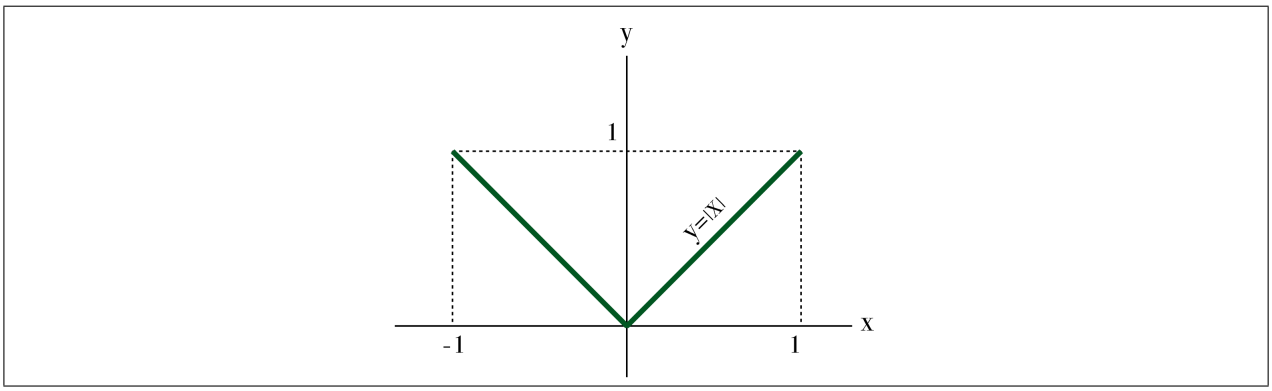


Figura 1.14: Gráfica de $|x|$, con $-1 \leq x \leq 1$

$\boldsymbol{c_2}'(0) = \mathbf{0}$ ([34]). La existencia de derivada no contradice la presencia del vértice, puesto que se trata de la imagen de la función $\boldsymbol{c_2}$ y no de la gráfica de la función $\boldsymbol{c_2}$. Y como la derivada es nula no apunta ninguna dirección de una tangente en el vértice.

La biyección $h : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ que relaciona las dos parametrizaciones y cumple $\boldsymbol{c_2} = \boldsymbol{c_1} \circ h$ es $h(t) = t^3$, que tiene derivada nula en $t = 0$, y por tanto no es un cambio de parámetros, $\boldsymbol{c_2}$ no es una

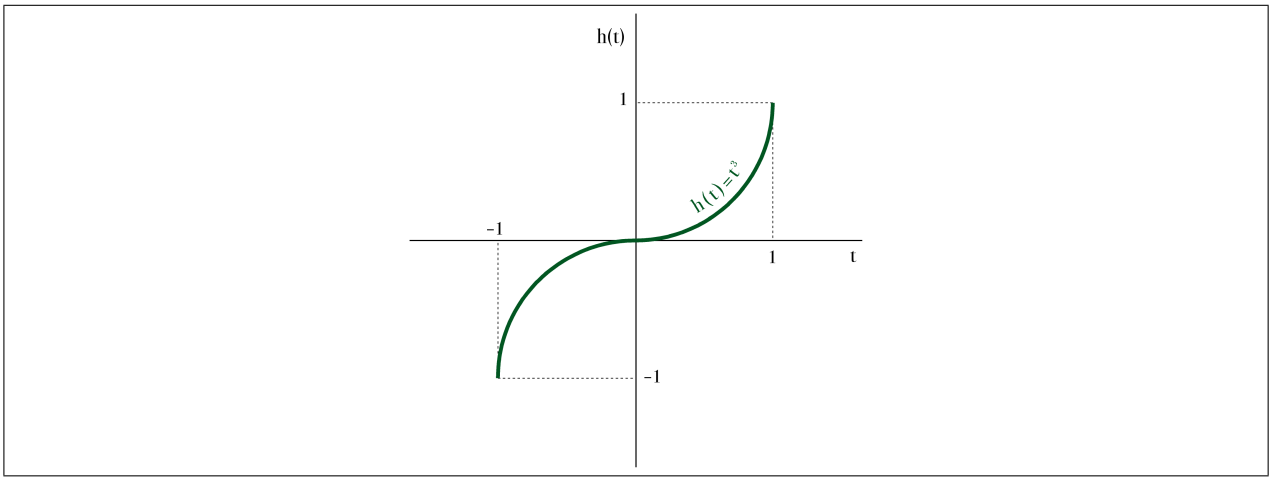


Figura 1.15: Gráfica de t^3, con $-1 \leq t \leq 1$

reparametrización de $\boldsymbol{c_1}$. ■

25. No perder de vista que ahora no tratamos en general con *gráficas* de funciones, sino con *imágenes* de funciones.

Dos funciones diferentes no pueden compartir la misma gráfica, pero sí que pueden compartir la misma imagen.

Cuando la gráfica de una función escalar de una variable presenta una singularidad en forma de vértice, podemos estar seguros de que la función no es derivable en el punto al que corresponde el vértice. En cambio, la imagen puede tener un vértice sin que la función deje de ser derivable, como muestra el ejemplo 1.22.

[34] La derivada de una función vectorial se calcula componente a componente. La primera componente de $\boldsymbol{c_2}$, $t \rightsquigarrow t^3$, es derivable con derivada $3t^2$, que en el origen es nula. Para obtener la derivada de la segunda componente, $t \rightsquigarrow |t^3|$, no podemos aplicar las reglas de derivación, por lo que calculamos los límites laterales del cociente de incrementos, lo que nos permite distinguir los dos casos, t positivo y t negativo:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|t^3|}{t} = \lim_{t\to 0^+} t^2 = 0; \qquad \lim_{t\to 0^-} \frac{-t^3}{t} = \lim_{t\to 0^-} -t^2 = 0.$$

El hecho de que h sea inyectiva y continua obliga a que sea estrictamente monótona ([35]), por lo que

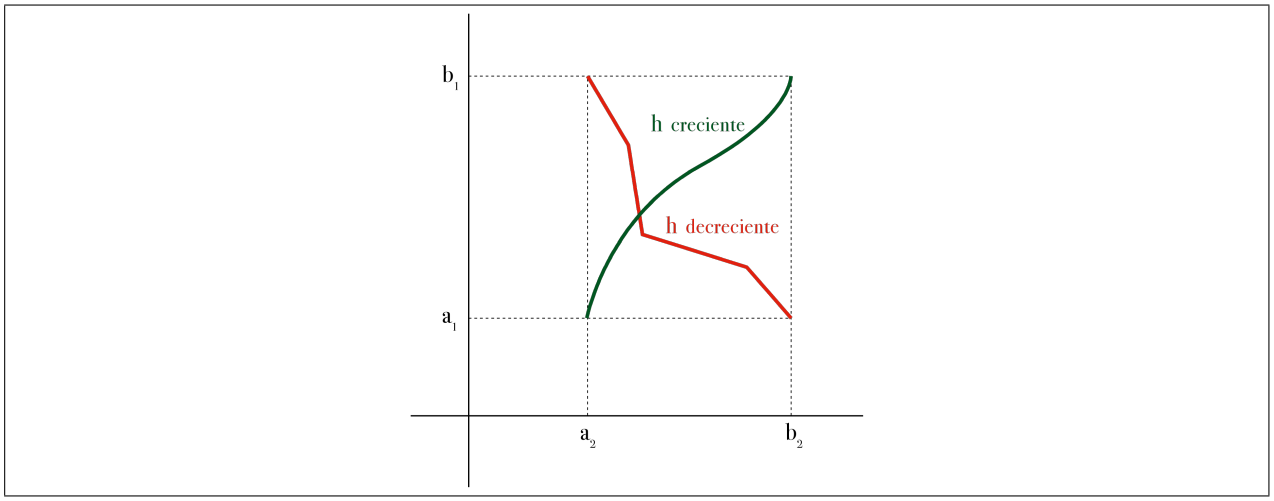


Figura 1.16: Justificación: Como h es continua y biyectiva entre dos intervalos cerrados y acotados, su gráfica no puede dar saltos ni repetir valores y ha de llegar a los dos extremos, con lo que no hay más que dos posibilidades: o es estrictamente creciente o es estrictamente decreciente

necesariamente se tendrá una de las dos posibilidades siguientes:

1. h es estrictamente creciente, y $h'(t_2) > 0$ en todos los puntos $t_2 \in I_2$ (como derivada lateral o como derivada bilateral);

2. h es estrictamente decreciente, y $h'(t_2) < 0$ en todos los puntos $t_2 \in I_2$ (como derivada lateral o como derivada bilateral).

Definición 1.23 *En el primer caso diremos que h* ***conserva la orientación*** *o que $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$* ***tienen la misma orientación****, y en el segundo caso que h* ***invierte la orientación*** *o que $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$* ***tienen orientaciones opuestas****.*

26. Nótese que no hemos definido, por ahora, qué se entiende por orientación.

La biyectividad de h garantiza que los extremos del intervalo I_1 se corresponden con los extremos del intervalo I_2; es decir, que se tiene una y sólo una de las dos posibilidades siguientes:

- si h es creciente, entonces $h(a_2) = a_1$ y $h(b_2) = b_1$, por lo que $\boldsymbol{c_2}(a_2) = \boldsymbol{c_1}(a_1)$ y $\boldsymbol{c_2}(b_2) = \boldsymbol{c_1}(b_1)$;

- y si h es decreciente, entonces $h(a_2) = b_1$ y $h(b_2) = a_1$, por lo que $\boldsymbol{c_2}(a_2) = \boldsymbol{c_1}(b_1)$ y $\boldsymbol{c_2}(b_2) = \boldsymbol{c_1}(a_1)$.

Obsérvese que en el caso especial de que la imagen de la trayectoria sea cerrada, es decir, cuando $\boldsymbol{c_1}(a_1) = \boldsymbol{c_1}(b_1)$, la mera correspondencia entre los puntos "extremos" de la imagen (que ahora no son verdaderos extremos) no nos aclara si hay o no cambio de orientación. En otras palabras, puede ocurrir, por ejemplo, que $\boldsymbol{c_2}(a_2) = \boldsymbol{c_1}(a_1)$ y $\boldsymbol{c_2}(b_2) = \boldsymbol{c_1}(b_1)$ pero que h sea decreciente.

1.2.6. Efectos de los cambios de parámetros en el valor de las integrales

Teorema 1.24 *Sea f un campo escalar continuo sobre la imagen de la trayectoria $\boldsymbol{c_1}$ de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, y sea $\boldsymbol{c_2}$ una reparametrización de $\boldsymbol{c_1}$. Entonces*

$$\int_{\boldsymbol{c_2}} f\, ds = \int_{\boldsymbol{c_1}} f\, ds.$$

[35] Para una demostración, ver, por ejemplo, [1], ejercicio 4.62. Y para una justificación, la figura 1.16.

DEMOSTRACIÓN: *Supondremos en primer lugar que* $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ *y* h *son las tres diferenciables con continuidad. Entonces la regla de la cadena nos garantiza que (notaciones como en la definición 1.20)* $\boldsymbol{c_2}'(t) = h'(t)\boldsymbol{c_1}'(h(t))$ *y por tanto* $\|\boldsymbol{c_2}'(t)\| = |h'(t)|\,\|\boldsymbol{c_1}'(h(t))\|$. *Aplicando ahora la fórmula del cambio de variable para integrales de funciones de una variable (apartado 1.1.3),*

$$\int_{\boldsymbol{c_2}} f\,ds = \int_{a_2}^{b_2} f(\boldsymbol{c_2}(t))\|\boldsymbol{c_2}'(t)\|\,dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\boldsymbol{c_1}(h(t))|h'(t)|\,\|\boldsymbol{c_1}'(h(t))\|\,dt =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\boldsymbol{c_1}(u))\|\boldsymbol{c_1}'(u)\|\,du = \int_{\boldsymbol{c_1}} f\,ds,$$

donde en la penúltima igualdad hemos hecho el cambio $u = h(t)$ *y para probar la igualdad hemos distinguido dos casos posibles, a saber,*

- h *creciente. Entonces,* $|h'(t)| = h'(t)$, $h(a_2) = a_1$ *y* $h(b_2) = b_1$, *con lo que la igualdad resulta obvia.*
- h *decreciente. Entonces,* $|h'(t)| = -h'(t)$, $h(a_2) = b_1$ *y* $h(b_2) = a_1$, *con lo que*

$$\int_{a_2}^{b_2} f(\boldsymbol{c_1}(h(t))|h'(t)|\,\|\boldsymbol{c_1}'(h(t))\|\,dt = -\int_{b_1}^{a_1} f(\boldsymbol{c_1}(u))\|\boldsymbol{c_1}'(u)\|\,du = \int_{a_1}^{b_1} f(\boldsymbol{c_1}(u))\|\boldsymbol{c_1}'(u)\|\,du.$$

A partir de lo que hemos demostrado hasta ahora puede deducirse el caso en que alguna (o varias) de las funciones $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ *y* h *sean solamente de clase* $\mathscr{C}^1$ *a trozos* ([36]).

Teorema 1.25 *Sea* $\boldsymbol{F}$ *un campo vectorial continuo sobre la imagen de la trayectoria* $\boldsymbol{c_1}$ *de clase* $\mathscr{C}^1$ *a trozos; y sea* $\boldsymbol{c_2}$ *una reparametrización de* $\boldsymbol{c_1}$. *Entonces*

$$\int_{\boldsymbol{c_2}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \pm\int_{\boldsymbol{c_1}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s},$$

donde el signo depende de si $\boldsymbol{c_1}$ *y* $\boldsymbol{c_2}$ *tienen o no la misma orientación.*

DEMOSTRACIÓN: *La demostración es totalmente análoga a la del teorema anterior, 1.24. El único cambio resaltable es que ahora*

$$\int_{\boldsymbol{c_2}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{a_2}^{b_2} f(\boldsymbol{c_2}(t))\cdot\boldsymbol{c_2}'(t)\,dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\boldsymbol{c_1}(h(t))\cdot\boldsymbol{c_1}'(h(t))h'(t)\,dt =$$

$$= \pm\int_{a_1}^{b_1} f(\boldsymbol{c_1}(u))\cdot\boldsymbol{c_1}'(u)\,du = \pm\int_{\boldsymbol{c_1}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s},$$

donde el signo depende de si h' *es positiva o negativa.*

---

[36] Pasamos ahora al caso general, en el que $\boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c_2}$ y h solamente son de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos. La estrategia de la demostración consistirá en descomponer los caminos $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$ en sumas de caminos de clase $\mathscr{C}^1$ con la condición adicional de que también la restricción del cambio de parámetros h sea un cambio de parámetros de clase $\mathscr{C}^1$ para cada sumando.

En I_2 hay un conjunto finito de puntos, F_2, donde o la función h o la función $\boldsymbol{c_2}$ incumplen las condiciones para ser de clase $\mathscr{C}^1$. Y en I_1 hay un conjunto finito (cuando decimos conjunto finito admitimos la posibilidad de que sea vacío), F_1, donde $\boldsymbol{c_1}$ incumple la condición de clase $\mathscr{C}^1$.

En I_1 consideramos el conjunto $F_1 \cup h(F_2)$, y en I_2 el conjunto $F_2 \cup h^{-1}(F_1)$, ambos finitos y homólogos mediante h, que determinan sendas particiones en I_1 e I_2. Aplicamos el resultado ya probado a cada una de los subintervalos de I_1 e I_2 así obtenidos y con ello terminamos la demostración, gracias al teorema 1.12.

27. Suele decirse que la integral de un campo vectorial sobre un camino es una **integral orientada**, porque depende del sentido de recorrido, mientras que la de un campo escalar no es orientada, porque es independiente del sentido de recorrido.

Esto es congruente con el hecho de que una integral de un campo escalar positivo siempre es positiva ([37]), mientras que no hay un resultado similar en integrales de campos vectoriales.

[37] Puesto que en la integral de la definición 1.7 todos los factores que aparecen en el integrando son positivos.

1.3 INTEGRALES SOBRE CURVAS

En cierta clase de problemas que traten de una curva nos interesará la parametrización, no sólo su imagen (por ejemplo, cuando analicemos el recorrido de un objeto en movimiento, su velocidad, etc.), mientras que en otros sólo querremos recurrir a una trayectoria de modo auxiliar porque no será esencial a la cuestión que estamos estudiando (por ejemplo, al medir una longitud). En esta sección el objeto sobre el que integraremos será una curva en sí misma, no una parametrización suya.

Supóngase que se tiene una curva con puntos múltiples, como una lemniscata de Bernoulli o un folium de Descartes. Pueden parametrizarse de varias maneras, como todas las curvas, pero al tener un punto múltiple

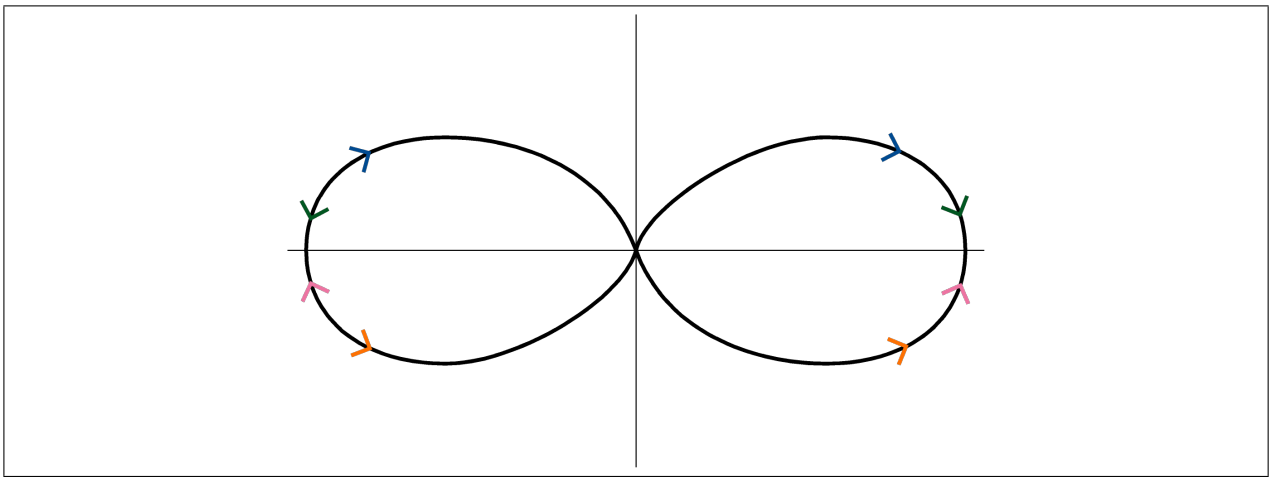


Figura 1.17: Cuatro sentidos de recorrido para la lemniscata $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$, conjugando las dos posibilidades de orientación en las dos mitades (seguir cada uno de los cuatro colores)

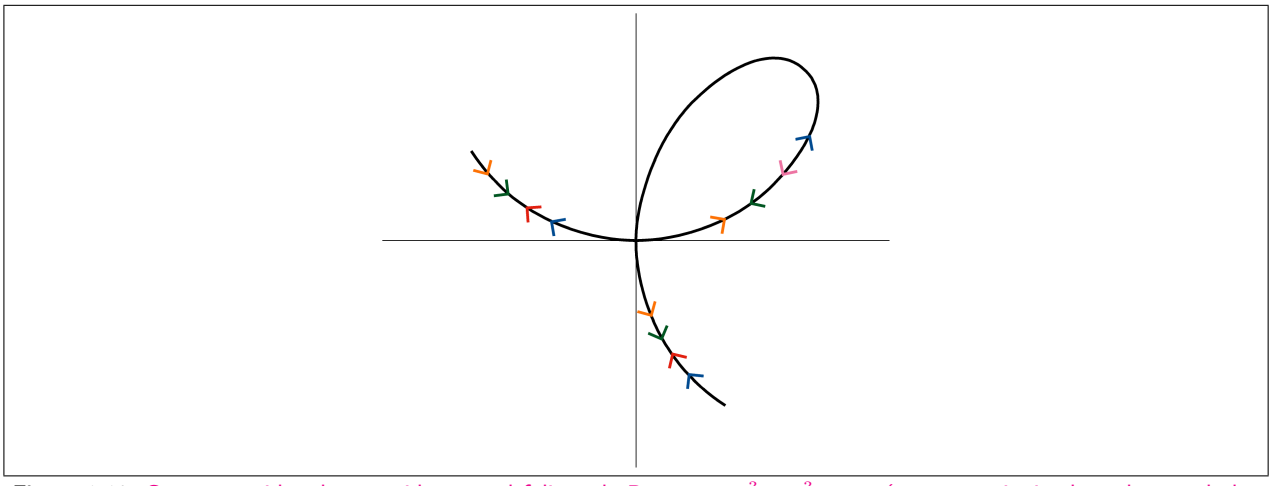


Figura 1.18: Cuatro sentidos de recorrido para el folium de Descartes $x^3 + y^3 = xy$ (recórrase siguiendo cada uno de los cuatro colores)

aparecen más de dos sentidos de recorrido, lo que complica su estudio. Por motivos como éste, no daremos una teoría general de integrales sobre curvas, que sería un objetivo excesivamente ambicioso. Nos limitaremos a dos tipos especiales de curvas sobre las que estamos en condiciones de comprender las demostraciones (aunque por motivos de calendario no las demos) y que serán suficientes para nuestras aplicaciones.

Definición 1.26

1. *Una* ***curva simple en*** $\mathbb{R}^n$, *C, es la imagen de un camino* $\mathbf{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *que es una función inyectiva y* ***regular a trozos*** *(o sea, que es de clase* $\mathscr{C}^1$ *a trozos y su derivada, lateral o bilateral, es no nula en todos los puntos).*

   Cuando hablemos de una ***parametrización*** *o de una* ***representación paramétrica*** *de una curva simple entenderemos que nos referimos a un camino que cumple todas estas condiciones.*

   Los puntos $\mathbf{c}(a)$ *y* $\mathbf{c}(b)$ *de C son los* ***extremos*** *de la curva simple C* ([38]).

2. *Una* ***curva cerrada simple en*** $\mathbb{R}^n$, *C, es la imagen de un camino* $\mathbf{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *regular a trozos que es una función inyectiva sobre* $[a, b)$ *y verifica que* $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$.

   Cuando hablemos de una ***parametrización*** *o de una* ***representación paramétrica*** *de una curva cerrada simple entenderemos que nos referimos a un camino que cumple todas estas condiciones.*

Observar que una curva cerrada simple no es una curva simple, de modo que la expresión "cerrada simple" hay que entenderla como un todo.

La **suma de dos curvas simples, $C = C_1 + C_2$** es la imagen de un camino que sea suma de sendas parametrizaciones de C_1 y C_2, siempre que estas parametrizaciones se puedan sumar, claro. Puede que $C_1 + C_2$ sea una curva simple, pero también puede ser una curva cerrada simple, o no ser ninguna de las dos cosas, todo depende de las intersecciones que haya entre C_1 y C_2.

El siguiente resultado garantiza que tanto para las curvas simples como para las curvas cerradas simples pueden definirse dos y sólo dos orientaciones diferentes.

Teorema 1.27 *Las curvas simples y las curvas cerradas simples tienen la siguiente propiedad: dada una parametrización suya, cualquier otra parametrización de la misma curva es o una reparametrización que conserva la orientación o una reparametrización que invierte la orientación.*

★ Aun para los dos casos especialmente sencillos de curvas que nosotros tratamos, las demostraciones de la tesis del teorema 1.27 son complicadas. Consular una demostración en [2], desde el teorema 2.6.23 hasta el ejemplo 2.6.31 (para las curvas simples) y en [2], teoremas 6.2.10 y 6.2.12 (para las curvas cerradas simples).

Como consecuencia del teorema 1.27, todas las parametrizaciones de una misma curva simple pueden dividirse en dos clases, con el criterio de que dos parametrizaciones pertenecen a la misma clase cuando el cambio de parámetros es creciente y pertenecen a distinta clase cuando el cambio de parámetros es decreciente. Cada una de estas dos clases se llama **orientación** de la curva simple. De la misma forma se define una orientación de una curva cerrada simple.

Definición 1.28 *Una* ***curva (simple o cerrada simple) orientada*** *es el resultado de asociar a la curva una de las dos orientaciones posibles.*

Las parametrizaciones que pertenecen a la clase seleccionada se dice que son ***compatibles con la orientación****.*

Para una curva simple orientada, llamaremos ***punto inicial de la curva*** *(respectivamente,* ***punto final de la curva****) al punto inicial (respectivamente, punto final) de una cualquiera de sus parametrizaciones compatibles* ([39]).

Un curva orientada, tanto si es simple como si es cerrada simple, se denota por C^+ o por C^-. La única condición para elegir el superíndice $+$ o el $-$ es que, para la misma curva C, las curvas orientadas C^+ y C^- tengan orientaciones opuestas, es decir, que para pasar de una parametrización de C^+ a una de C^-, o viceversa, el cambio de parámetro sea decreciente.

28. La asignación del signo $+$ o del signo $-$ es, en principio, totalmente discrecional.

[38] Argumentando como hicimos a continuación del ejemplo 1.22 y observando que la aplicación $\mathbf{c_2}^{-1} \circ \mathbf{c_1}$ es continua y biyectiva, se demuestra que el conjunto $\{\mathbf{c}(a), \mathbf{c}(b)\}$ es independiente de la parametrización de C.

[39] Dejamos como ejercicio demostrar que la definición de punto inicial y de punto final de una curva orientada es correcta.

Definición 1.29 *Dado un campo escalar continuo f sobre una curva simple o sobre una curva cerrada simple C, $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$, la* ***integral del campo sobre la curva*** *es la integral del campo sobre cualquier parametrización de la curva. Notación: $\int_C f\, ds$.*

Y dado un campo vectorial continuo $\boldsymbol{F}$ sobre una curva simple orientada o sobre una curva cerrada simple orientada, $\boldsymbol{F} : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$, la ***integral del campo sobre la curva orientada*** *C^+ es la integral del campo sobre cualquier parametrización de C^+, es decir, sobre una parametrización de la curva C que sea compatible con la orientación de C^+. Notación: $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.*

En coherencia con la notación introducida en la observación 20, pondremos también $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{C^+} F_1\, dx_1 + \cdots + F_n\, dx_n$.

Tal como está enunciada la definición 1.29, resulta que para definir *la integral de un campo escalar o de un campo vectorial sobre una curva* se toma una cierta parametrización de la curva (de las que tenemos una infinidad para elegir) y se utiliza esa parametrización para calcular la integral. Así que se ha dejado un elemento al azar que podría dar lugar a una indeterminación del concepto: ¿qué ocurre si al elegir dos parametrizaciones resulta que el valor de la integral es distinto?, ¿cuál será entonces el valor de la integral sobre la curva?

Corolario 1.30 *Gracias a los teoremas 1.24, 1.25 y 1.27, la definición 1.29 es correcta. Y además, con los datos como en la definición 1.29, la integral de un campo escalar f sobre una curva C no depende de la orientación de ésta, mientras que la integral de un campo vectorial F sí que depende:*

$$\int_{C^-} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

DEMOSTRACIÓN: *Consideremos la integral de un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ sobre una curva simple (o cerrada simple) orientada C^+. Por la definición 1.26, la curva C, sin orientar, tiene alguna parametrización $\boldsymbol{c}$. Si $\boldsymbol{c}$ no es una de las parametrizaciones de la orientación de C^+, entonces su opuesta $\boldsymbol{c_{op}}$ tiene que ser necesariamente orientación de C^+, gracias al teorema 1.27 (tal como se argumentó cuando se dio la definición de orientación). Así hemos comprobado que siempre hay alguna parametrización compatible con la orientación de C^+.*

Si ahora tomamos dos parametrizaciones de la curva C, entonces el teorema 1.25 garantiza que si ambas son compatibles con la orientación de C^+, la integral es la misma, lo que termina la comprobación de que la definición 1.29 es correcta para el caso de integrales de campos vectoriales. Y, por el mismo teorema, las integrales toman valores opuestos en el caso de que cada una de las dos parametrizaciones pertenezca a una orientación.

Para las integrales de campos escalares, el razonamiento es similar, aplicando el teorema 1.24 en lugar del teorema 1.25 y sin necesidad de distinguir los casos en que dos parametrizaciones pertenezcan a distinta orientación.

Para la integral sobre una curva cerrada se utiliza también el símbolo $\oint$, en lugar del símbolo $\int$, especialmente en el análisis de funciones de variable compleja.

Para curvas simples y para curvas cerradas simples podemos dar ahora una definición de su longitud:

Definición 1.31 *Si $C \subset \mathbb{R}^n$ es o una curva simple o una curva cerrada simple, llamaremos* ***longitud de C*** *a la integral de la función constantemente igual a 1 sobre C:*

$$\ell(C) = \int_C ds = \int_{\boldsymbol{c}} ds = \int_a^b \|\boldsymbol{c}'(t)\|\, dt,$$

donde $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una parametrización de C.

La última definición requiere una explicación que legitime el uso que hacemos en ella de la palabra longitud. Para ello recurrimos al teorema 1.5 y observamos que la integral de la función constantemente igual a 1 sobre un camino es igual al límite de las longitudes de unas poligonales inscritas en la imagen del camino (ver figura 1.7). También podemos imaginar, sobre una curva C que esté contenida en un plano (ver figura 1.19), el conjunto comprendido entre C y la gráfica de la función constantemente igual a 1 como

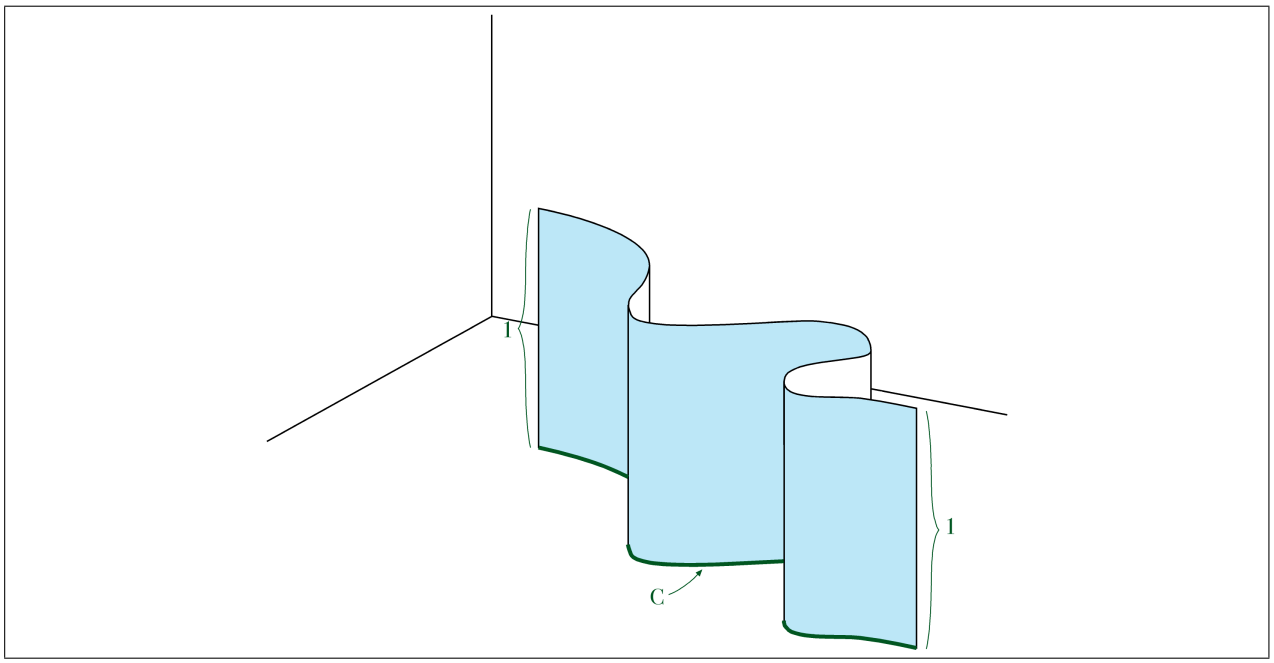


Figura 1.19: La integral de 1 sobre $C \subset \mathbb{R}^2$ podemos considerarla como una forma de medir el área de la parte coloreada

una superficie que, una vez rectificada la curva (enderezándola, pero sin estirarla ni encogerla), sería un rectángulo de altura 1 y de base $\ell(C)$, con lo que su área sería igual a $\ell(C)$.

Nuestra definición de longitud es correcta porque el teorema 1.24 nos garantiza que el valor de la integral es el mismo independientemente de cuál sea el camino que utilicemos para parametrizar C.

29. No sería correcto aplicar la definición de longitud a otras "curvas" distintas de las curvas simples y las curvas cerradas simples, a menos que demostrásemos previamente que, también para esas curvas, la integral de la función 1 es independiente de la parametrización.

1.4 CAMPOS CONSERVATIVOS

La técnica más conocida para calcular la integral de una función de una variable sobre un intervalo cerrado y acotado consiste en buscar una antiderivada para a continuación aplicar la regla de Barrow. Este procedimiento, que se utiliza tan a menudo, parece dar por descontado que todas las funciones que manejamos tienen antiderivada. Y con razón, porque todas las funciones continuas tienen antiderivada, como se sigue inmediatamente del teorema fundamental del cálculo (teorema 1.2) ([40]).

Para integrales de campos vectoriales sobre caminos, el teorema fundamental del cálculo generalizado (1.17) constituye una ampliación de la regla de Barrow que nos proporciona una fórmula para la integral de un gradiente a lo largo de un camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos. La integral se obtiene evaluando una función escalar cuyo gradiente es el campo vectorial, en el punto final y en el punto inicial de la imagen del camino, y restando. Como consecuencia, el valor de la integral de un gradiente no depende propiamente del camino,

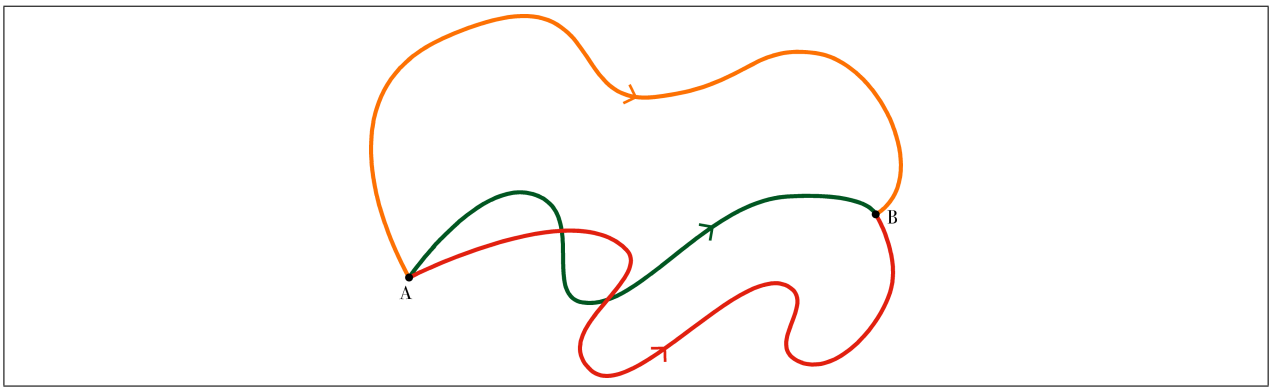


Figura 1.20: Varios caminos con el mismo punto inicial, A, y el mismo punto final, B

sino solamente de sus puntos inicial y final. Otro corolario es que cuando integremos un gradiente sobre un **camino cerrado** (es decir, un camino para el que la imagen del punto inicial del intervalo coincide con la imagen del punto final del intervalo), el resultado será siempre igual a cero.

La primera pregunta que queremos resolver es si el teorema fundamental del cálculo generalizado sirve para calcular integrales de cualquier campo vectorial, como sucede con la regla de Barrow en el caso de funciones con valores en $\mathbb{R}^1$, o si, por el contrario, cuando n es mayor o igual que 2 hay campos vectoriales con valores en $\mathbb{R}^n$ que no son un gradiente.

Pues bien, en cuanto estemos en dimensión mayor o igual que 2, no es cierto que todos los campos vectoriales continuos sean el gradiente de un campo escalar. Para $n = 3$ basta observar, por ejemplo, que el rotacional ([41]) de un gradiente de clase $\mathscr{C}^1$ siempre es nulo ([42]), y sin embargo es fácil construir campos de clase $\mathscr{C}^\infty$ con rotacional no nulo. Para $n = 2$ más sencillo todavía es remitirnos al ejemplo 1.18, donde hemos integrado un campo vectorial sobre un camino cerrado (en realidad, sobre dos caminos cerrados) y

[40] Asunto totalmente distinto es si esa antiderivada es, o no, una función elemental, en el sentido que se explica en la nota a pie de página nº 78.

[41] Si $\boldsymbol{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $U \subset \mathbb{R}^3$ es abierto, es un campo vectorial tridimensional, que tiene por funciones componentes F_1, F_2 y F_3, recordemos que el **rotacional** de $\boldsymbol{F}$ es el campo vectorial

$$\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\boldsymbol{p} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} (\boldsymbol{p}) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{p}),\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{p}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}),\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) \right) .$$

[42] Si $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ es de clase $\mathscr{C}^1$, entonces las derivadas segundas de f existen y son continuas, puesto que sus derivadas primeras no son otras que las componentes de $\boldsymbol{F}$. Al ser f de clase $\mathscr{C}^2$, sus derivadas cruzadas son iguales (ver, por ejemplo, [15], apartado

no nos ha dado cero, luego ese campo vectorial no puede ser un gradiente.

Así pues, ya sabemos que no siempre la integral de un campo vectorial es independiente del camino recorrido y que esta propiedad sí que es cierta para los campos que sean un gradiente (en otras palabras, es una propiedad necesaria de los campos que son un gradiente). Nuestro objetivo ahora es saber hasta qué punto esta propiedad es también suficiente para asegurar que el campo en cuestión es un gradiente de otro campo. Pretendemos caracterizar los casos en los que se dé esta importante propiedad. Y resolver los mismos interrogantes para la propiedad de que las integrales sobre curvas cerradas simples sean siempre nulas.

30. Cuando en matemáticas hablamos de "caracterizar", de "caracterización", de "propiedad característica", etc., siempre nos referimos a una propiedad que sea necesaria y suficiente.

31. Resumiendo, sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua.

- $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ para alguna $f \Rightarrow$ la integral $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ sólo depende de los puntos inicial y final de $\boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ para alguna $f \Rightarrow$ la integral $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ es nula siempre que los puntos inicial y final de $\boldsymbol{c}$ sean iguales

Las implicaciones recíprocas de las dos anteriores son ciertas en el caso $n = 1$ ([43]). ¿Son ciertas las implicaciones recíprocas también cuando $n \geq 2$?

El teorema 1.33 dará una respuesta afirmativa a esta pregunta, al menos cuando la formulemos para campos que tengan todas las derivadas de primer orden continuas y cuyo dominio de definición sea un conjunto abierto.

Para ello nos interesará saber de qué forma construir un campo escalar cuyo gradiente sea un campo vectorial conocido. Empezaremos resolviendo un ejemplo. Lo haremos por tres métodos distintos, que serán ilustrativos de las demostraciones de varias partes de nuestro resultado principal (teorema 1.33).

Ejemplo 1.32 Sobre el campo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y, x + 2yz^3, 3y^2z^2 - \sin z)$ considérese la pregunta ¿existe un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{\nabla} f = \boldsymbol{F}$?

Método 1. Definimos $f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0)\, dt + \int_0^y F_2(x, t, 0)\, dt + \int_0^z F_3(x, y, t)\, dt = \int_0^y x\, dt + \int_0^z [3y^2t^2 - \sin t]\, dt = xy + y^2z^3 + \cos z - 1$. Y comprobamos trivialmente que el gradiente de la función f es efectivamente $\boldsymbol{F}$.

En la demostración del teorema 1.33 se verá que la construcción de esta f no es una mera idea feliz.

Método 2. Definimos $f(x, y, z) = \int_0^1 \boldsymbol{F}(tx, ty, tz) \cdot (x, y, z)\, dt = \int_0^1 [2txy + 5t^4y^2z^3 - z \sin tz]\, dt = xy + y^2z^3 + \cos z - 1$.

También esta definición de f tiene una justificación, ya que este método aparece de manera natural cuando se quiere construir f sobre un conjunto estrellado (ver la parte C) del teorema 1.33).

Método 3. En los anteriores métodos hemos comenzado dando una función que es candidata a ser un campo escalar cuyo gradiente sea $\boldsymbol{F}$. Estos procedimientos son válidos con carácter general para algunos dominios de definición del campo $\boldsymbol{F}$, pero no sobre todos. Nuestro último método no presupone que tengamos un candidato a la solución (ni siquiera que exista solución).

3.1). Pero en este caso las tres componentes de $\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{grad}\, f)$ son diferencia de dos derivadas cruzadas, luego son nulas:

$$\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{grad}\, f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\, \partial x_2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\, \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} \right) = (0, 0, 0)\ .$$

[43] Lo que ocurre cuando $n = 1$ es que para cualquier $\boldsymbol{F}$ se cumplen por separado todas las propiedades de la observación: todo campo continuo es una derivada; la integral de una función se denota con el símbolo $\int_a^b$, donde sólo aparecen el punto inicial y final; y una integral del tipo $\int_a^a$ siempre vale cero.

Estamos buscando una solución al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= F_1 = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= F_2 = x + 2yz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= F_3 = 3y^2z^2 - \sin z \end{aligned}\right\},$$

donde la incógnita es f. Integrando respecto de x la primera ecuación,

$$f(x, y, z) = xy + \varphi(y, z),$$

donde $\varphi(y, z)$ es la llamada "constante de integración", que es constante como función de x, pero puede depender de las otras dos variables. Ahora que sabemos que f es igual a xy más una función que no depende de x, metemos ese dato en la segunda ecuación, lo que nos da

$$x + 2yz^3 = \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yz^3.$$

Integramos respecto de y para obtener información sobre la función φ, con el resultado

$$\varphi(y, z) = y^2z^3 + \psi(z), \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = xy + y^2z^3 + \psi(z),$$

donde ψ es la constante de integración, lo que ahora significa que es una función que no depende de y ni de x.

Por último, introducimos estos datos en la tercera ecuación,

$$3y^2z^2 - \sin z = \frac{\partial f}{\partial z} = 3y^2z^2 + \psi'(z), \quad \Rightarrow \quad \psi'(z) = -\sin z;$$

y al integrar la última expresión obtenemos que $\psi(z) = \cos z + k$, donde k es una constante genuina. Concluimos que el sistema de ecuaciones tiene solución y que cualquier solución es de la forma

$$f(x, y, z) = xy + y^2z^3 + \cos z + k.$$

con $k \in \mathbb{R}$. ■

¿A qué se debe que con el tercer método hayamos obtenido todas las soluciones posibles, mientras que con los otros dos métodos solamente hemos obtenido una solución?

En el teorema siguiente supondremos que $n > 1$ (aunque no es imprescindible), dado que el caso $n = 1$ está resuelto. Obsérvese, por otro lado, que una parte de la tesis C) depende de la dimensión n, pero el resto vale para cualquier dimensión.

Teorema 1.33 *Supondremos dado un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$. Considérense las siguientes propiedades, referidas a un cierto campo vectorial $\boldsymbol{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathscr{C}^1$:*

1. *La integral de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de cualquier trayectoria de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos y cerrada, cuya imagen esté contenida en D, es nula.*

1'. *La integral de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada simple orientada y contenida en D es nula.*

2. *Las integrales de $\boldsymbol{F}$ sobre dos trayectorias de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, cuyas imágenes estén contenidas en D y tengan el mismo punto inicial y el mismo punto final, son iguales.*

2'. *La integral de $\boldsymbol{F}$ sobre una curva simple orientada que esté contenida en D sólo depende del punto inicial y del punto final de la curva.*

3. *$\boldsymbol{F}$ es el gradiente de alguna función escalar.*

4. Para todo par de índices $i, j = 1, \ldots, n$, se cumple que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \ .$$

(En el caso $n = 3$ está propiedad equivale a $\boldsymbol{rot\, F} = \mathbf{0}$.)

Entonces

A) 1 $\Longleftrightarrow$ 1' $\Longleftrightarrow$ 2 $\Longleftrightarrow$ 2' $\Longleftrightarrow$ 3 $\Longrightarrow$ 4.

B) 4 $\not\Longrightarrow$ 3.

C) 4 $\Longrightarrow$ 3 siempre que se cumpla alguna de las siguientes condiciones adicionales ([44]):

- *D es "estrellado" ([45])*
- ★ *$n = 2$ y además D no "encierra agujeros" (ver apartado 2.5.5)*
- *$n = 3$ y además D es todo $\mathbb{R}^3$ excepto un número finito de puntos (ver apartado 3.4.3).*

DEMOSTRACIÓN: (PARCIAL)

A) **1 $\Longleftrightarrow$ 1' y 2 $\Longleftrightarrow$ 2':** *No las haremos. Las implicaciones hacia la derecha son inmediatas, aplicar la definición 1.29. Pero las implicaciones hacia la izquierda son más laboriosas ([46]).*

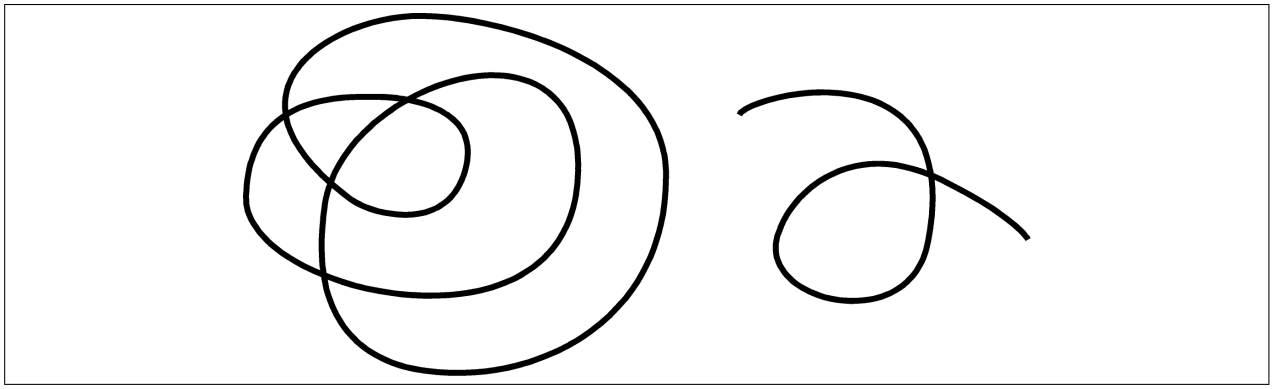


Figura 1.21: Imagen de una trayectoria en $\mathbb{R}^2$ de clase $\mathscr{C}^1$ y cerrada, pero que no es una curva cerrada simple. Y de un camino de clase $\mathscr{C}^1$ que no es una curva simple

1 $\Longrightarrow$ 2: *Si $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$ son dos caminos en D que comparten punto inicial y punto final, entonces puede construirse $\boldsymbol{c_1} + (\boldsymbol{c_2})_{op}$, que es un camino cerrado. Aplicándole la hipótesis 1, obtendremos la igualdad de las integrales sobre $\boldsymbol{c_1}$ y sobre $\boldsymbol{c_2}$:*

$$0 = \int\limits_{\boldsymbol{c_1}+(\boldsymbol{c_2})_{op}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_{\boldsymbol{c_1}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int\limits_{(\boldsymbol{c_2})_{op}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_{\boldsymbol{c_1}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} - \int\limits_{\boldsymbol{c_2}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

★ [44] Ver también la condición de que D sea simplemente conexo ([2], definición 7.6.3 y teorema 7.6.5).

[45] Un conjunto D se dice que es **estrellado** cuando tiene algún punto $\boldsymbol{p_0} \in D$ para el que se cumple que para cualquier otro $\boldsymbol{p} \in D$ todo el **segmento** $[\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p}] = \{\boldsymbol{p_0} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0}) : \boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]\}$ está contenido en D.

[46] Si queremos demostrar que 1' $\Rightarrow$ 1, tomaremos cualquier trayectoria $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow D$, de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos y con $\boldsymbol{c}(a) = \boldsymbol{c}(b)$, con el fin de demostrar que $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$. No podremos aplicar directamente 1', puesto que es posible que $\boldsymbol{c}$ no sea la parametrización de ninguna curva cerrada simple (puede tener puntos dobles, ver la figura 1.21), así que habrá que utilizar otra estrategia más elaborada.

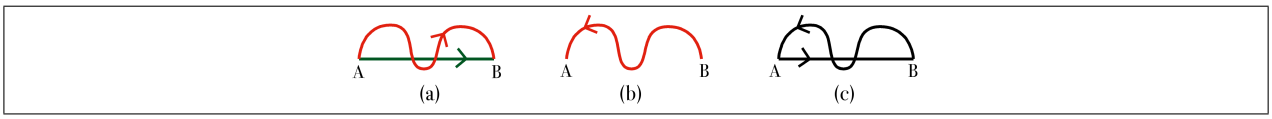


Figura 1.22: Demostración de 1 $\Longrightarrow$ 2. (a) Los caminos $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$. (b) El camino $(\boldsymbol{c_2})_{op}$. (c) El camino $\boldsymbol{c_1} + (\boldsymbol{c_2})_{op}$

3 $\Longrightarrow$ 4: *Se sigue del teorema sobre la igualdad de las derivadas cruzadas para funciones de clase $\mathscr{C}^2$, puesto que si $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ es de clase $\mathscr{C}^1$, entonces necesariamente $f \in \mathscr{C}^2$, y por tanto*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\ .$$

3 $\Longrightarrow$ 1: *Es consecuencia directa del teorema fundamental del cálculo generalizado (teorema 1.17).*

2 $\Longrightarrow$ 3: *Supondremos, para simplificar, que $D = \mathbb{R}^n$ o,más en general, que D es un producto cartesiano de n intervalos abiertos no degenerados que contenga al origen ([47]). El caso general no lo demostraremos ([48]).*

Haremos la demostración para tres variables, el caso n-dimensional sería completamente análogo. Para cada punto $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$ defínase $f(\boldsymbol{p})$ como la integral de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de un camino cualquiera que va desde el origen hasta $\boldsymbol{p}$ y está contenido en D. Demostramos a continuación que $\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{p}) = F_3(\boldsymbol{p})$, eligiendo para ello un camino que nos convenga. Del mismo modo se probaría que $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) = F_1(\boldsymbol{p})$ y que $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}) = F_2(\boldsymbol{p})$, cambiando de camino según cuál sea la variable.

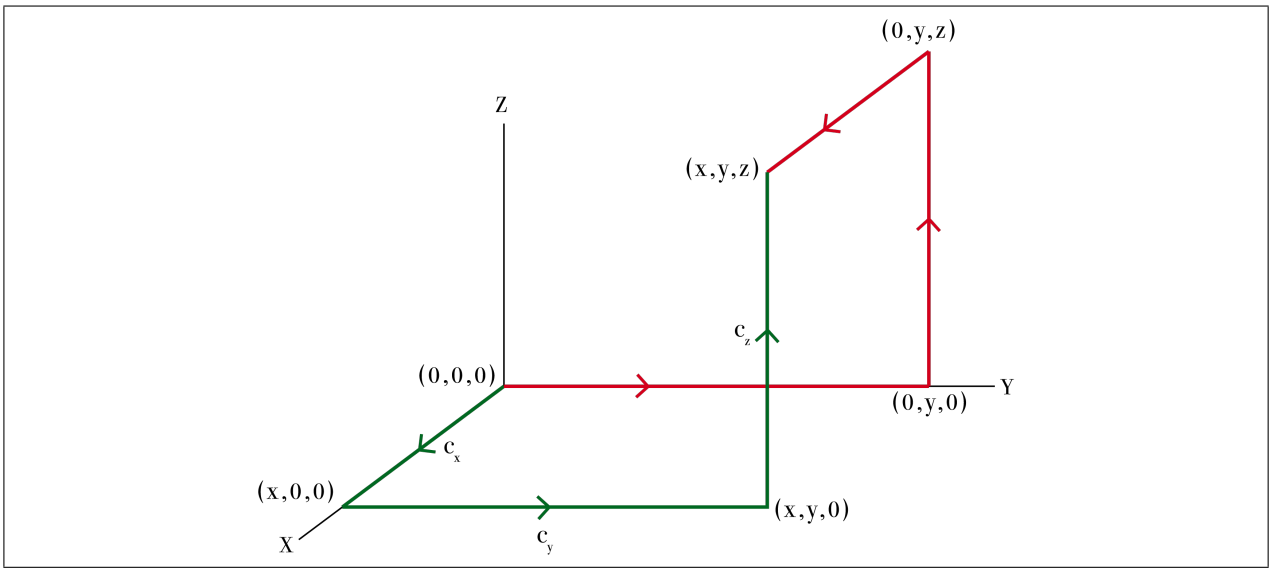


Figura 1.23: $f(x, y, z)$ se define como la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre cualquier camino que vaya desde $(0, 0, 0)$ hasta (x, y, z). En verde, el camino utilizado para la demostración de que $\partial f/\partial z = \boldsymbol{F}_3$. En rojo, el que usaríamos para probar que $\partial f/\partial x = \boldsymbol{F}_1$

Gracias a la hipótesis podemos suponer que la trayectoria que utilizamos para calcular el valor de f es cualquiera que nos convenga para la demostración, así que tomamos la trayectoria poligonal $\boldsymbol{c}$ que vaya uniendo los puntos $(0, 0, 0)$, $(x, 0, 0)$, $(x, y, 0)$, (x, y, z). Para ello ponemos $\boldsymbol{c}$ como la suma $\boldsymbol{c}_x + \boldsymbol{c}_y + \boldsymbol{c}_z$, donde cada uno de los tres caminos parametriza uno de los segmentos.

A partir de ahora supondremos que las tres coordenadas de $\boldsymbol{p}$ son estrictamente positivas. Los

[47] Los productos de intervalos abiertos son conjuntos abiertos, de acuerdo con la condición suficiente que hemos dado tras la definición 1.16.

★ [48] Se requiere el manejo del concepto topológico de componente conexa, que no incluimos en este curso. Ver una demostración en [2], teorema 5.5.6.

En el caso de que el dominio D no sea un abierto cualquiera sino que sea el interior de una región simple, sí que puede probarse de manera elemental, modificando adecuadamente la demostración que aquí damos.

cálculos para los casos restantes son similares ([49]).

Las parametrizaciones pueden elegirse de esta manera:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_x &: [0,x] \longrightarrow D, \quad \boldsymbol{c}_x(t) = (t,0,0) \\ \boldsymbol{c}_y &: [0,y] \longrightarrow D, \quad \boldsymbol{c}_y(t) = (x,t,0) \\ \boldsymbol{c}_z &: [0,z] \longrightarrow D, \quad \boldsymbol{c}_z(t) = (x,y,t) \end{aligned}$$

Entonces $\boldsymbol{c}_x' = (1,0,0)$, $\boldsymbol{c}_y' = (0,1,0)$, $\boldsymbol{c}_z' = (0,0,1)$, *luego*

$$\begin{aligned} \big(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{c}_x(t)\big) \cdot \boldsymbol{c}_x'(t) &= F_1(t,0,0) \\ \big(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{c}_y(t)\big) \cdot \boldsymbol{c}_y'(t) &= F_2(x,t,0) \\ \big(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{c}_z(t)\big) \cdot \boldsymbol{c}_z'(t) &= F_3(x,y,t), \end{aligned}$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{c}_x} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\boldsymbol{c}_y} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\boldsymbol{c}_z} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \\ &= \int_0^x F_1(t,0,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\,dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\,dt \end{aligned}$$

(obsérvese la similitud con la fórmula del método 1 del ejemplo que precede a este teorema).

Ahora derivamos respecto de z. Las dos primeras integrales no contienen a la variable z, de modo que su derivada es nula. Aplicamos el teorema fundamental del cálculo a la tercera integral y concluimos que f es derivable en $\boldsymbol{p}$ respecto a z, y su derivada es $F_3(\boldsymbol{p})$. Por tanto, $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$.

Derivar f respecto a x usando la fórmula anterior no es tan fácil como derivarla respecto a z ([50]). *Por ello, para probar que $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) = F_1(\boldsymbol{p})$, es mejor elegir la poligonal $(0,0,0) \to (0,y,0) \to (0,y,z) \to (x,y,z)$, ver la figura 1.23. Y análogamente para demostrar que $\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}) = F_2(\boldsymbol{p})$.*

B) El campo $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ cumple la propiedad 4, pero no la propiedad 1. En efecto,

(4): es de comprobación rutinaria;

(1): si integramos a lo largo de la circunferencia unidad $\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$,

$$\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\ dt = 2\pi \neq 0.$$

32. Puede parecer que el campo del ejemplo que hemos puesto en esta demostración de la parte B) del teorema sí que cumple la propiedad 3 del enunciado, puesto que sus componentes pueden obtenerse derivando parcialmente la función $\arctan \dfrac{y}{x}$.

Pero no es así ([51]), dado que el dominio de $\boldsymbol{F}$ es todo el plano menos el origen, $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, mientras que el campo escalar $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ no está definido sobre la totalidad de D, sino solamente sobre todo el plano menos el eje coordenado vertical, $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash (\{0\} \times \mathbb{R})$. ([52])

---

[49] Cuando alguna coordenada sea estrictamente negativa, por ejemplo $x < 0$, tomaremos

$$\boldsymbol{c}_x : [0,|x|] \longrightarrow D, \quad \boldsymbol{c}_x(t) = (-t,0,0)\,.$$

Y en los casos en los que alguna coordenada sea nula, por ejemplo $y = 0$, el correspondiente camino es degenerado, $\boldsymbol{c}_y : \{0\} \longrightarrow D$, $\boldsymbol{c}_y(0) = (x,0,0)$, y la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre él es nula (podemos tomar este valor como definición de **integral sobre un punto**, puesto que la definición 1.4 y, en consecuencia la 1.7, no admiten caminos degenerados). Luego también en este caso

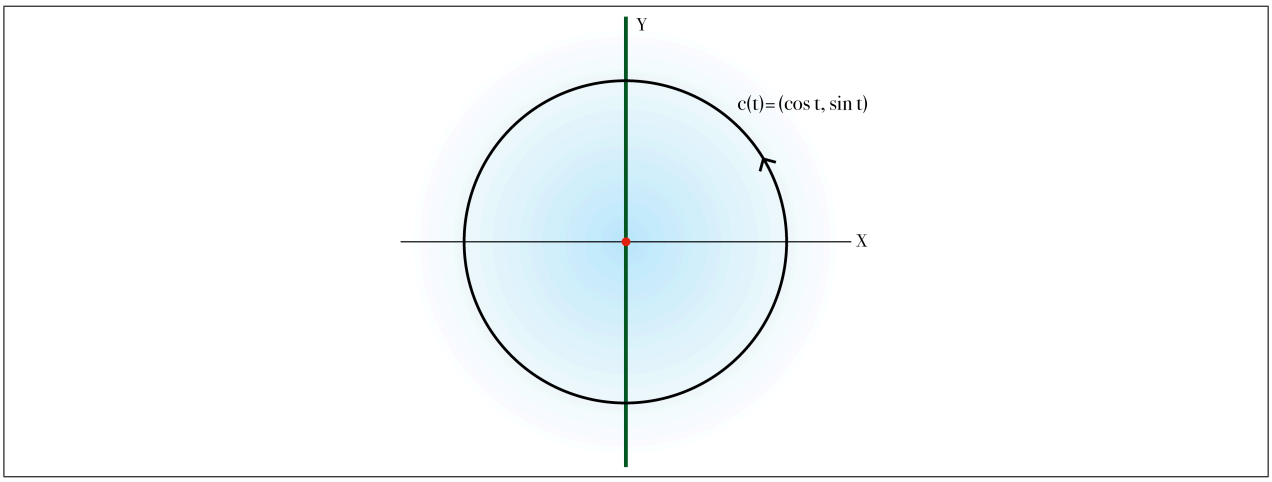


Figura 1.24: El dominio de $\boldsymbol{F}$ es todo el plano menos el origen. Contiene a la imagen de $\boldsymbol{c}$. El dominio de f es menor, todo el plano menos el eje Y. No contiene a la imagen de $\boldsymbol{c}$

C) *No haremos demostraciones de que añadir alguna de las condiciones adicionales es suficiente para que 4 implique las otras propiedades.*

Para una demostración de la suficiencia de la hipótesis de que D sea estrellado, ver el apartado K.1, donde se utiliza una fórmula muy similar a la del método 2 del ejemplo que precede a este teorema.

Más adelante daremos justificaciones de la suficiencia de la hipótesis de que D no contenga agujeros (cuando $n = 2$) y de que D sea todo el espacio salvo un conjunto finito (cuando $n = 3$) en los apartados 2.5.5 y 3.4.3, respectivamente.

Con esto finalizamos la prueba del teorema, excepto para las partes que expresamente hemos dejado sin demostrar.

Definición 1.34 *Los campos que cumplen las condiciones 1, 1', 2, 2' o 3, se llaman* ***conservativos*** *o* ***exactos****, mientas que un campo que cumpla la condición 4 se dice que es* ***cerrado****.*
Si $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} f$, el campo escalar $-f$ se llama ***función potencial de $\boldsymbol{F}$****.*

33. El signo "menos" que precede a f se debe a la interpretación que tiene la función potencial en las aplicaciones físicas.

34. En algunos textos se utilizan las palabras "conservativo" y "cerrado" como sinónimos, lo cual es correcto si, por ejemplo, se trabaja solamente con campos que estén definidos sobre el espacio total. Si no se concreta ninguna condición sobre los dominios de definición, no es correcto utilizar el mismo nombre para los campos que cumplan la condición 4 que para los que cumplan la condición 1 o sus equivalentes.

En el teorema 1.33 contiene un recíproco parcial de la propiedad de que el rotacional de un gradiente de clase $\mathscr{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^3$ sea nulo. También puede probarse un recíproco de otro resultado similar, que la

se tiene que $\int_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^y F_2(x, t, 0)\, dt$.

[50] Dado que los tres sumandos dependen de x y habría que recurrir a la fórmula de Leibniz del teorema K.2.

[51] No podía ser que la cumpliera, toda vez que hemos demostrado que no cumple la 1 y que $3 \Rightarrow 1$.

[52] Y si nos limitamos a D_f, entonces sí que el gradiente de f coincide con la restricción de $\boldsymbol{F}$ a D_f. Lo que ocurre es que no entramos en contradicción con el ejemplo puesto más arriba porque ahora no tenemos derecho a integrar a lo largo del círculo unidad la restricción de $\boldsymbol{F}$ a D_f, ya que el círculo se sale de D_f.

divergencia ([53]) de un rotacional de clase $\mathscr{C}^1$ es siempre nula:

Teorema 1.35 *Si $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$.
2. *Existe un campo vectorial $\boldsymbol{G}$ de clase $\mathscr{C}^2$ sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$.*

DEMOSTRACIÓN: *La implicación $2 \Rightarrow 1$ se demuestra mediante un cálculo directo, aplicando las definiciones de divergencia y de rotacional:*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{G} = \frac{\partial^2 G_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 G_2}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 G_3}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial z\,\partial y} = 0,$$

porque al ser $\boldsymbol{G}$ de clase $\mathscr{C}^2$, sus derivadas segundas cruzadas coinciden.

Para la otra implicación, ver [15], ejercicio 8.3.16.

El hecho de que un campo vectorial sea un gradiente o sea un rotacional tiene importantes consecuencias en algunas modelizaciones de fenómenos físicos, más allá de su interés matemático ([54]).

[53] Si $\boldsymbol{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, es un campo vectorial n-dimensional que tiene por funciones componentes $F_1, \ldots, F_n$, recordemos que la **divergencia** de $\boldsymbol{F}$ es el campo escalar

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{p} \rightsquigarrow \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{p}).$$

★ [54] El resultado conocido como descomposición de Helmholtz garantiza que, bajo ciertas condiciones de regularidad y de convergencia a cero en el infinito, un campo vectorial $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ puede descomponerse en suma de un campo con rotacional nulo más otro campo con divergencia nula, o, lo que es lo mismo, en suma de un gradiente más un rotacional. Como consecuencia, está generado por un potencial escalar y un "potencial vectorial".

CAPÍTULO 2

Integrales de dos variables

2.1 Introducción

Igual que ocurre en el Cálculo Diferencial, en el Cálculo Integral surgen abundantes cambios al pasar de una a dos o más variables, algunos de los cuales se resuelven de manera sencilla, poniendo una segunda coordenada con un poco de cuidado, mientras que otros son más profundos y requieren un replanteamiento de la teoría porque algo que valía para una variable resulta que no vale para más de una variable.

Puede decirse que buena parte de las novedades se presentan ya en el paso de una a dos variables. En muchos aspectos de las integrales múltiples, el salto de dos variables a cualquier número finito de coordenadas puede reducirse a un mero incremento del número de coordenadas ([55]). Una notable excepción la constituyen, cuando estamos en dimensiones mayores que 3, las integrales sobre los conjuntos que generalizan a las superficies, para los que resulta necesario complicar el aparato matemático. Puede consultarse una formulación elemental de esta generalización en el anexo E.

Señalamos a continuación algunos de los que cambios que son más significativos desde el punto de vista del aprendizaje.

(1) En una variable integramos siempre sobre intervalos: cerrados y acotados en la construcción de la integral, e intervalos cualesquiera al hablar de las integrales impropias que veremos en la sección 2.6. Si en alguna aplicación de la teoría de integración se hace necesario integrar sobre conjuntos que sean uniones de intervalos disjuntos, simplemente sumamos las integrales sobre cada uno de ellos. Para integrar sobre conjuntos más complicados lo mejor es abandonar la integral de Riemann y pasar a las de Lebesgue o de Kurzweil-Henstock que introducimos brevemente en el epílogo, que son más útiles para tratar integrales sobre conjuntos arbitrarios.

En dos variables resulta relativamente fácil adaptar la integral de Riemann sobre intervalos a una integral sobre productos de dos intervalos (rectángulos). Pero surgen dominios de integración que son muy sencillos (círculos, elipses, etc.) y que no podemos ignorar por su importancia en las aplicaciones, pero que no pueden descomponerse en un número finito de productos de intervalos. Por consiguiente necesitaremos elaborar una teoría que tenga en cuenta esta complejidad ([56]).

(2) Con la integrabilidad de funciones discontinuas ocurre algo parecido. En una variable, integrar funciones que sean discontinuas en infinitos puntos no es algo que tratemos en un curso elemental como éste. En cambio, en dos variables nos resultará imprescindible integrar funciones con infinitas discontinuidades, precisamente para poder solventar la dificultad aparejada a la integrabilidad sobre conjuntos que no sean rectángulos.

(3) Para el cálculo de integrales en varias variables no se dispone de una fórmula tan sencilla y práctica como la regla de Barrow. Esto nos llevará a estudiar la forma de reducir el cálculo de una integral doble al cálculo sucesivo de dos integrales sencillas, para así aplicar la regla de Barrow dos veces seguidas.

Sí que existen adaptaciones a varias variables de los teoremas fundamentales del cálculo, pero son mucho más sofisticadas que un mero añadir coordenadas. Son los que se llaman teoremas clásicos del cálculo vectorial, que a su vez se unifican en el teorema general de Stokes.

(4) Aparecen, como sería de esperar, dificultades nuevas que son intrínsecas al hecho de utilizar varias variables. Por ejemplo:

- La forma geométrica que tengan los dominios de definición de las funciones afectará a la forma de calcular las integrales.
- La ausencia de un orden en los conjuntos de dos parámetros origina dificultades en la orientación de las superficies, que no se presentaban en la orientación de las curvas.

[55] En cambio, el salto a infinitas coordenadas requiere construir una teoría más abstracta.

[56] Éste es el motivo por el que descomponemos el estudio en dos secciones diferentes, la 2.2 y la 2.3.

- El "acordeón de Schwarz" ejemplifica que no siempre los enfoques utilizados en una variable son trasladables a dos o más variables.

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada que depende de dos variables reales. Los dominios de definición de nuestras funciones podrán ser subconjuntos acotados ([57]) cualesquiera de $\mathbb{R}^2$, pero con frecuencia nos limitaremos a una clase especial de conjuntos que llamaremos regiones simples ([58]). Esta limitación se deberá a varias razones:

- las regiones simples y las uniones finitas de regiones simples son suficientes para la gran mayoría de las aplicaciones de la integral de Riemann;
- estas regiones se adaptan especialmente bien a la utilización de programas de cálculo simbólico;
- el nivel de este curso nos permitirá enunciar o probar algunos de los resultados solamente en regiones de este tipo, no en conjuntos más generales.

Nuestra guía intuitiva para la definición de la integral de una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que sólo tome valores positivos será la búsqueda del volumen del conjunto tridimensional limitado entre la gráfica de f y el plano coordenado $z = 0$, es decir, del conjunto $\Omega(f)$:

Definición 2.1 *Si $D \subset \mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva, llamaremos* $\boldsymbol{\Omega(f)}$ *al conjunto*

$$\Omega(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Se puede demostrar ([59]) que cuando f es continua la integral que vamos a definir es la única función que mide *razonablemente* el volumen de $\Omega(f)$.

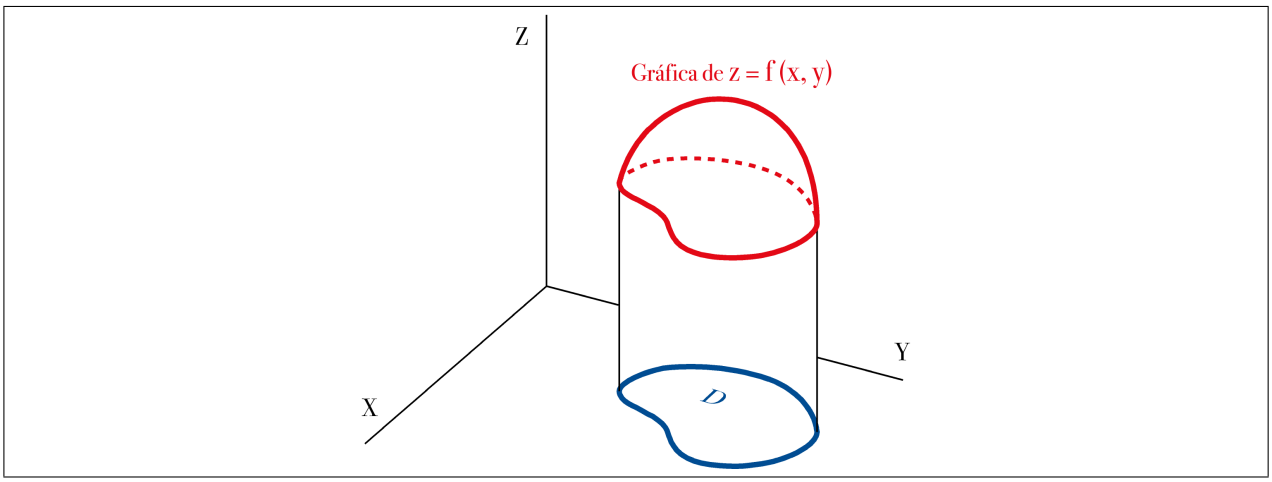


Figura 2.1: $\Omega(f)$ es todo el conjunto comprendido entre la gráfica de f (en rojo) y el conjunto D (en azul), considerando a D no como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ sino como subconjunto de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$

35. Aprovechemos para insistir en que cálculo de volúmenes es *solamente una* de las utilidades que tiene el concepto que estamos introduciendo.

[57] Excepto en la sección 2.6.

[58] En el caso $n = 1$ las regiones simples coincidirían precisamente con los intervalos cerrados y acotados, que han sido nuestros dominios de integración la sección 1.1.

[59] Ver [12], capítulo 12, teorema de unicidad.

En realidad, nos interesa comprender el concepto de integral doble porque en las aplicaciones se utiliza para medidas de diversas magnitudes (físicas, económicas, etc., en función de la disciplina que estemos estudiando). A título de ejemplo, indiquemos que

- Si el conjunto bidimensional D es un modelo matemático de una placa construida con una composición de materiales que hace que tenga una densidad que varía en cada punto, y f es la función que a cada punto de D asocia precisamente esa densidad, entonces podremos utilizar la integral de f sobre D para definir (en el modelo matemático) la masa de la placa.

  Ejemplo 2.2 Sea D una placa rectangular cuyo lado largo mide el doble que el lado corto, de la que sabemos que su composición hace que la densidad crezca a partir de una de sus esquinas en cada dirección con el cuadrado de la distancia a esa esquina. La idealizamos como un rectángulo $D = [0, a] \times [0, 2a]$ y con densidad $f(x, y) = b(x^2 + y^2)$.

  De esta manera, la masa de la placa la identificamos con el volumen de la región $\Omega(f)$, limitada por la gráfica de f y el plano horizontal. ■

- Cuando D sea una idealización de una región de la superficie de la tierra que sea tan pequeña que la podamos considerar plana en una primera aproximación, y f exprese en cada punto la temperatura en un momento dado (o la altura sobre el nivel del mar, o...), entonces la integral doble de f sobre D servirá como primer paso para calcular la temperatura media (o la altura media, etc.), de la misma manera que la integral de un campo escalar sobre un camino sirve para calcular otros promedios (ejercicio 1.8).

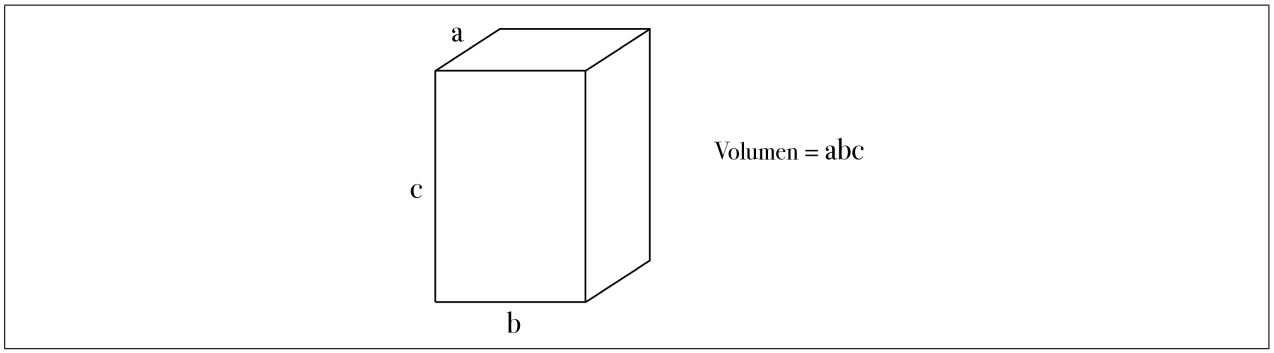


Figura 2.2: Volumen de un paralelepípedo

- Una integral doble o triple sirve también para definir el momento de inercia de un cuerpo, el potencial gravitacional de una distribución de masa ([38]), la rigidez flexural de una viga, ([15], capítulo 6, ejercicio 41 del último apartado), el campo eléctrico definido por una distribución de cargas, ([38]), la probabilidad de que ocurra un suceso cuya dependencia de dos magnitudes (función de densidad) es conocida, ([30]), etc.

Admitiremos como punto de partida para nuestra definición el postulado de que para los conjuntos que sean productos cartesianos de intervalos acotados su volumen no es otro que el producto de las longitudes de sus lados ([60]).

[60] Los motivos para adherirnos a este postulado están en la raíz misma del concepto de multiplicación de números. Desde cierto punto de vista sería tan correcto decir que el área de un rectángulo cuyos lados midan a y b *se define* como el producto ab, como decir que el producto ab *se define* como el área de un rectángulo cuyos lados midan a y b.

2.2 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DEFINIDAS SOBRE RECTÁNGULOS

2.2.1. Definiciones

Procederemos de manera muy similar al caso de una variable, sólo que desarrollándolo con más detalle.

Definición 2.3 *Un* ***rectángulo*** *R es un producto cartesiano de dos intervalos cerrados y acotados, $R = [a, b] \times [c, d]$.*

Todos nuestros rectángulos son conjuntos cerrados, de acuerdo con la condición suficiente que hemos dado tras la definición 1.16.

36. Reservaremos la palabra *rectángulo* para estos conjuntos. Lo hacemos así para evitar tener que repetir con frecuencia la expresión *rectángulo cerrado, acotado y de lados paralelos a los ejes.*

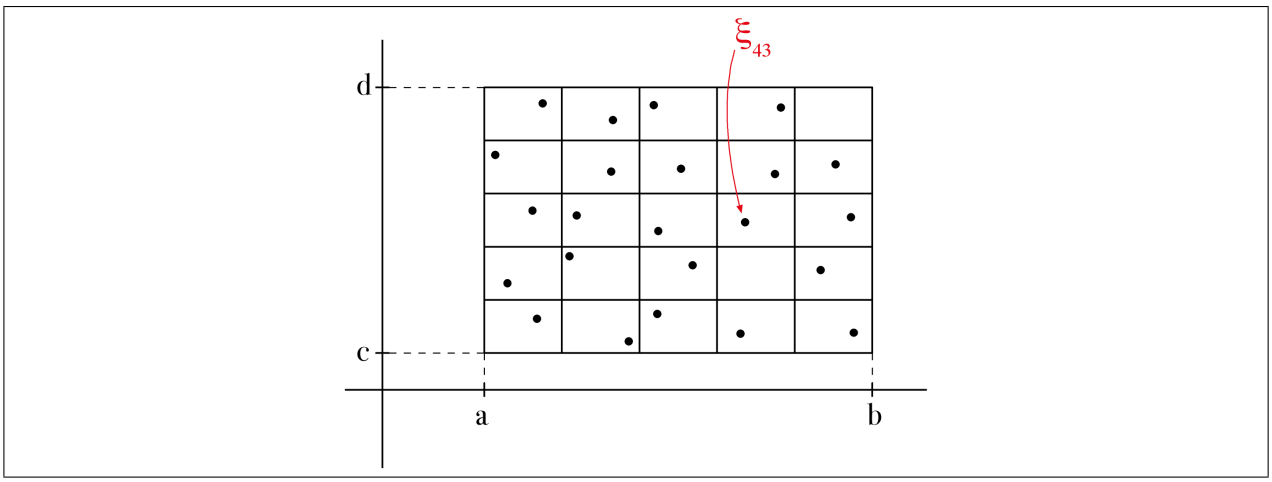


Figura 2.3: Una posible elección de los puntos $\xi_{ij}^{(5)}$ en cada uno de los subrectángulos $R_{ij}^{(5)}$

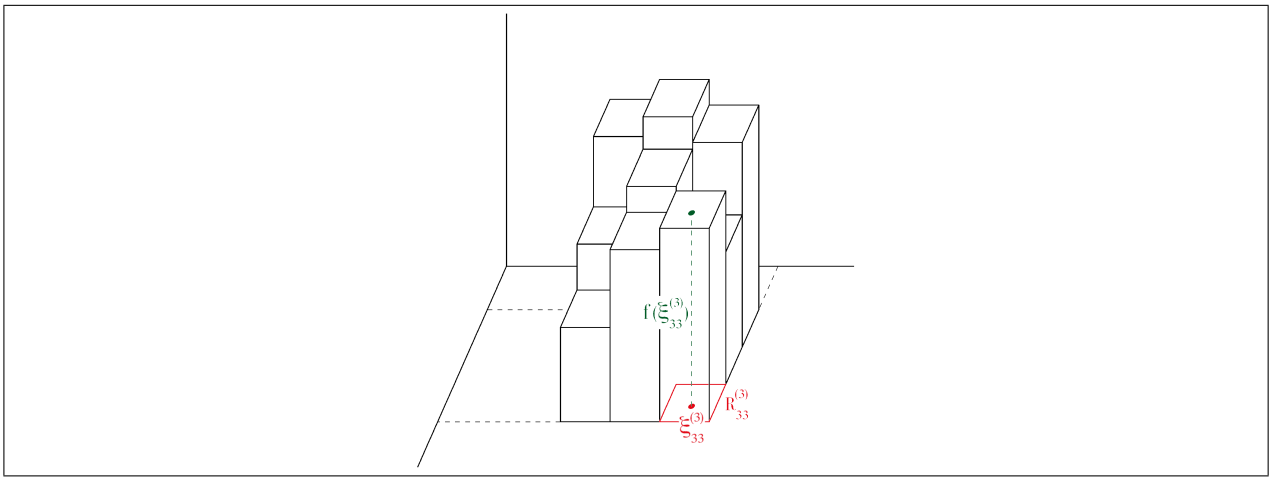


Figura 2.4: Una suma de Riemann S_3. Cada paralelepípedo tiene por base un $R_{ij}^{(3)}$ y por altura el correspondiente $f(\xi_{ij}^{(3)})$

Definición 2.4 *Considérese una función acotada $f : R = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$. La* ***integral doble (de Riemann) de f*** *es, en caso de que exista, el número real al que convergen cuando n tiende a infinito las* ***sumas de Riemann***

$$S_n = \sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_{ij}^{(n)})\Delta x \Delta y,$$

para cualquier elección de los puntos $\xi_{ij}^{(n)}$ dentro de cada subrectángulo $R_{ij}^{(n)} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, donde

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad y_0 = c, \quad y_n = d,$$

y para todos los subíndices $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = (b-a)/n, \quad \Delta y = y_j - y_{j-1} = (d-c)/n.$$

Las funciones para las que exista su integral de Riemann se dice que son ***integrables Riemann****.*

Otra forma de dar la anterior definición es calcular las sumas de Riemann *para unos incrementos dx_i, dy_j infinitesimales* (las sumas tienen entonces un número infinito de sumandos, H),

$$S_H = \sum_{i,j=1}^{H} f(\xi_{ij}^{H}) dx\, dy,$$

y comprobar si todas ellas tienen la misma *parte estándar*. En caso de que así sea, la parte estándar es la integral. Ver, por ejemplo, [12], capítulos 4 y 12, [8], capítulo 12.7, o [11], teoremas 6.1 y 6.2.

Notaciones. Denotaremos la integral doble de f sobre R mediante $\iint_R f(x,y)\, dx\, dy$.

En lugar de $dx\, dy$ escribiremos también dA (leyéndolo como *diferencial de área*).

37. Nuestras notaciones tienen su explicación en que lo que estamos haciendo es sumar infinitos sumandos infinitesimales, que se han obtenido multiplicando el valor de la función (que es finito) por la medida de unas áreas infinitesimales (dA), que a su vez son el producto de dos longitudes infinitesimales (dx y dy).

En el anexo E damos otra interpretación, más formalista, a las multiplicaciones $dx\, dy$ y al diferencial de área, ver las definiciones E.1 y E.2 de diferencial de volumen 2-dimensional.

Cuando el dominio o las variables se deduzcan del contexto, también usaremos $\iint f$, así como $\int f$ cuando nos queramos referir a una integral de un número indeterminado de variables. En la literatura sobre integrales es muy frecuente también utilizar solamente la notación $\int f$ para integrales sencillas, dobles o triples. Nosotros, en cambio, pondremos $\iint f$, $\iiint f$ siempre que manejemos una función de la que sepamos que tiene dos o tres variables, respectivamente.

El procedimiento ideado por Darboux también puede aplicarse cuando hay más de una variable. Sean $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida sobre el rectángulo R. En cada uno de los lados de R tomemos una partición (en el sentido descrito en el apartado 1.1.1),

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d,$$

y formemos los rectángulos cerrados y acotados a que dan lugar las dos particiones usando términos consecutivos,

$$\forall i = 1, \ldots, n,\ \forall j = 1, \ldots, m,\ R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Estos rectángulos rellenan todo R y sus intersecciones dos a dos o son vacías o contienen solamente puntos de sus lados (se suele expresar esto diciendo que los R_{ij} **no se solapan**). El resultado $\mathscr{P} = \{R_{ij} : i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ es lo que llamaremos una **partición** del rectángulo R.

Al ser f acotada, existen el supremo y el ínfimo de sus valores en cada rectángulo de la partición:

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\}, \quad m_{ij} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\}.$$

Construimos las **sumas inferior y superior de Darboux para la función f y la partición $\mathscr{P}$**,

$$L(f,\mathscr{P}) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$
$$U(f,\mathscr{P}) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

La **integral inferior de Darboux de f** y la **integral superior de Darboux de f** son, respectivamente,

$$L(f) = \sup\{L(f,\mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición de } R\}, \quad U(f) = \inf\{U(f,\mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición de } R\}.$$

Definición 2.5 *Cuando $L(f) = U(f)$, se dice que la función f es **integrable Darboux**, y ese valor común de la integral inferior y la integral superior se llama **integral de f (de Darboux)**.*

38. Observar que el supremo y el ínfimo utilizados para definir $L(f)$ y $U(f)$ existen siempre (y además $L(f) \le U(f)$), puesto que $L(f,\mathscr{P}) \le U(f,\mathscr{P}')$ para cada pareja de particiones $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P}'$ ([61]).

Teorema 2.6 *Las definiciones de integral de Riemann y de Darboux son equivalentes. En otras palabras, una función es integrable Riemann si y sólo si es integrable Darboux, y en caso de que lo sea los valores de ambas integrales coinciden.*

DEMOSTRACIÓN: *Puede completarse una demostración a partir de la del teorema 14.4 de [1].*

2.2.2. Integrabilidad

El concepto de "función integrable" no merecería una definición si todas las funciones lo fueran o si ninguna lo fuera. Y no tendría interés si muy pocas lo fueran, es más, lo deseable sería que todas las funciones fuesen integrables, pero desgraciadamente esto no es cierto ([62]). La identificación de todas las funciones que son integrables Riemann es una cuestión nada sencilla, que no fue resuelta hasta unos 50 años después de que Riemann definiera su integral. Nosotros no aspiramos a tanto, lo que sí haremos es mostrar que no todas las funciones son integrables Riemann y daremos, sin demostración, una condición suficiente para que una función sea integrable que es lo bastante amplia como para garantizar que las funciones más habituales en las aplicaciones son integrables.

Ejemplo 2.7 Sea $f : [0,1]\times[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida del siguiente modo. Si $x \in [0,1]$ es un número racional, entonces $f(x,y) = 1$ cualquiera que sea $y \in [0,2]$; y si x es irracional, $f(x,y) = 0$ para cualquier y. En este caso todos los rectángulos

$$R_{ij}^{(n)} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[2\frac{j-1}{n}, 2\frac{j}{n}\right],$$

contienen puntos con la primera coordenada irracional y puntos con la primera coordenada racional. En consecuencia, resulta que por una parte podemos tomar todos los $\xi_{ij}^{(n)}$ de forma que $f(\xi_{ij}^{(n)}) = 1$, con lo que las correspondientes sumas de Riemann serán todas iguales a 2, y también podemos tomar otros $\xi_{ij}^{*(n)}$ de forma que $f(\xi_{ij}^{*(n)}) = 0$, con lo que las sumas de Riemann valdrán todas 0. Conclusión: esta función no es integrable. ■

[61] La última desigualdad se demuestra comparando a través de una partición $\mathscr{P}''$ definida a partir de todos los puntos que definen a $\mathscr{P}$ y todos los que definen a $\mathscr{P}'$.

[62] Ver el final del epílogo.

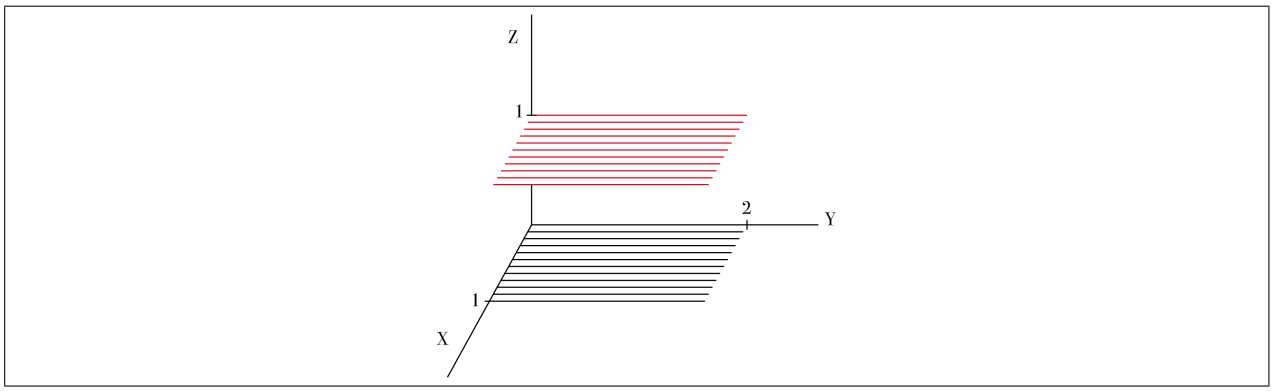


Figura 2.5: Los segmentos rojos corresponden a los valores racionales de la variable x, mientras que los segmentos negros corresponden a los valores irracionales de x. Entre todos ellos forman la gráfica de la función del ejemplo 2.7

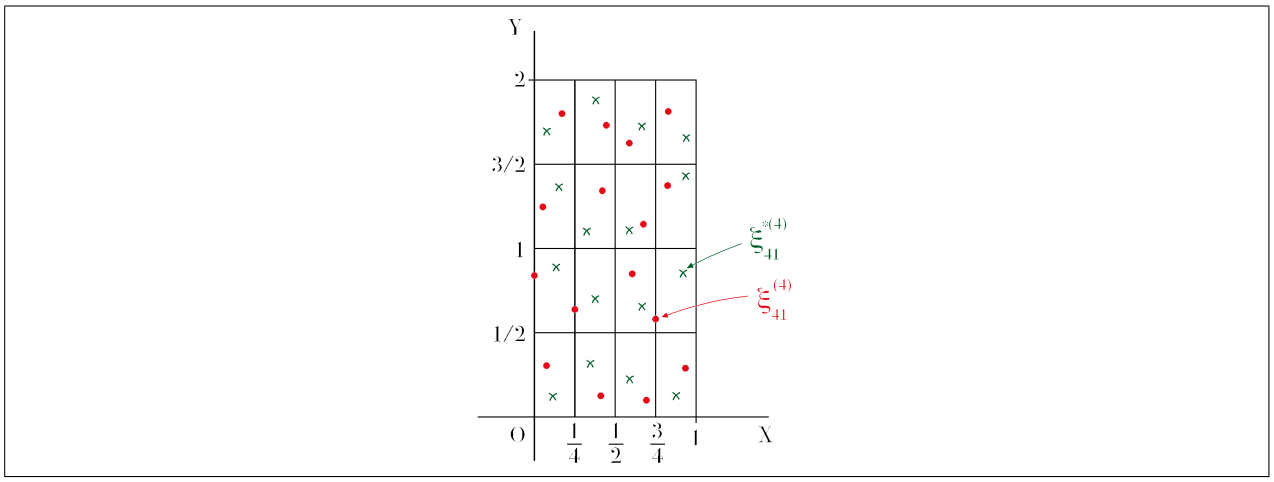


Figura 2.6: Dos elecciones de puntos donde evaluar la función del ejemplo 2.7. Los $\xi_{ij}^{(4)}$, rojos, tienen la primera coordenada racional y los $\xi_{ij}^{*(4)}$, verdes, tienen la primera coordenada irracional

Del razonamiento sobre los valores de f en los subrectángulos sólo podemos deducir para esta función que el número que asignáramos como volumen de $\Omega(f)$ (en caso de que se le pudiera asignar alguno por otro método distinto del de Riemann) tendría que estar comprendido entre 0 y 1.

La función de este ejemplo (debido esencialmente a Lejeune Dirichlet, 1829, ver [10]), puede parecer rebuscada, y ciertamente lo es. Admite, sin embargo otra definición que no precisa distinguir entre números racionales e irracionales. En efecto, para todo x e y del dominio de f, $f(x,y) = \lim_n \lim_m \left[\cos(\pi n! x)\right]^m$ (consultar una demostración en el teorema K.3, apartado (K.2)).

Esta función es discontinua en todos los puntos. En cambio, para funciones que sean continuas en todos los puntos nunca se presenta esta situación, el método de Riemann siempre les asigna una integral:

Teorema 2.8 *Cualquier función continua de dos variables definida sobre un rectángulo es integrable.* ([63])

Justificación: *Para una partición infinitesimal $\mathscr{P}$ del dominio de una función continua de dos variables f, los valores M_{ij} y m_{ij} se alcanzan siempre en sendos puntos del rectángulo infinitesimal R_{ij}. Además, todos los $M_{ij} - m_{ij}$ son infinitesimales, puesto que f es continua, luego el máximo de todos ellos (llamémosle k) también es infinitesimal* ([64]). *Por tanto,*

$$U(f,\mathscr{P}) - L(f,\mathscr{P}) = \sum [M_{ij} - m_{ij}] dx_i\, dy_j \leq \sum k\, dx_i\, dy_j = k(b-a)(d-c) \approx 0,$$

luego la función f es integrable.

[63] Observar que una función continua sobre un rectángulo es automáticamente acotada, por la propiedad de Weierstrass.

[64] Aunque hay infinitas diferencias $M_{ij} - m_{ij}$, el máximo de todas ellas existe, por aplicación del principio de transferencia. En el apartado (C.3) se pueden consultar otras aplicaciones similares del mismo principio.

DEMOSTRACIÓN: *Ver [15], capítulo 5, teorema 1.*

Según el teorema 2.8, la continuidad de una función es una condición suficiente para la integrabilidad. Por otro lado, el ejemplo 2.7 nos muestra una función que no es integrable y que no sólo no es continua (como no podía ser de otra manera, en vista del teorema 2.8), sino que es discontinua en todos los puntos. En realidad, si una función es discontinua *en todos los puntos*, no puede ser integrable ([65]). Estos son los dos extremos posibles, que una función sea continua en todos los puntos y por tanto integrable y que no lo sea en ninguno y por tanto no integrable, pero será frecuente que nos encontremos con casos intermedios. Ponemos a continuación otro ejemplo de función de dos variables, acotada y definida sobre un rectángulo, que no es continua (de hecho, tiene infinitos puntos de discontinuidad) y en cambio sí que es integrable.

Ejemplo 2.9 Sean $R = [0,1] \times [0,1]$ y

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{si } y < x, \end{cases}$$

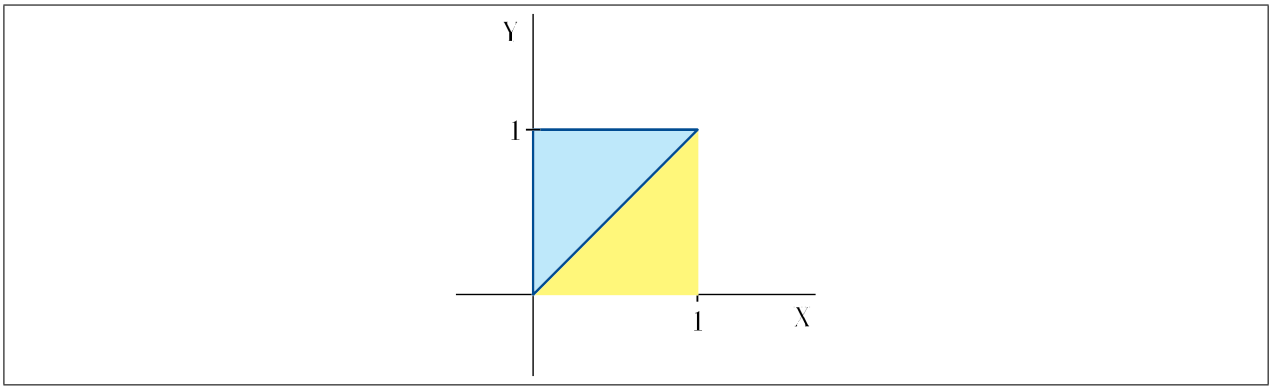


Figura 2.7: Dominio de la función del ejemplo 2.9. Sobre la parte azul la función vale 1 y sobre la parte amarilla vale 0

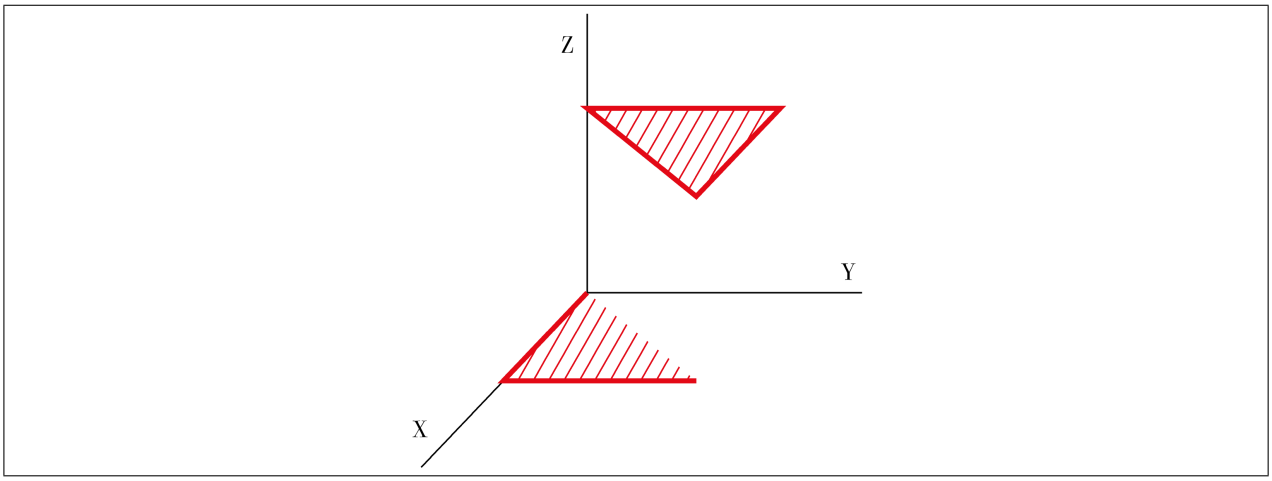


Figura 2.8: Gráfica de la función del ejemplo 2.9. Obsérvese que sobre la diagonal siempre toma el valor 1

que es discontinua en todos los puntos de la diagonal $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x = y \leq 1\}$ y continua en el resto de R.

Tomamos una partición de R en n^2 rectángulos,

$$R_{ij}^{(n)} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right], \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

[65] No demostraremos esto; ver, por ejemplo, teorema 14.5 de [1].

con lo que $\Delta x = \Delta y = 1/n$. Entonces para cualquier n, en los rectángulos $R_{ij}^{(n)}$ que están por encima de la diagonal, incluso tocándola, la función vale 1 en todos sus puntos, luego $f(\xi_{ij}^{(n)}) = 1$ independientemente de cómo elijamos los puntos $\xi_{ij}^{(n)}$. Análogamente, $f(\xi_{ij}^{(n)})$ vale 0 siempre que $R_{ij}^{(n)}$ esté por debajo de la diagonal, sin tocarla. Y en los demás, puede valer 0 o 1.

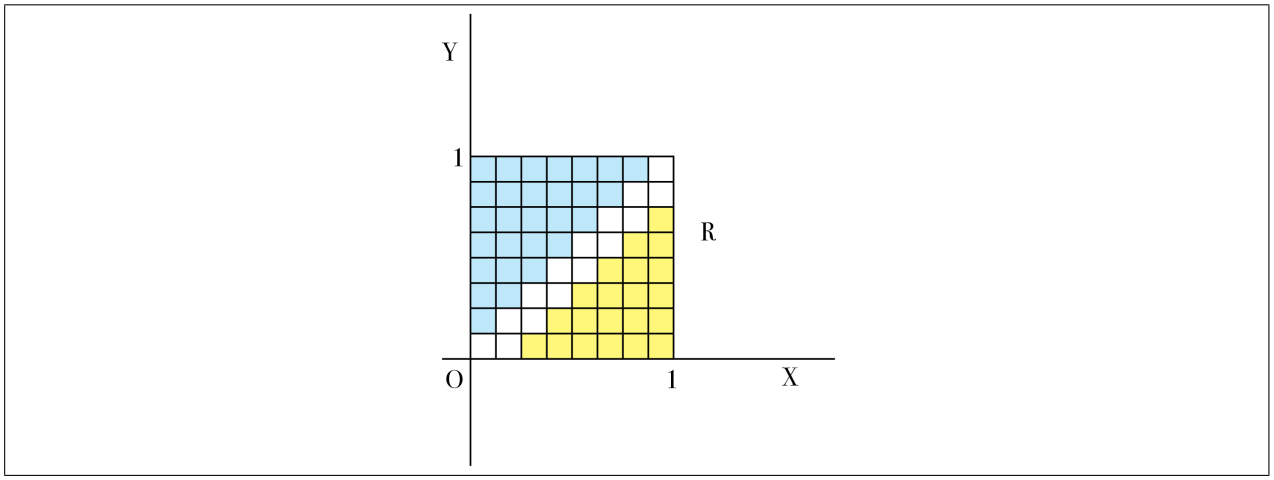


Figura 2.9: Partición correspondiente a $n = 8$ para el rectángulo R del ejemplo 2.9. En los rectángulos azules, $f(\xi_{ij}^{(8)})$ vale necesariamente 1. En los amarillos, vale necesariamente 0. Y en los blancos, puede valer 0 o 1, según cómo elijamos el punto $\xi_{ij}^{(8)}$

De los primeros $R_{ij}^{(n)}$ hay $1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n^2 - n)/2$ (hacer un recuento de los cuadrados azules en la figura 2.9), luego la suma de Riemann S_n está acotada así:

$$S_n = \sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_{ij}^{(n)}) \frac{1}{n^2} \geq \frac{n^2 - n}{2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Y de los terceros (cuadrados blancos en la figura) hay $2n - 1$, luego tenemos esta otra acotación por arriba, para el caso de que todos los $\xi_{ij}^{(n)}$ se eligieran donde la función vale 1 siempre que se pueda:

$$S_n \leq \left(\frac{n^2 - n}{2} + 2n - 1 \right) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{n^2}.$$

La propiedad del sandwich para sucesiones garantiza que en todos los casos $S_n \to \frac{1}{2}$, luego la función es integrable y su integral vale 1/2. ■

39. Sobre un rectángulo, CONTINUA $\Rightarrow$ INTEGRABLE pero INTEGRABLE $\not\Rightarrow$ CONTINUA. En otras palabras, ser continua es una condición SUFICIENTE para que una función sea integrable, pero no es NECESARIA.

40. Es más: que las discontinuidades formen un conjunto finito es una CONDICIÓN SUFICIENTE para que una función acotada sea integrable, pero no es NECESARIA (ver teorema 2.11).

¡¡No confundir CONDICIÓN NECESARIA con CONDICIÓN SUFICIENTE!!

En este ejemplo la función era continua en todo el rectángulo salvo en la recta $y = x$. La demostración de su integrabilidad se ha apoyado en que el conjunto donde falla la continuidad, la diagonal, es un conjunto tan fino que se puede sumergir en una colección de rectángulos infinitesimales cuyas áreas suman un infinitésimo. Y entonces la contribución total de estos rectángulos a las sumas de Riemann es despreciable, con lo que puede decirse que los valores de la función en ese conjunto son irrelevantes para la integral, puesto que no hacen variar la suma de Riemann (formada por una cantidad infinita de sumandos) más que en un infinitésimo; en última instancia no nos importa si en esos puntos la función es continua o no.

Generalizando esta idea a otros conjuntos que se describan mediante expresiones más complicadas que $y = x$, se obtienen varias condiciones suficientes de integrabilidad de una función, que permiten soslayar

la discontinuidad de la función en conjuntos que, aun siendo infinitos, están contenidos en gráficas o en imágenes de determinadas funciones.

Nuestra generalización del ejemplo consistirá en admitir que la función no sea continua en los puntos de

- la gráfica de una función continua (en el ejemplo 2.9, la diagonal era la gráfica de $x \rightsquigarrow x$)
- o la imagen de una función derivable con continuidad (en el ejemplo 2.9, la diagonal es la imagen de $t \rightsquigarrow (t,t)$),

tal como se enuncia a continuación:

Definición 2.10 *Diremos que un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ es* ***despreciable para la integración*** *cuando sea unión finita de conjuntos que son*

- *o bien gráficas de funciones continuas de una variable,*
- *o bien imágenes de funciones de clase $\mathscr{C}^1$ definidas sobre intervalos cerrados y acotados (lo que incluye a las curvas simples y a las curvas cerradas simples).*

Teorema 2.11 (Condición suficiente de integrabilidad sobre rectángulos) *Es integrable cualquier función de dos variables definida sobre un rectángulo, siempre que sea acotada y que sus discontinuidades formen un conjunto despreciable para la integración.*

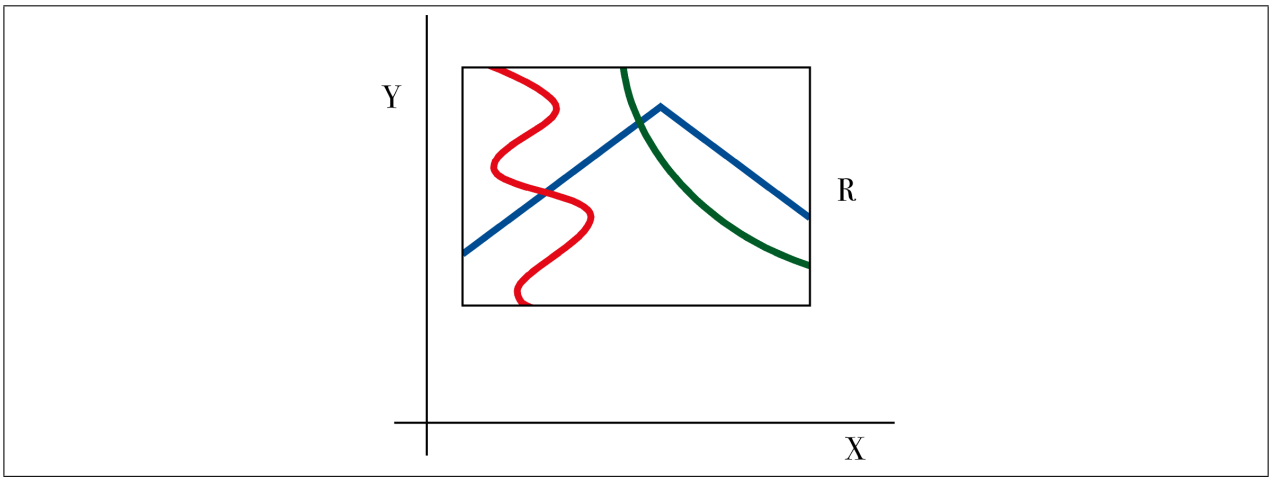


Figura 2.10: Sobre este rectángulo, la línea roja es la gráfica de una cierta función continua $x = h_1(y)$; la azul es la gráfica de otra función continua $y = h_2(x)$; y la verde es la gráfica de sendas funciones de los dos tipos. Una función acotada definida sobre R y que solamente sea discontinua en algunos de los puntos (o en todos ellos) de los conjuntos coloreados, es integrable sobre R, según el teorema 2.11

JUSTIFICACIÓN:

- *Las gráficas de funciones continuas de una variable han de tener, intuitivamente hablando, área nula, de modo que lo que pueda ocurrir en conjuntos de ese tamaño no afecta al valor de las integrales ni a la integrabilidad.*
- *El teorema de los incrementos finitos, junto con el hecho de que la derivada sea continua sobre un rectángulo, garantiza que cada función h de clase $\mathscr{C}^1$ admite una acotación del tipo $\|h(B) - h(A)\| \leq M|B - A|$ para todo par de puntos A, B pertenecientes al rectángulo que es el dominio de h. Una partición suficientemente fina del dominio da lugar entonces a una colección de rectángulos que recubren la imagen y cuya área total es tan pequeña como se quiera.*

DEMOSTRACIÓN:

- *En los ejercicios 5.5.4 a 5.5.6 de [15] se propone un esquema detallado para una demostración en el caso de dos variables que puede ser completada por el estudiante.*

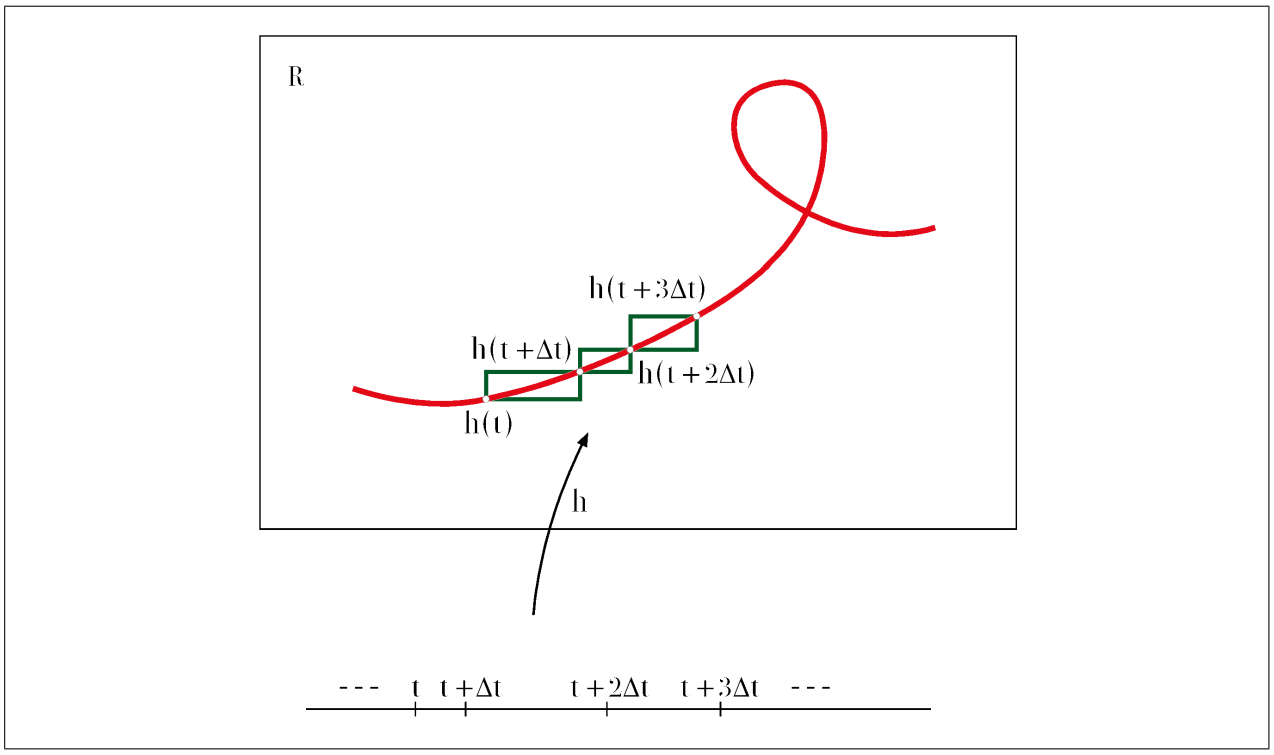


Figura 2.11: Para una partición suficientemente fina en el dominio de h, la imagen de h está contenida en una unión de rectángulos, cada uno de los cuales tiene la diagonal acotada por $M\Delta t$. La suma de las áreas de esos rectángulos puede hacerse tan pequeña como se quiera

- *Ver [2], teorema 7.2.11.*

Entre las gráficas de funciones continuas de una variable dentro de un rectángulo están los conjuntos formados por un solo punto: si, por ejemplo, $(x_0, y_0) \in R$, no hay más que construir la función $\alpha : \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha(x_0) = y_0$.

41. En la condición suficiente de integrabilidad que se refiere a las *imágenes* de funciones, la hipótesis de que las funciones sean de clase $\mathscr{C}^1$ no puede rebajarse a que sean solamente continuas.

El motivo es que algunas funciones continuas de una variable tienen una imagen en $\mathbb{R}^2$ que no es en absoluto despreciable desde el punto de vista de las integrales dobles, incluso las hay que rellenan todo un cuadrado. Por ejemplo, puede consultarse una función $[0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ que es continua y suprayectiva en [1], 9.7 o en [39].

Ninguna de nuestras dos condiciones suficientes para la integrabilidad es necesaria ([66]).

Una condición necesaria y suficiente para que una función sea integrable Riemann, condición que no se obtuvo hasta la década de 1910, mucho después de los trabajos de Riemann, está fuera del alcance de este curso (ver [1], teoremas 7.48 y 14.5). La idea planteada por primera vez por Riemann en 1854 (ver [10]) fue precisamente evitar este análisis detallado y estudiar las funciones integrables aunque no se sepan describir por completo. Esto es lo que haremos nosotros a continuación, empezando por averiguar qué ocurre al operar con funciones integrables.

Haremos un uso intensivo de la condición suficiente, incluso más de lo que parece:

42. A lo largo del curso integraremos a menudo funciones que serán continuas en *todos* los puntos de su dominio. Sin embargo, cuando integremos funciones continuas sobre algunos dominios que no sean rectángulos, incluso aunque sean tan sencillos como los círculos (ver teoremas 2.21 y 2.22), para probar que cualquier función de este tipo es integrable será imprescindible disponer de una condición suficiente de integrabilidad que sirva para funciones discontinuas.

[66] Ver [2], ejemplo 7.2.19 y teorema 7.2.11.

2.2.3. Propiedades elementales

En el caso de las propiedades que vamos a estudiar ahora, además de elementales son todas fáciles de demostrar, pero no siempre es así.

43. El sentido que en matemáticas se le da al adjetivo *elemental* es un poco peculiar. No es sinónimo de *fácil*. Una demostración puede ser elemental y a la vez muy difícil. Se utiliza para indicar que algo (una propiedad, una demostración, un concepto) es accesible o comprensible sin un gran aparato matemático.

Todas las propiedades elementales de las integrales las utilizaremos con mucha frecuencia y sin necesidad de citarlas expresamente, tanto en el desarrollo de la teoría como en la resolución de problemas.

Teorema 2.12 *Supóngase que f y g son funciones definidas sobre el mismo rectángulo R, ambas integrables. Entonces*

1. *Suma: La función $f+g$ también es integrable, y $\iint_R (f+g) = \iint_R f + \iint_R g$.*
2. *Producto por un escalar: Si k es cualquier número real, la función kf también es integrable, y $\iint_R (kf) = k \iint_R f$.*

Estas dos primeras propiedades pueden enunciarse conjuntamente de otro modo diciendo que el conjunto de funciones integrables es un espacio vectorial y la integral es una aplicación lineal sobre él.

3. *Monotonía: Si $f \leq g$, entonces $\iint_R f \leq \iint_R g$.*
4. *Valor Absoluto: La función $|f|$ también es integrable, y $\left|\iint f\right| \leq \iint |f|$. La última desigualdad puede considerarse como una generalización de la desigualdad triangular.*
5. *La operación de integrar es aditiva también para los recintos de integración: Si $R = R^1 \cup \cdots \cup R^m$, de modo que siempre que $i \neq j$ los rectángulos R^i y R^j no se solapan, y $h : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función acotada, entonces h es integrable si y sólo si son integrables todas las restricciones de h a cada R^i; y además*
$$\iint_R h = \iint_{R^1} h + \cdots + \iint_{R^m} h,$$
donde $\iint_{R^i} h$ significa la integral de la restricción de h al rectángulo R^i, $\iint_{R^i} h|_{R^i}$. ([67])

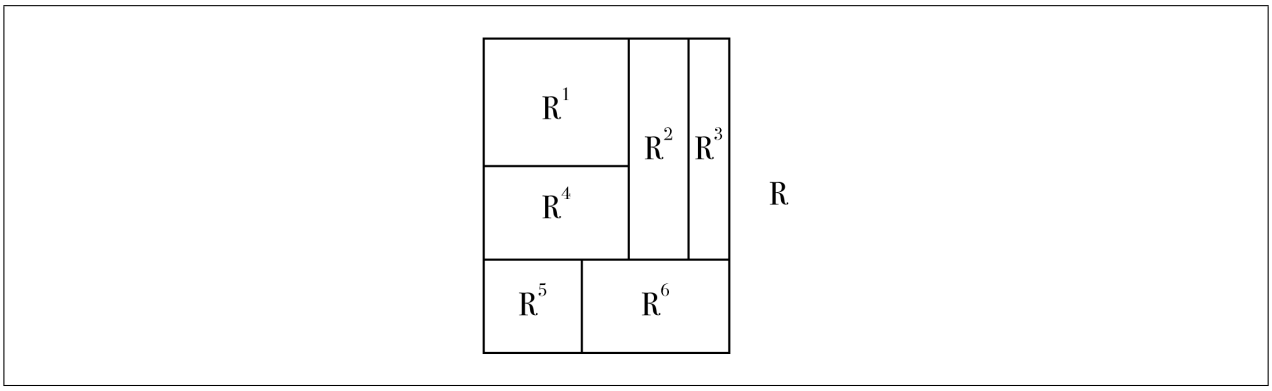


Figura 2.12: El rectángulo R es la unión de 6 rectángulos, $R^1 \ldots R^6$, que no se solapan

(Las operaciones y relaciones con funciones se entienden "punto a punto" siempre que no se diga otra cosa, es decir, la función $f+g$ está definida por $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$ para todo punto $(x,y) \in R$, etc.)

[67] Este abuso de notación es inocuo y lo usaremos muy a menudo: siempre que f sea una función definida sobre un dominio D y D_0 sea un subconjunto de D, la integral $\int_{D_0} f$ significará en realidad la integral sobre D_0 de *la restricción de f a D_0*, es decir, la integral sobre D_0 de la función $f\,|_{D_0}$.

Demostración: *Haremos sólo la demostración de la primera propiedad, puede consultarse el resto de la demostración en el apartado (K.3).*

Aplicamos directamente la definición 2.4, para lo que formamos las sumas de Riemann de $f+g$,

$$S_n(f+g) = \sum_{i=1}^{n} \big[f(\xi_{ij}) + g(\xi_{ij})\big]\Delta x_i \Delta y_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{ij})\Delta x_i \Delta y_j + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_{ij})\Delta x_i \Delta y_j \to \iint f + \iint g,$$

donde la última convergencia se sigue de la integrabilidad de f y de g, independientemente de cuáles sean los puntos ξ_{ij}.

44. Conviene tener cierto cuidado con el enunciado de estas propiedades elementales. Así, la suma de dos integrables es integrable, pero que la suma de dos funciones sea integrable no implica que los sumandos sean integrables ([68]). Esto se debe a que con los límites en general ocurre lo mismo, y la integral es en última instancia una forma de límite.

Resulta peligroso manejar un límite del que no se ha probado su existencia, podrían obtenerse conclusiones absurdas porque en cuanto se opera con un límite se le está dando existencia, aunque sea de modo implícito. ([69])

2.2.4. Integrales reiteradas

Volvamos al principio de este capítulo 2 y tomemos de nuevo una función del tipo $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea positiva y acotada. Otra forma de aproximarse al volumen de la región $\Omega(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in [a,b] \times [c,d],\ 0 \le z \le f(x,y)\}$ es la siguiente.

Fijado un $x \in [a,b]$, calculamos el área de la sección plana formada por los puntos de $\Omega(f)$ cuya primera coordenada es exactamente x, es decir, $\int_c^d f(x,y)\,dy$. Ahora hacemos un barrido del volumen $\Omega(f)$ variando x entre a y b y tratando de sumar las áreas de las secciones planas. En otras palabras, calculamos la integral $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$. De acuerdo con la percepción intuitiva que tenemos de las integrales de una variable, el resultado debería corresponder al volumen de $\Omega(f)$.

45. Obsérvese que estamos tratando el cálculo de este volumen como si el área de la sección plana en el punto x fuera una densidad en el punto x y calculásemos la masa del segmento $[a,b]$.

En realidad, esta idea es similar a la que nos dio pie para la primera introducción de la integral de una variable en el apartado 1.1.1, cuando para medir el área del conjunto $\Omega(f)$, comprendido entre la gráfica de f y el eje X integrábamos f, es decir, hacíamos *un barrido a lo largo del intervalo con los segmentos verticales* de altura $f(x)$.

Si el planteamiento resulta ser correcto, tendrá la ventaja de que nos permitirá transformar el cómputo de una integral doble en el de dos integrales consecutivas de una sola variable. Y para calcular integrales de una variable disponemos de la regla de Barrow, por lo que nos proporcionará una forma de evitar la aproximación mediante sumas de Riemann, que suele ser engorrosa.

---

[68] Tómese una función f que no sea integrable, entonces $-f$ tampoco lo es y en cambio la suma $f + (-f)$ sí que lo es.

[69] Una muestra de los peligros de manejar límites inexistentes. Considérese el número que en notación decimal se escribe $\alpha = 0,9999\cdots$, con infinitos 9 por la derecha (podemos pensar en α como el límite de la sucesión $0,9,\ 0,99,\ 0,999,\dots$). Multiplicando por 10 y restando como lo hacemos habitualmente con decimales obtenemos

$$9\alpha = 10\alpha - \alpha = 9,999\cdots - 0,999\cdots = 9,000\cdots = 9 \quad\Longrightarrow\quad \alpha = 1.$$

Hasta aquí, todo correcto, gracias a que los límites con los que estamos operando existen todos. Probemos a hacer lo mismo con $\beta = \cdots 999$, con infinitos 9 por la izquierda. Entonces

$$-9\beta = \beta - 10\beta = \cdots 999 - \cdots 990 = 9 \quad\Longrightarrow\quad \beta = -1,$$

resultado que no es válido en el cuerpo ordenado $\mathbb{R}$ ni tiene ningún sentido intuitivo (aunque se le puede dar una interpretación dotando a $\mathbb{Q}$ de una topología distinta, relacionada con los números p-ádicos, asunto en el que no entraremos en este curso). El problema con el cálculo de β es que estamos tratándolo como un elemento de $\mathbb{R}$, cuando en realidad el límite que lo define no existe. Este abuso nos lleva a un resultado absurdo.

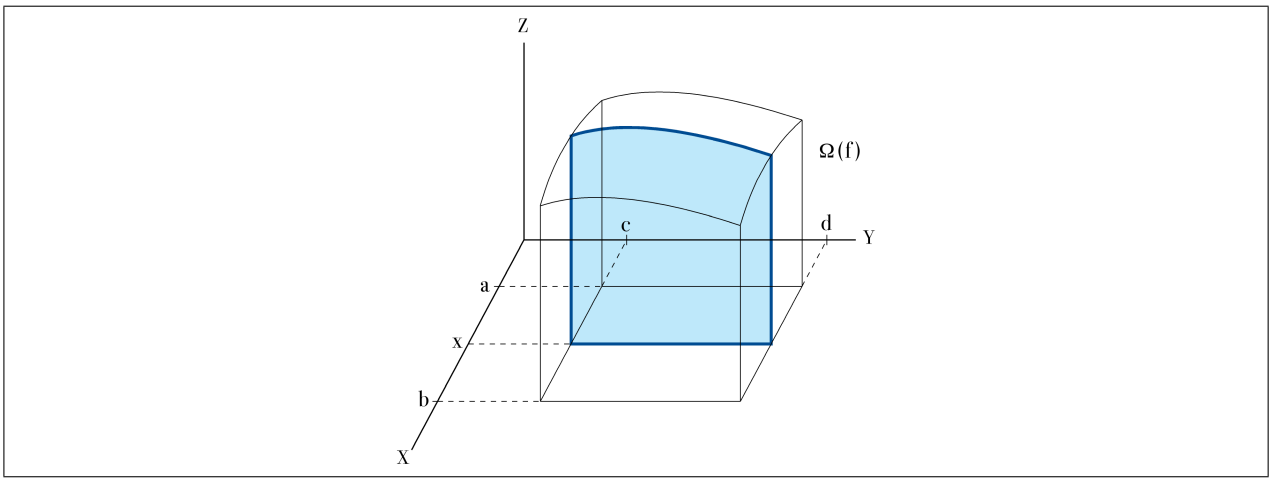


Figura 2.13: El área de la sección azul es la integral $\int_c^d f(x,y)\,dy$. Si hacemos que x recorra todo el intervalo $[a,b]$, la sección azul recorrerá todo el conjunto $\Omega(f)$

Teorema 2.13 (de Fubini) *Sea f una función integrable sobre $R = [a,b] \times [c,d]$. Si la integral $\int_c^d f(x,y)\,dy$ existe para cada x de $[a,b]$, entonces la* ***integral reiterada*** $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$ *también existe, y además*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

Es igualmente válido un enunciado análogo cambiando el orden de integración y los papeles de las variables x e y.

DEMOSTRACIÓN: *Puede consultarse una demostración en [2], teorema 7.3.11.*

JUSTIFICACIÓN: *Tomamos cualquier partición infinitesimal sobre R y elegimos $\xi_{ij} = (x_i, y_j)$, es decir, evaluamos la función en los vértices "de abajo a la izquierda". Consideramos ahora las sumas hiperfinitas*

$$\sum_{i,j=1}^{H} f(x_i,y_j)\;dx_i\,dy_j = \sum_{i=1}^{H}\left(\sum_{j=1}^{H} f(x_i,y_j)dy_j\right) dx_i.$$

Siempre que f sea integrable sobre R, la primera suma estará infinitamente próxima a la integral doble. Y como $\sum_{j=1}^{H} f(x,y_j)dy_j \approx \int_c^d f(x,y)\,dy$ para cualquier $x \in [a,b]$, resulta razonable esperar que la suma de la derecha esté infinitamente próxima a la integral reiterada (esto último requiere una demostración).

Corolario 2.14 (teorema de Fubini para funciones continuas) *Sea $f : R = [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

DEMOSTRACIÓN: *Al ser f continua se cumplen todas las hipótesis del teorema de Fubini.*

En una integral reiterada resulta crucial saber respecto de qué variable estamos integrando en cada momento. Cuando el integrando sea largo y complicado, la notación usada en el corolario puede resultar poco clara y requerir paréntesis, como hemos puesto en el enunciado del teorema de Fubini. En estos casos también se recurre a un abuso de notación para evitar paréntesis sin perder claridad, que es poner $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$ o $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ en lugar de $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$.

Ejemplo 2.15 Evaluar $\iint_{[0,2]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x^2\cos y - xy)\,dx\,dy$.

Como la función es continua podemos integrar reiteradamente,

$$\int_0^2 dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2\cos y - xy)dy = \int_0^2 \left[x^2\sin y - \frac{x}{2}y^2\right]_{y=-\frac{\pi}{2}}^{y=\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^2 2x^2\,dx = \frac{16}{3}. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 2.16 (Problema 7.25 de [1] y problema 5.2.9 de [15].) Sea $f:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

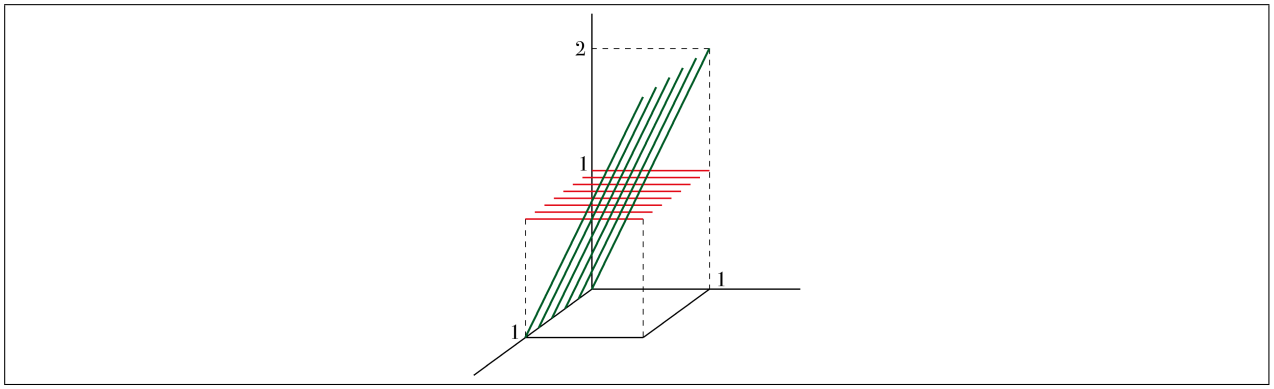


Figura 2.14: Gráfica de la función del ejemplo 2.16, formada por la unión de los segmentos rojos (que corresponden a los valores racionales de x) con los verdes (para cada x irracional)

La integral reiterada $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$ existe, pero f no es integrable. En efecto:

1. *Para todo* $x\in[0,1]$ *existe* $\int_0^1 f(x,y)\,dy$. Para probarlo distinguimos entre x racional y x irracional.

   - $x\in\mathbb{Q}$. Entonces $f(x,y)$ es constantemente igual a 1, luego es integrable y $\int_0^1 f(x,y)\,dy = 1$;

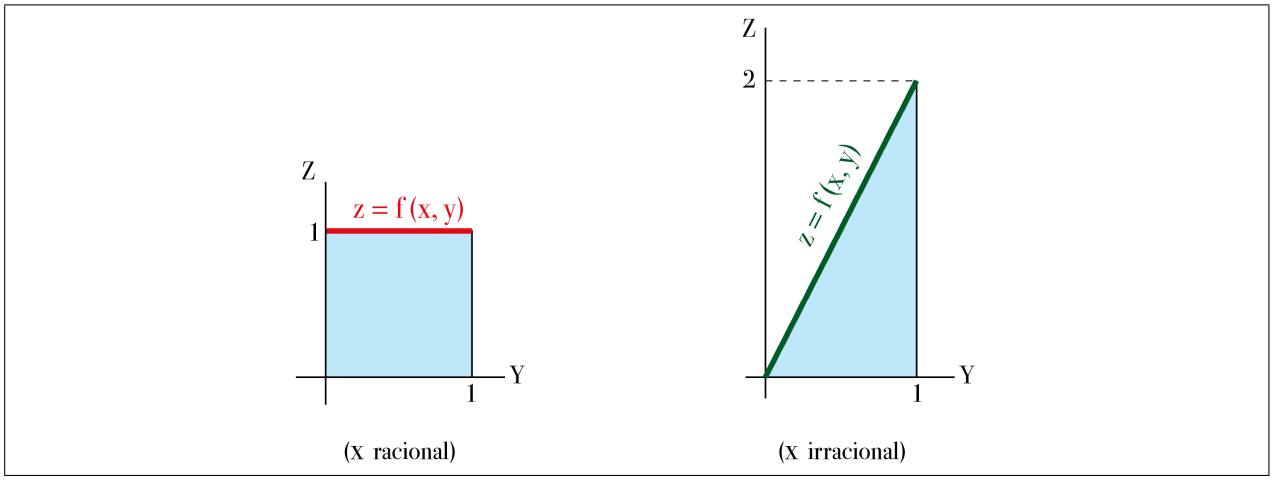


Figura 2.15: El área de la región azul es, en cada caso, el valor de la integral $\int_c^d f(x,y)\,dy$

   - $x\notin\mathbb{Q}$. Entonces $f(x,y)=2y$ es continua, luego es integrable y $\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 2y\,dy = 1$;

luego $\forall x\in[0,1]$, $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ existe y es constantemente igual a 1.

2. *Existe la integral reiterada* $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$. Se sigue inmediatamente del hecho de que, según el cálculo realizado en el punto anterior, la función a integrar en x es constante. Y la integral reiterada vale $\int_0^1 dx = 1$.

3. En cambio, *la integral doble no existe.* Se demuestra argumentando de la misma forma que en el ejemplo 2.7. ■

46. El ejemplo anterior muestra que en el teorema de Fubini no se puede suprimir la hipótesis de que la integral doble exista: puede existir una de las dos integrales reiteradas sin que exista la doble ([70]).

Dicho en otras palabras, el cálculo exitoso de una integral reiterada no garantiza, por sí solo, que hayamos calculado la integral doble, puesto que ésta puede no existir.

[70] Incluso pueden existir y ser iguales las dos reiteradas sin que exista la doble. Para un ejemplo, consultar el ejercicio 14.7 de [1]. También es posible que exista la integral doble pero la primera de las integrales reiteradas no exista para un conjunto denso de valores de la variable: ver [20], observación 4 al Teorema 3-10.

Por otra parte, también hay funciones sobre un rectángulo que son integrables pero para las cuales no existe ninguna de las dos integrales reiteradas, ver [2], ejercicio 7.3.3.

2.3 Funciones definidas sobre otros conjuntos acotados

2.3.1. Introducción

Desde el punto de vista de las aplicaciones de la integral, no nos podemos limitar a considerar únicamente funciones de dos variables definidas sobre rectángulos. Cuando tratamos con una sola variable, para integrar sobre un conjunto que no sea un intervalo lo que hacemos es descomponerlo en la unión de un número finito

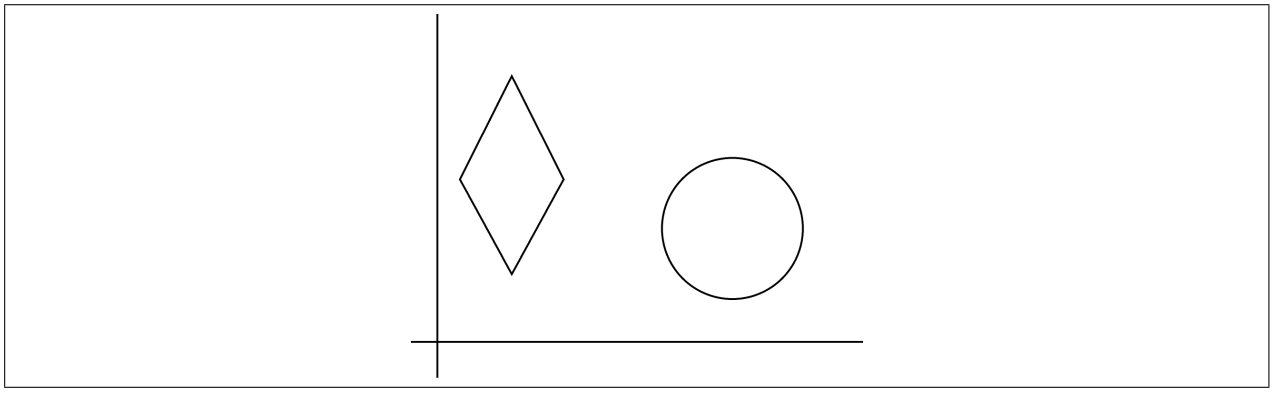


Figura 2.16: Un círculo o un rombo no pueden descomponerse en la unión de un número finito de rectángulos

de intervalos que no se solapen, calculamos la integral en cada intervalo y sumamos, con lo que se resuelven la inmensa mayoría de los casos. Pero en cuanto ya tenemos dos variables, hay conjuntos muy sencillos, como por ejemplo un círculo, que no se pueden descomponer en unión de un número finito de rectángulos.

En este apartado extenderemos la definición de integrable a funciones acotadas sobre conjuntos acotados que no necesariamente sean rectángulos ([71]). Por los motivos expuestos en la sección 2.1, nos limitaremos enseguida a un tipo especial de dominios.

Un ejemplo nos dará las pistas de cómo reducir una integral sobre un conjunto que no sea un rectángulo a una integral sobre otro conjunto que sí lo sea:

Ejemplo 2.17 (Ejemplo 5.3.2 de [15].) Para hallar el volumen del tetraedro acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y - x + z = 1$, enlazamos la cara inclinada del tetraedro con el triángulo plano en $z = 0$ con vértices en $(-1, 0)$, $(-1, 1)$ y $(0, 1)$ (ver figura). Ahora calculamos la integral sobre $[-1, 0] \times [0, 1]$ de la

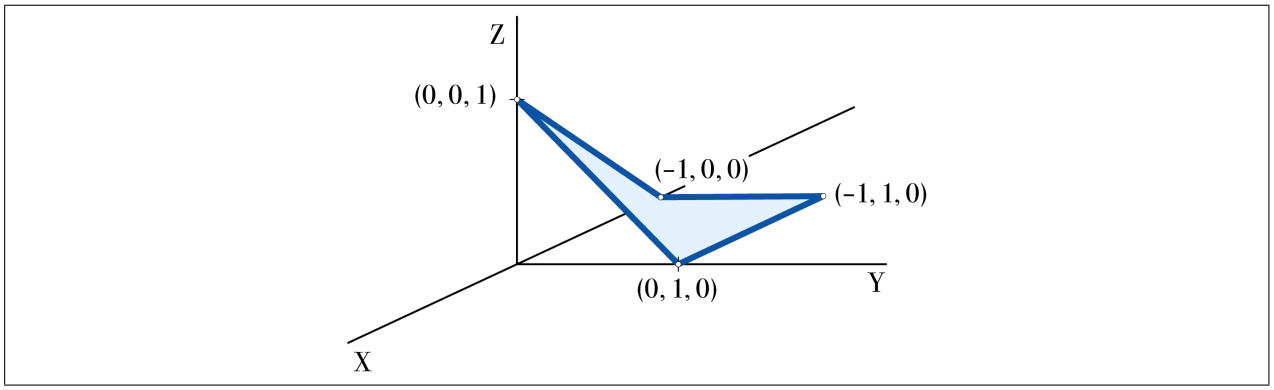


Figura 2.17: La cara inclinada del tetraedro junto con el triángulo en el plano XY

función cuya gráfica es la unión de esos dos triángulos y aplicamos Fubini, dado que la función es continua:

[71] Siguiendo una idea debida a Lejeune Dirichlet, ver [10], página 334.

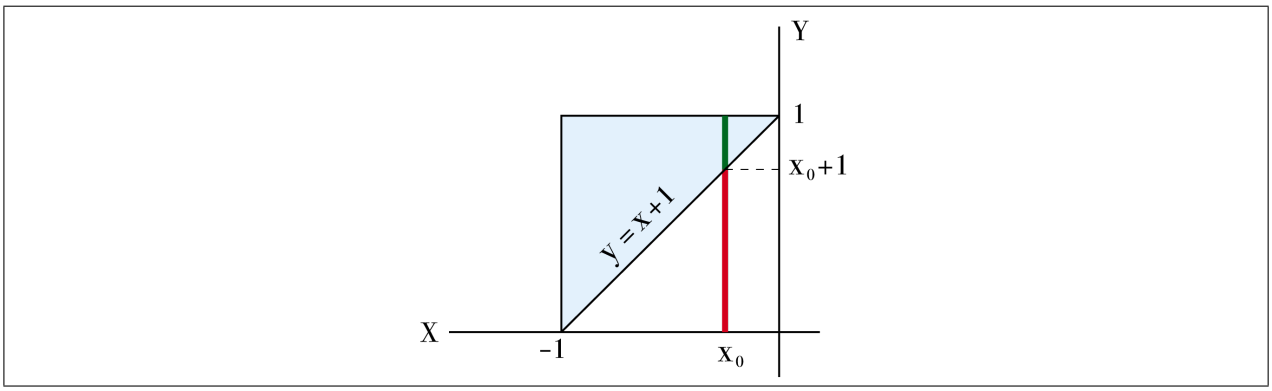


Figura 2.18: Una vez fijado x_0, integramos sobre el segmento $\{x_0\} \times [0,1]$. Sobre el tramo rojo, la función a integrar vale $x_0 - y + 1$, y sobre el tramo verde la función a integrar vale 0

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{0}^{x+1} (x - y + 1)\, dy + \int_{x+1}^{1} 0 \cdot dy \right) dx = \frac{1}{6}. \qquad \blacksquare$$

47. La definición que damos a continuación puede parecer una especie de idea feliz, pero si apelamos al ejemplo anterior y a lo que expusimos al comienzo de la sección 2.1 como guía intuitiva para la definición de la integral de una función que solamente tome valores positivos, no resultará extraña.

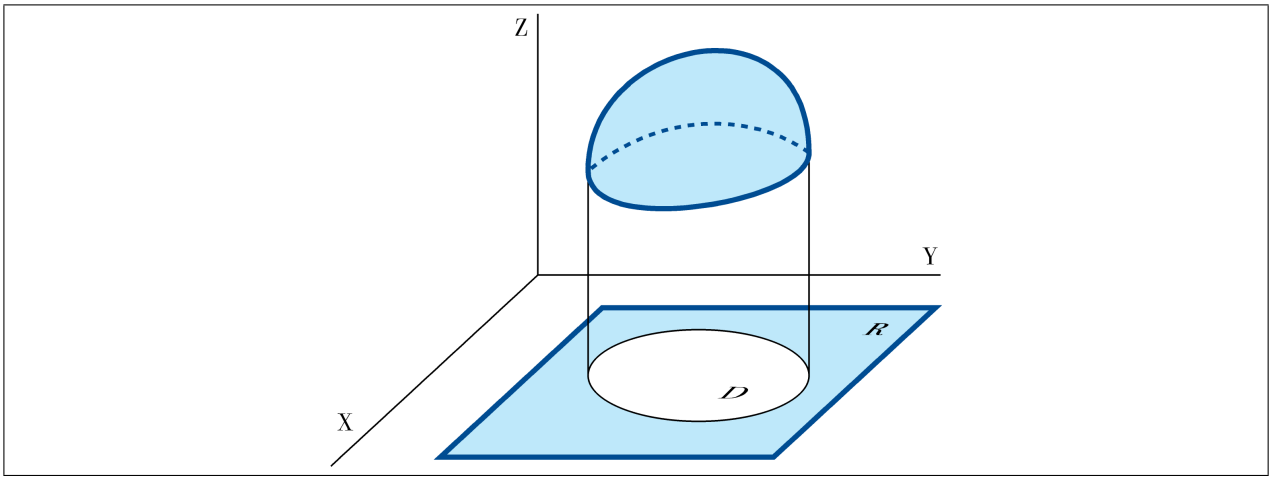


Figura 2.19: La gráfica de f^* es todo el conjunto azul

Definición 2.18 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y definida sobre un conjunto acotado $D \subset \mathbb{R}^2$. Tomamos un rectángulo R que contenga a D y prolongamos f a una nueva función f^* sobre todo R dando el valor 0 a todos los nuevos puntos. Entonces $f^* : R \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función*

$$f^*(\boldsymbol{p}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{p}) & si\ \boldsymbol{p} \in D. \\ 0 & si\ \boldsymbol{p} \in R \backslash D \end{cases}$$

Diremos que f es ***integrable (sobre D)*** *cuando lo sea f^*; y en este caso llamaremos* ***integral de f (sobre D)*** *a la integral de f^*, $\iint_D f = \iint_R f^*$.*

48. Ponemos paréntesis en la definición anterior para indicar que contienen una información prescindible (por ser redundante).

Estrictamente hablando, no hace falta decir "sobre D" puesto que el dominio D es un dato que está incluido entre los de la función f. Lo que ocurre es que cuando se integra una función sobre una parte E de su dominio de definición, no sobre el total D, es más corriente decir "integral de f sobre E" que "integral de la restricción de f a E". Esto constituye un abuso de notación pero como resulta útil y no suele dar lugar a confusión, no hay inconveniente en usarlo ([67]).

2.3.2. Regiones bidimensionales simples

El estudio de la integrabilidad sobre conjuntos acotados que no sean rectángulos se complica debido a que existen conjuntos acotados con una frontera tan extravagante que hace que sobre ellos ni siquiera las funciones constantes sean integrables ([72]).

Afortunadamente, y gracias al teorema 2.11, no ocurre lo mismo cuando se trata de conjuntos cuya frontera está formada solamente por un número finito de gráficas de funciones continuas y de curvas simples. Esto nos da pie para introducir una clase muy especial de conjuntos cerrados y acotados que aparecerá de manera natural en los problemas y en las aplicaciones y que llamaremos regiones simples, que vienen a ser aquellos conjuntos bidimensionales cuyos bordes se describen de manera sencilla a través de funciones continuas $y = \varphi(x)$ o $x = \psi(y)$. Para ellos no solamente probaremos que las funciones continuas son integrables, sino que podremos generalizar el procedimiento utilizado en el ejemplo 2.17 para realizar los cálculos de la integral.

Definición 2.19 ([73])
*Una **región bidimensional simple en la dirección de las y** es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$ limitado por arriba y por abajo por dos gráficas de funciones continuas, es decir, que admite una descripción de este tipo*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

donde a y b son dos números reales, $a \leq b$, y φ_1 y φ_2 son dos funciones continuas definidas sobre el intervalo $[a, b]$, con $\varphi_1 \leq \varphi_2$.
*Una **región bidimensional simple en la dirección de las x** es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$ limitado por la izquierda y por la derecha por dos gráficas de funciones continuas, es decir, que admite una descripción de este tipo*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

donde c y d son dos números reales, $c \leq d$, y ψ_1 y ψ_2 son dos funciones continuas definidas sobre el intervalo $[c, d]$, con $\psi_1 \leq \psi_2$.
*Llamaremos **región simple** a cualquier conjunto que sea una región bidimensional simple en alguna de las dos direcciones.*

En algunos libros a las regiones simples, en lugar de denominarlas *en la dirección de las x* o *en la dirección de las y*, se les llama *de tipo* 1 o *de tipo* 2, u otras expresiones similares (ver, por ejemplo, [15]).

49. Una buena guía intuitiva para reconocer una región simple en la dirección de las y consiste en pensar que lanzamos cualquier línea imaginaria paralela al eje Y, $x = x_0$, la recorremos de abajo a arriba y observar si "entramos y salimos" varias veces del conjunto. Si esto ocurre para algún x_0, entonces el conjunto no es simple en la dirección de las y.

[72] Por ejemplo, el conjunto $X = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = 0 \text{ siempre que } x \in \mathbb{Q}\}$ tiene como frontera $\operatorname{Fr} X$ a todo el conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$, ver la figura 2.28. Y la función que vale constantemente 1 en todos los puntos de X, que es obviamente continua sobre X, no es integrable (para demostrarlo esto último utilizar la definición 2.18 y el ejemplo 2.7).

[73] De momento, ésta será nuestra definición. Sin embargo, ver la observación 65, que exigirá también que su conjunto frontera sea una curva cerrada simple.

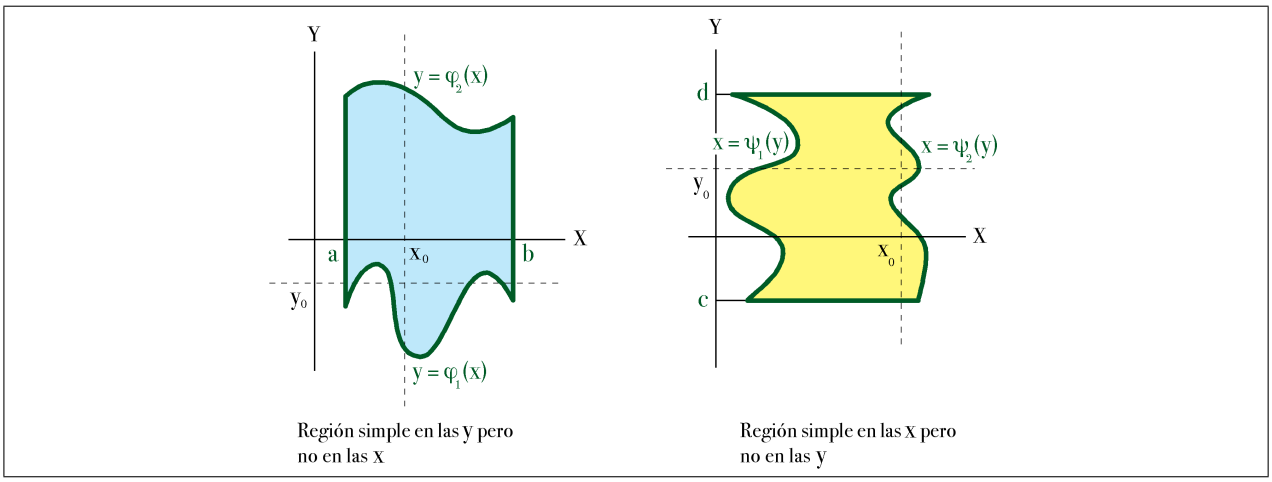


Figura 2.20: Ejemplos de regiones simples

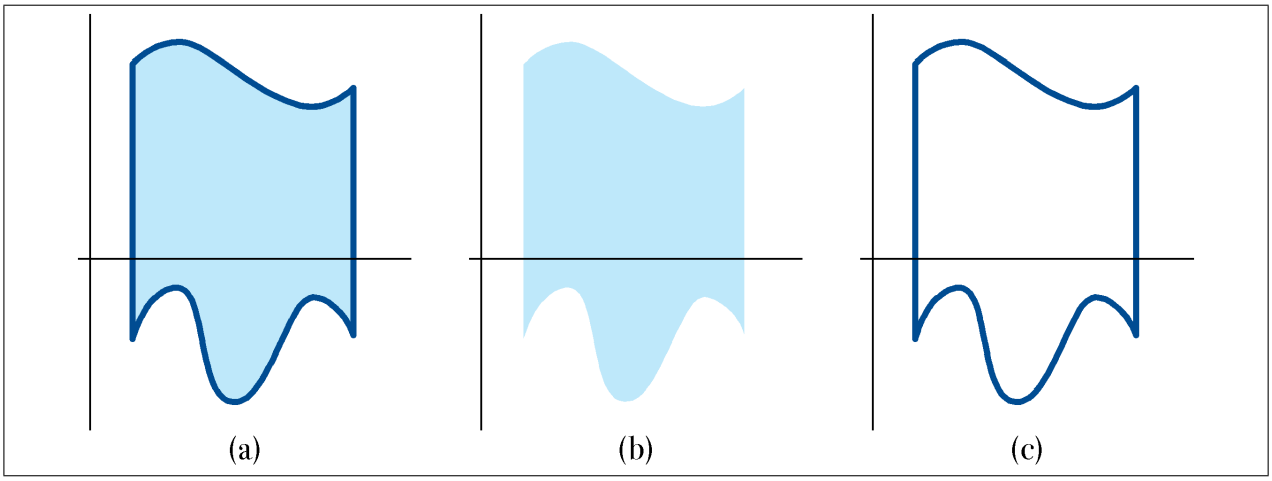


Figura 2.21: (a) Región simple D. (b) $\operatorname{Int} D$. (c) ∂D

Teorema 2.20 *Sea D una región simple en la dirección de las y como en la definición 2.19. Entonces*

$$\operatorname{Int} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}.$$
$$\operatorname{Fr} D = \{(x,y) \in D : x = a \ \vee\ x = b \ \vee\ y = \varphi_1(x) \ \vee\ y = \varphi_2(x)\}.$$

Análogas fórmulas para el interior y para la frontera pueden darse para el caso de que D sea una región simple en la dirección de las x.

Cuando tratemos con regiones simples en $\mathbb{R}^2$, utilizaremos también el nombre de ***borde de D, ∂D,*** *para denominar la frontera de D.*

DEMOSTRACIÓN: *Ver el anexo J.*

Siguiendo el esquema aplicado en el ejemplo 2.17, supongamos que tenemos que demostrar que existe y calcular la integral de una *función continua* f definida sobre un conjunto D que es una región simple en la dirección de las y (en el ejemplo la función era $f(x,y) = x - y + 1$ y la región era la base del tetraedro). Para ello, utilizando las notaciones de la definición de región simple, encerramos D en el rectángulo $R = [a,b] \times [a',b']$, donde a' necesariamente será menor o igual que el mínimo de φ_1 y b' necesariamente será mayor o igual que el máximo de φ_2 (ambos extremos absolutos se alcanzan, puesto que las funciones son continuas sobre un intervalo cerrado y acotado), y aplicamos el teorema de Fubini:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R f^*(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{a'}^{b'} f^*(x,y)\,dy \right) dx =$$

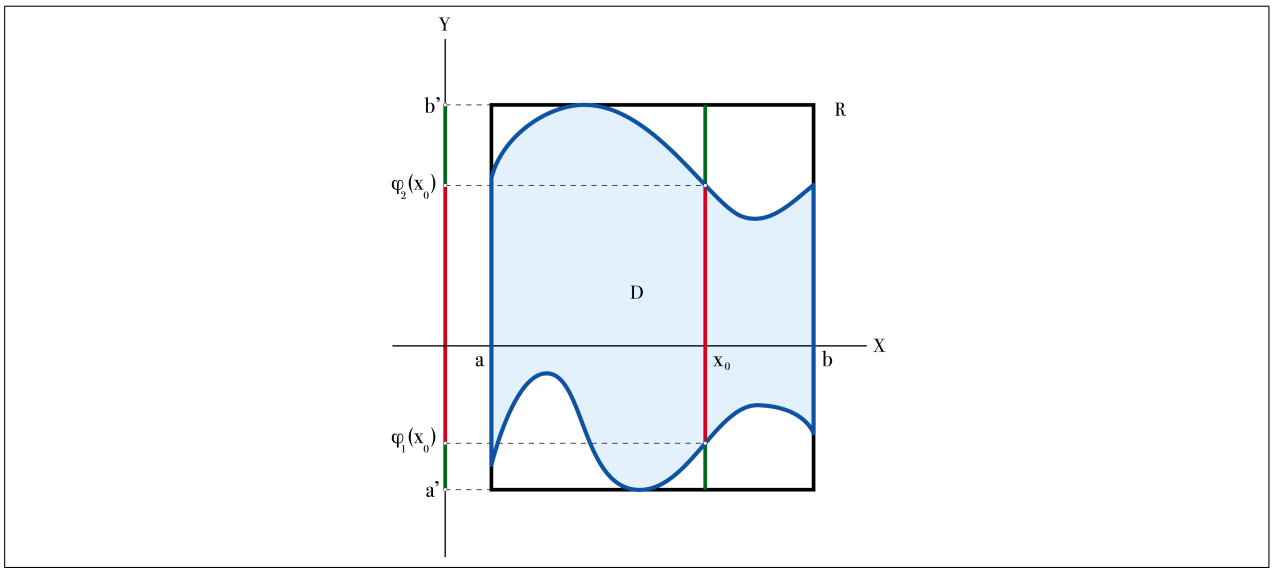


Figura 2.22: Sobre los tramos verdes la función f^* es nula y sobre los tramos rojos la función f^* y f coinciden

$$= \int_a^b \left(\int_{a'}^{\varphi_1(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x,y)\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^{b'} f^*(x,y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_{a'}^{\varphi_1(x)} 0\,dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy + \int_{\varphi_2(x)}^{b'} 0\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Hay que resaltar que el teorema de Fubini es aplicable puesto que se cumplen sus hipótesis:

- La función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre el conjunto cerrado y acotado D, luego es acotada por el teorema de Weierstrass para funciones de dos variables. Y la función f^* toma los mismos valores que f y además, como mucho, el 0. Luego f^* también es acotada.

- Como la función f era continua en todos los puntos de D, la función f^* seguirá siéndolo en los puntos del interior de D, puesto que cualquier sucesión que tienda a un punto de $\operatorname{Int} D$ tiene todos sus puntos (salvo, quizá, un número finito) dentro de $\operatorname{Int} D$ ([74]). También es continua en los puntos $R \backslash D$, porque en todos los puntos (salvo, quizá un número finito) de cualquier sucesión de puntos de R que tienda a un punto de $R \backslash D$, la función f^* es constantemente nula ([75]). Nos queda por estudiar la continuidad en los puntos del borde de D, que está formado por, a lo más, cuatro partes:

  - las gráficas de las funciones continuas φ_1 y φ_2 ([76]);
  - los dos segmentos (o puntos) $x = a$, $\varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)$ y $x = b$, $\varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b)$ ([77]).

  Luego en todo caso se cumplirá la condición suficiente del teorema 2.11, y en consecuencia la función f^* es integrable sobre el rectángulo $[a,b] \times [a',b']$.

- Para cada x_0 de $[a,b]$, la función $f^*(x_0,y)$ (donde la variable es la y) es continua en todos los puntos de $[a',b']$ salvo quizá en los puntos $\varphi_1(x_0)$ y $\varphi_2(x_0)$ (ver la figura 2.24), luego integrable a lo largo de $[a',b']$.

---

[74] Puesto que $\operatorname{Int} D$ es abierto, por cumplir la condición suficiente que dimos tras la definición 1.16.

[75] El conjunto $R \backslash D$ no es abierto en $\mathbb{R}^2$. No obstante, se puede razonar como en la demostración del teorema J.1, puesto que también las desigualdades que definen a $R \backslash D$ como subconjunto de R son estrictas.

[76] En estos puntos es posible que la función f^* sea discontinua.

[77] f^* es continua en los puntos de estos segmentos salvo, quizá en sus extremos.

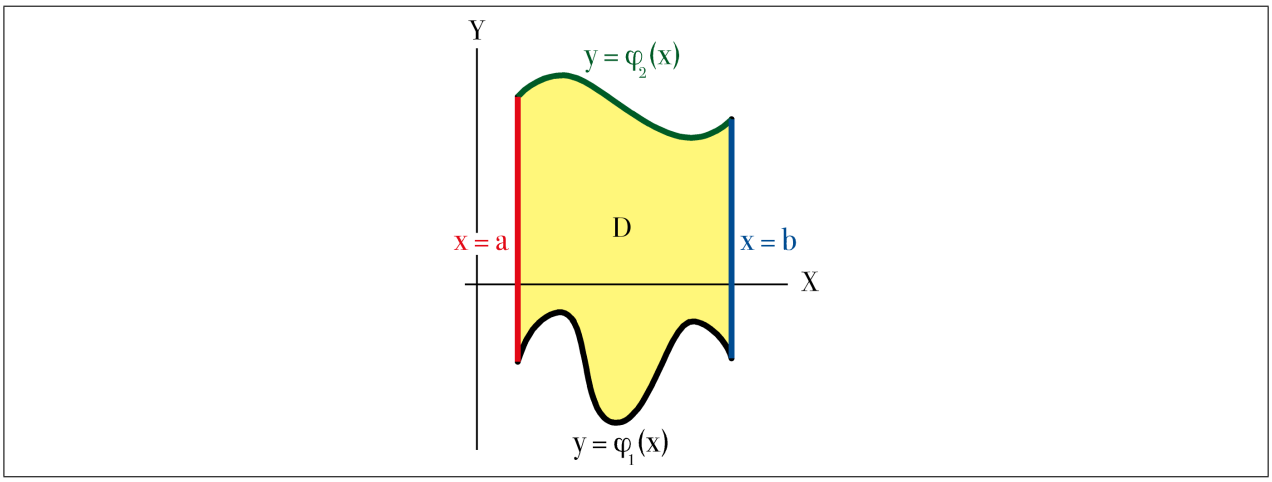


Figura 2.23: ∂D está formado por las gráficas roja, verde, azul y negra. Para otros D es posible que la gráfica azul o la roja consten de un solo punto

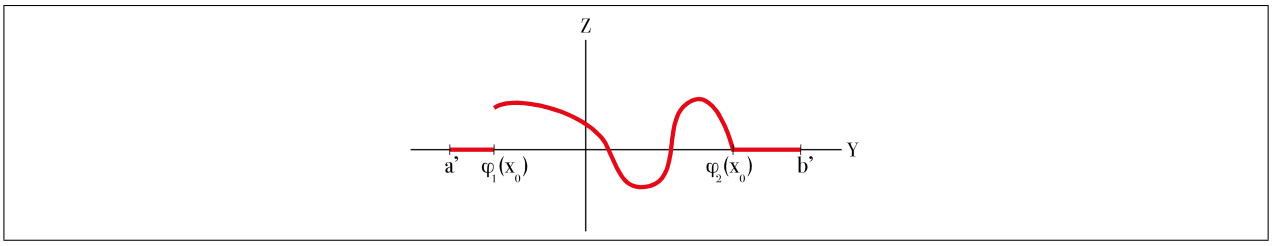


Figura 2.24: En rojo, la gráfica de $z = f^*(x_0, y)$ para una cierta f. En este caso, la función $y \rightsquigarrow f^*(x_0, y)$ sería discontinua en $\varphi_1(x_0)$, pero continua en $\varphi_2(x_0)$. En los demás puntos de $[a', b']$ siempre es continua, cualquiera que sea la función continua f

Hemos demostrado por tanto el siguiente resultado.

Teorema 2.21 *Sea f una función continua sobre D, donde D es una región bidimensional simple en la dirección de las y. Entonces f es integrable sobre D y*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

DEMOSTRACIÓN: *Está contenida en los razonamientos previos al enunciado.*

De manera completamente análoga se demostraría un resultado similar para las regiones simples en la dirección de las x (notaciones como en la definición 2.19):

Teorema 2.22 *Sea f una función continua sobre D, donde D una región bidimensional simple en la dirección de las x. Entonces f es integrable sobre D y*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

¿Y qué ocurre si la función de partida f no es continua pero es acotada y cumple la condición suficiente del teorema 2.11? Entonces las fórmulas anteriores también valen, pero resulta imprescindible ampliar previamente el concepto de integral sobre un intervalo para admitir funciones que no estén definidas sobre todo el intervalo, de modo que la integral reiterada del teorema 2.21 tenga sentido aunque la integral en la variable y no exista para algunos valores (quizá infinitos, pero formando en total un conjunto "nulo", como en [2], teorema 7.4.28; ver también [1], al final del capítulo 14) de la variable x. No vale la pena estudiarlo más en detalle, en estos caso es mejor utilizar la integral de Lebesgue o la de Kurzweil-Henstock.

50. Una consecuencia obvia de los anteriores teoremas es que si el recinto de integración es una región simple en ambas direcciones, entonces se puede cambiar el orden de integración de una función continua.

Puede ocurrir que en un cierto orden la integral sea muy difícil, o incluso imposible de resolver en términos de funciones elementales, mientras que en el otro sea asequible o, al menos, factible.

Ejemplo 2.23 La función e^{-x^2} no tiene primitiva elemental ([78]), por lo que la integral reiterada $\int_0^{2\sqrt{\log 2}} dy \int_{y/2}^{\sqrt{\log 2}} e^{-x^2}\, dx$ no puede calcularse tal como está planteada (usando sólo funciones elementales).

Sin embargo, al cambiar el orden de integración es posible resolverla por métodos elementales:

El recinto de integración es una región simple en las x descrita mediante (notaciones como en la definición

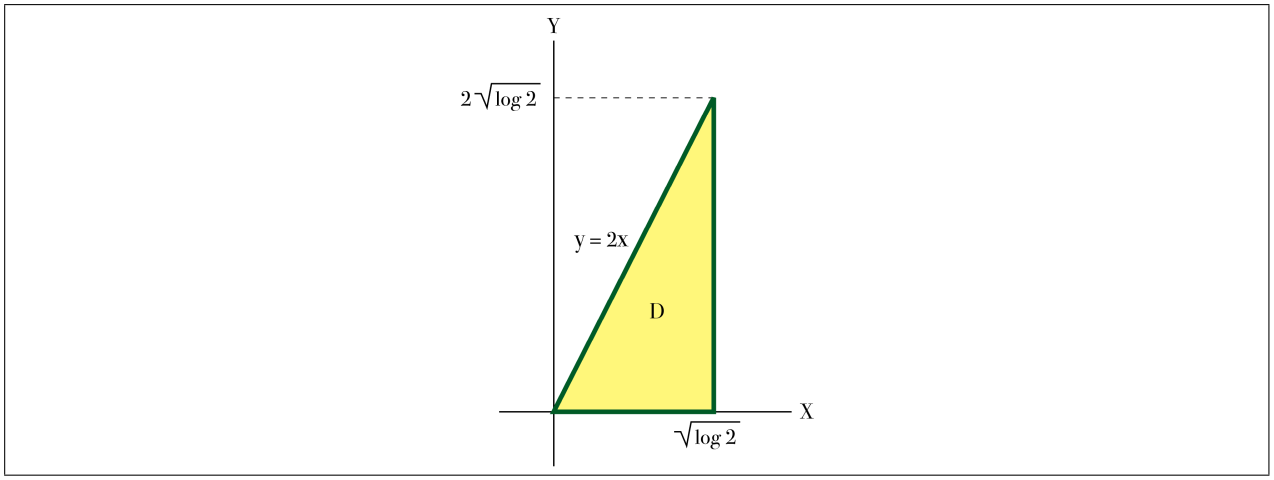


Figura 2.25: Dominio del enunciado

2.19) $c = 0 \le y \le 2\sqrt{\log 2} = d$, $\psi_1(y) = y/2 \le x \le \sqrt{\log 2} = \psi_2(y)$. El dominio de integración es por tanto el triángulo rectángulo limitado por las rectas $y = 0$, $x = \sqrt{\log 2}$, $y = 2x$, que también puede ponerse como región simple en las y a través de las desigualdades (nuevamente, notaciones de la definición 2.19) $a = 0 \le x \le \sqrt{\log 2} = b$, $\varphi_1(x) = 0 \le y \le 2x = \varphi_2(x)$. Por tanto la integral pedida es igual a

$$\int_0^{\sqrt{\log 2}} dx \int_0^{2x} e^{-x^2} dy = \int_0^{\sqrt{\log 2}} e^{-x^2} \Big[y \Big]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^{\sqrt{\log 2}} 2xe^{-x^2}\, dx = \Big[-e^{-x^2} \Big]_0^{\sqrt{\log 2}} = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

51. Importa señalar que el hecho de que una integral no pueda resolverse utilizando solamente funciones elementales no quiere decir que no pueda resolverse. Algunas funciones no elementales son de uso frecuente y sus propiedades y sus valores son tan conocidos como los de las funciones elementales. Así, por ejemplo, Sage resuelve la integral reiterada en el orden planteado en el enunciado, usando la función (no elemental) definida por $\int_0^x e^{-t^2} dt$.

El ejemplo 5.4.2 de [15] muestra una integral reiterada que es bastante más sencilla hacerla en un orden que en el otro.

2.3.3. Área de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$

Cuando introdujimos las integrales de una variable dijimos que nuestra intención era definir y calcular áreas y volúmenes bajo una gráfica, o sea, de conjuntos del tipo $\Omega(f)$. Hasta ahora no hemos dado ninguna definición formal de área. En este momento estamos en condiciones de definir el concepto de área para una

★ [78] Demostrar que e^{-x^2} no tiene primitiva elemental es bastante complicado. Para empezar, requiere previamente una formulación precisa de qué entendemos aquí por *función elemental*, expresión que usamos en el anexo B, pero allí solamente lo hacemos de manera informal. Esta precisión no resulta ser ni fácil ni elemental (ver la observación 43 sobre el significado del adjetivo *elemental*). En internet se encuentran referencias varias sobre este resultado, obtenido por vez primera por Liouville en 1835.

clase de conjuntos mucho más amplia que la de los que están bajo una gráfica.

Definición 2.24 *Llamaremos* ***área de un subconjunto acotado*** $D \subset \mathbb{R}^2$ *a* $A(D) = \iint_D dA$*, cuando exista. Cuando la integral no exista, diremos que* D ***no tiene área****.*

52. De los teoremas 2.21 y 2.22 se sigue que cualquier región simple tiene área.

Comprobemos, en primer lugar, que nuestra definición de área coincide con la que hemos venido utilizando de manera informal para los conjuntos $\Omega(f)$ cuando f tiene una sola variable:

Teorema 2.25 *Si* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función positiva y continua, entonces*

$$A(\Omega(f)) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN: *No hay más que aplicar el teorema 2.21. En efecto:*

$$A(\Omega(f)) = \iint_{\Omega(f)} dA = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b \Big[y\Big]_{y=0}^{y=f(x)} dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

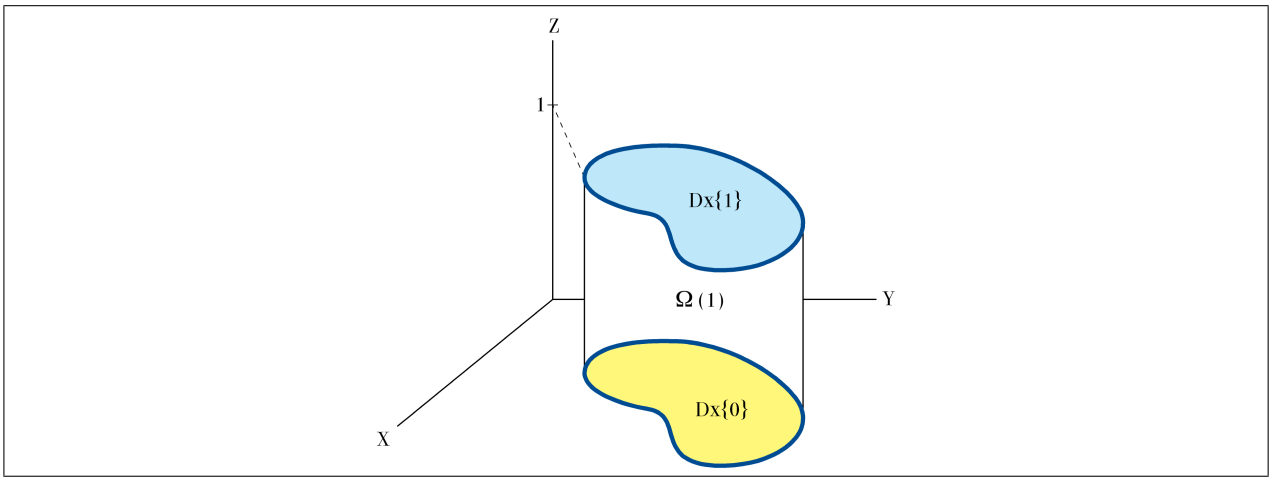


Figura 2.26: El conjunto azul es la gráfica de la función constantemente igual a 1 sobre D. El conjunto $\Omega(1)$ es el cilindro comprendido entre los conjuntos amarillo y azul

Hay otros motivos que legitiman el uso que hacemos de la palabra área en la definición 2.24, más allá del hecho de que sea compatible con el sentido que veníamos dándole a la palabra en las integrales de una variable. Si trazamos por encima de D la gráfica de la función constante 1, el conjunto tridimensional $\Omega(1)$ lo vemos como un cilindro de base D y altura igual a 1. La fórmula de la geometría elemental "volumen de $\Omega(f)$ igual a área de la base D multiplicada por la altura 1" coincide con $\iint_D dA = A(D)$.

Obsérvese también que aplicando la definición de integral a la última igualdad, probaríamos que, en el caso de regiones simples, el área que acabamos de definir está infinitamente próxima a la suma de las áreas de los infinitos rectángulos infinitesimales que aproximan a D, tanto tomados por fuera como tomados por dentro. Ver figura 2.27 y [15], ejemplo 5-10.

Ejemplo 2.26 Un subconjunto del plano que no tiene área. Tómese X como en la nota a pie de página nº 72, donde se explica por qué $\iint_X dA$ no existe. Ver la figura 2.28. ■

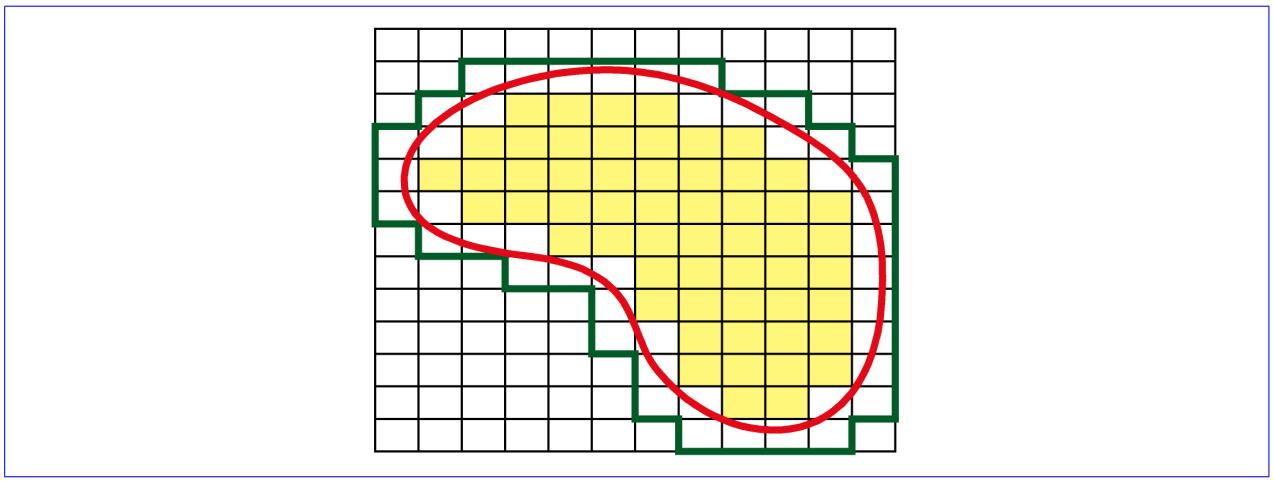


Figura 2.27: Aproximación de D (que es el conjunto encerrado por el borde rojo) mediante rectángulos contenidos en D (amarillos) y mediante rectángulos cuya unión contiene a D (los encerrados por el borde verde)

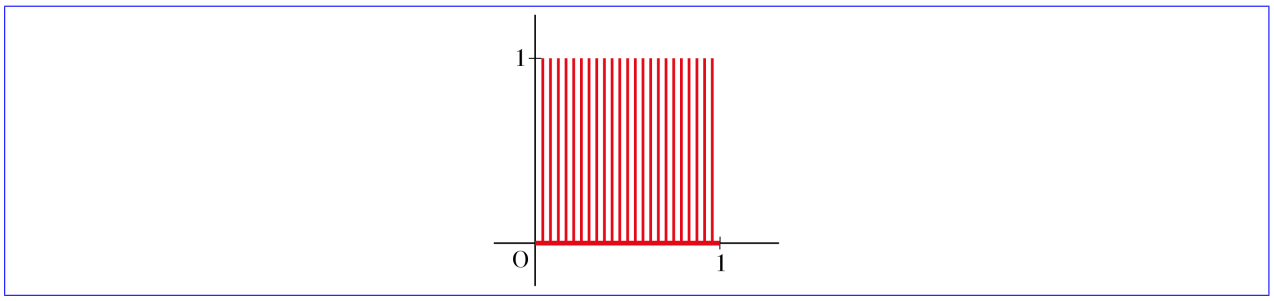


Figura 2.28: X está formado por los segmentos rojos. Los verticales corresponden a los valores irracionales de x

2.3.4. Otras propiedades

...algunas de las cuales ya las venimos usando.

Obsérvese que, tal como está enunciada la definición 2.18, resulta que para definir *la integral de una función sobre un conjunto* se sumerge el conjunto en un cierto rectángulo (de los que tenemos una infinidad para elegir) y se utiliza ese rectángulo para terminar de formular la definición. Así que se ha dejado un elemento al azar que puede dar lugar a una indeterminación del concepto: ¿qué ocurre si al elegir un rectángulo resulta que la función prolongada es integrable y al elegir otro distinto la función prolongada no es integrable?, ¿la función original es integrable o no? Esta imprecisión hay que resolverla, de acuerdo con los comentarios que hicimos a raíz de la introducción de la de suma de caminos, definición 1.9, sobre qué se entiende por una definición correcta (observación 14).

Distinto sería si la definición 2.18 dijera "para todo rectángulo R que contenga a D ocurre...", o dijera "existe al menos un rectángulo R que contiene a D y tal que...", entonces no se podría presentar esa disyuntiva, siempre sabríamos a qué atenernos, ([79]), pero tal como está escrita 2.18, nos queda la duda. La duda se despeja en este caso gracias al teorema 2.27, que demuestra que en realidad las posibilidades "existe al menos un rectángulo" y "para todo rectángulo" son equivalentes, por lo que no hay imprecisión en la definición 2.18 tal como se ha dado. ([80])

Teorema 2.27 *Los conceptos de integrable y de integral sobre un conjunto acotado están bien definidos. Es*

[79] No habría dudas respecto a lo que significa que una función sea integrable, aunque podría seguir habiéndolas respecto de cuál es el valor de la integral.

[80] Otra forma de evitar el problema habría sido decir, por ejemplo, "tomamos *el menor* rectángulo R que contenga a D...", con lo cual la definición se referiría a un rectángulo específico y no habría ambigüedad. Pero entonces necesitaríamos demostrar que ese rectángulo concreto existe en todos los casos (cosa que es cierta y no es difícil de demostrar, ver apartado (K.4)), para evitar la otra fuente de defectos en una definición a la que nos hemos referido antes, la de que se manejen objetos que no siempre existan.

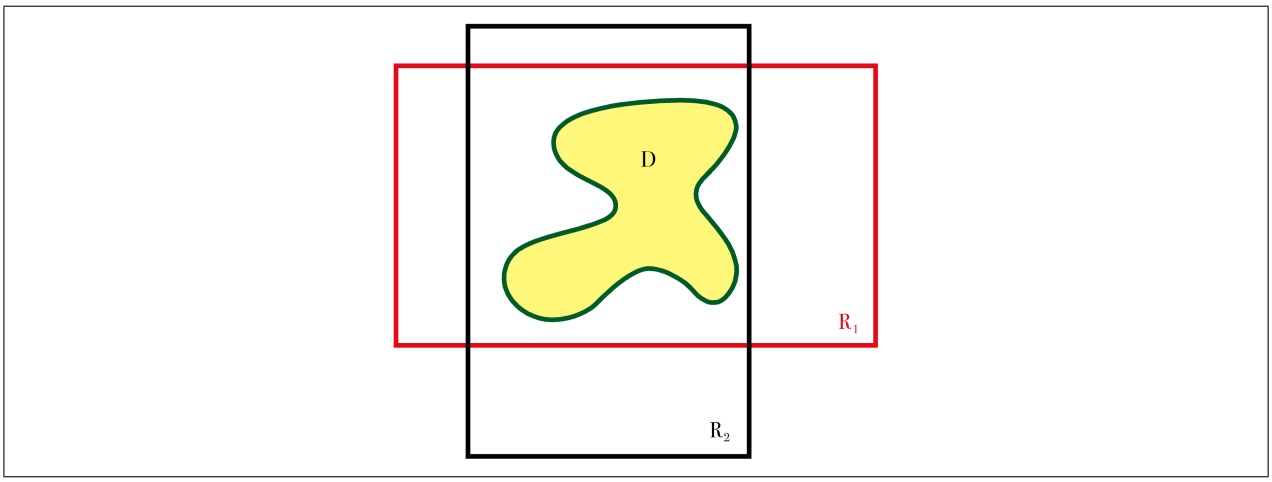


Figura 2.29: Un conjunto D contenido en dos rectángulos distintos, R_1 y R_2

decir, su definición, tal como aparece en 2.18, es independiente del rectángulo al que se prolongue la función.

JUSTIFICACIÓN: *Las diferencias entre rectángulos que encierren el dominio no aportan nada a las sumas de Riemann, puesto que todas las f^* valen 0 fuera del dominio.*

Esta idea intuitiva puede transformarse fácilmente en una demostración utilizando la propiedad aditiva de la integral sobre la unión de rectángulos (ver apartado (K.5)).

DEMOSTRACIÓN: (PARA UN CASO PARTICULAR) Para el caso de funciones de dos variables que sean continuas sobre regiones simples podemos dar una demostración completa. En efecto, modificando ligeramente las demostraciones de los teoremas 2.21 y 2.22 probaríamos que, se tome como se tome el rectángulo que contiene a la región simple, la integral se obtiene en las mismas condiciones y mediante la misma fórmula.

Teorema 2.28 *Las propiedades elementales 1 – 4 del teorema 2.12 son válidas también para integrales sobre subconjuntos acotados que no sean rectángulos.*

DEMOSTRACIÓN: *Las cuatro propiedades pueden demostrarse de la misma forma, por lo que haremos solamente la primera. Sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas e integrables sobre un conjunto acotado D. Sumergimos D en un rectángulo R y ampliamos con ceros f y g a todo R para obtener las nuevas funciones f^* y g^*. La demostración se reduce a comprobar que $(f+g)^* = f^* + g^*$. Una vez hecha esta comprobación para cada punto del rectángulo R, se aplica la propiedad a f^* y g^* para deducir que $f^* + g^*$ es integrable sobre R y que*

$$\iint_D f+g = \iint_R (f+g)^* = \iint_R f^* + g^* = \iint_R f^* + \iint_R g^* = \iint_D f + \iint_D g.$$

Ejemplo 2.29 Considérese ahora en $\mathbb{R}^2$ la corona circular D de centro el origen y radios 1 y 2, de modo que D es el conjunto descrito por las desigualdades $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. D no es una región simple a pesar de ser un conjunto definido por dos sencillas desigualdades algebraicas. Observamos, no obstante, que D puede descomponerse en cuatro regiones simples: los cortes de D con cada uno de los cuatro cuadrantes. ■

53. Calcularemos integrales sobre conjuntos como éste a base de descomponerlos en regiones simples y sumar, de acuerdo con los siguientes resultados:

Teorema 2.30 *Sea D un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ que puede descomponerse en una unión finita de*

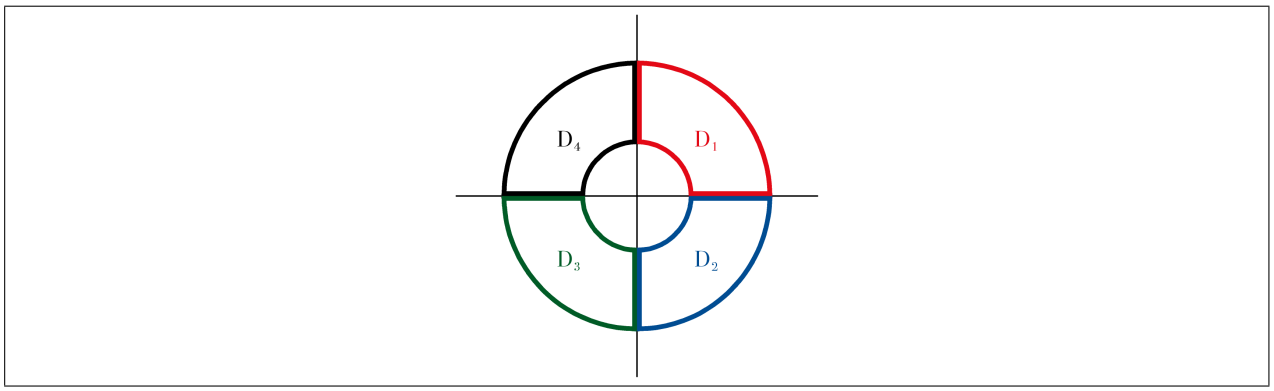


Figura 2.30: La corona D como unión de cuatro regiones simples que no se solapan

conjuntos, $D = D^1 \cup \cdots \cup D^m$ que ***no se solapan****, es decir,* $\operatorname{Int} D^i \cap \operatorname{Int} D^j = \varnothing$ *siempre que $i \neq j$* ([81]), *y cuyas fronteras son conjuntos despreciables para la integración.*

Entonces se cumple una propiedad aditiva similar a la 5 del teorema 2.12: si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada e integrable sobre cada uno de los D^i, también es integrable sobre D (y viceversa: si es integrable sobre D, también es integrable sobre cada D^i), y además

$$\iint_D f = \iint_{D^1} f + \cdots + \iint_{D^m} f.$$

DEMOSTRACIÓN: *Puede consultarse en [1], teorema 14.13. También en [2] ejercicio 7.4.14, puesto que las fronteras* $\operatorname{Fr} D^i$ *son* "conjuntos nulos". ★

Corolario 2.31 *La propiedad aditiva del teorema 2.30 se cumple siempre que los D^i sean regiones simples que no se solapan.*

Teorema 2.32 (del valor medio para integrales de una y de dos variables) *Si $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$) es una región simple n-dimensional y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe algún punto $\boldsymbol{c_0} \in D$ para el que*

$$\int_D f = \operatorname{Vol}_n(D) f(\boldsymbol{c_0}).$$

En este enunciado ***región simple 1-dimensional*** *significa intervalo cerrado y acotado; y* $\mathbf{Vol}_n(D)$ *significa la longitud o el área de D, según que n valga 1 o 2.*

JUSTIFICACIÓN: *Pensemos en la gráfica de una función positiva de una variable sobre un intervalo $[a, b]$ (una consideración análoga puede hacerse para funciones de dos variables). Y construyamos un rectángulo de base $[a, b]$ y altura variable, que va creciendo desde el eje X hacia arriba. El área del rectángulo comienza valiendo 0 y llega un momento en que vale un número mayor que $\int_a^b f(x)\,dx$, luego en algún momento vale igual que la integral. Como la función es continua, su gráfica no da saltos y la altura que corresponde al rectángulo de área igual a la integral coincide con el valor de la función en algún punto.*

DEMOSTRACIÓN: (SÓLO LA HAREMOS PARA EL CASO $n = 1$). *Lo que hay que demostrar es que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(c_0)$$

para algún $c_0 \in [a, b]$.

[81] En el caso de que los conjuntos D^i sean rectángulos, el concepto de no solapamiento coincide con el que introdujimos en la definición 2.5, de integral de Darboux. Para comprobarlo basta aplicar el teorema 2.20 para calcular el interior de un rectángulo.

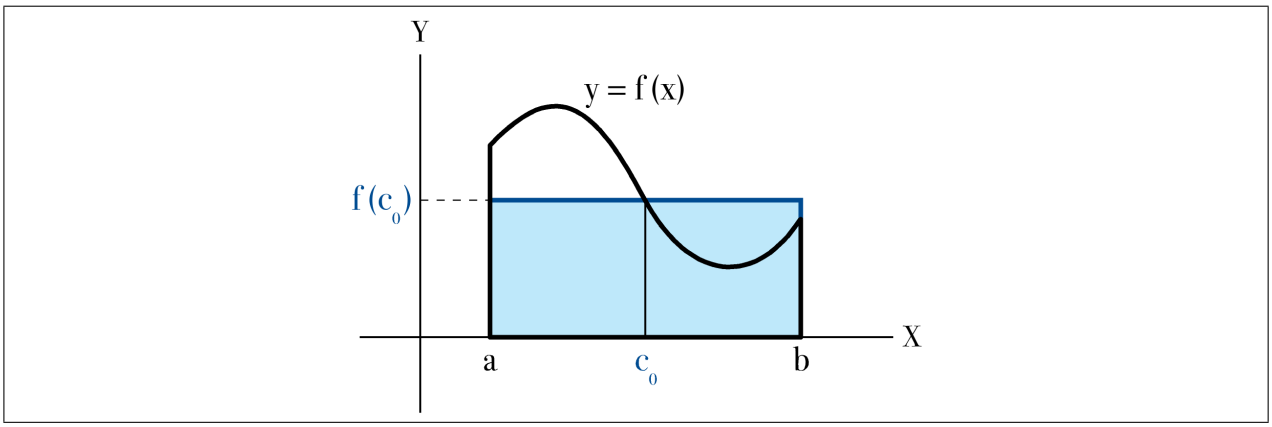


Figura 2.31: El área bajo la gráfica de $y = f(x)$ coincide con la de algún rectángulo de base $b - a$ y altura $f(c_0)$

Obsérvese en primer lugar que, al ser continua, la función alcanza en algún punto de $[a, b]$ su valor mínimo m y en algún punto (distinto del anterior, a menos que f sea constante) de $[a, b]$ su valor máximo M, es decir,

$$m = f(p^m) \leq f(p) \leq f(p^M) = M,$$

para ciertos p^m, $p^M \in [a, b]$ y todo $p \in [a, b]$. Por las propiedades elementales de la integral, si integramos

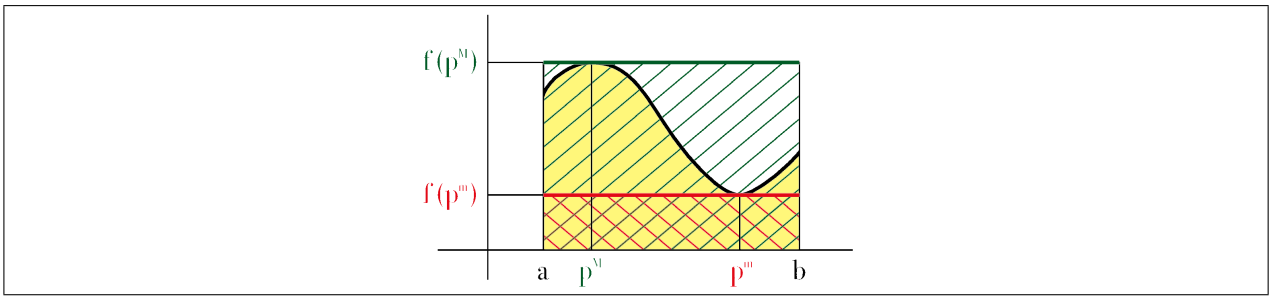


Figura 2.32: El área bajo la gráfica de f (es decir, la integral de f) está comprendida entre las áreas de los rectángulos con tramas verde y roja, respectivamente

sobre $[a, b]$ se mantienen las desigualdades, por lo que

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b - a} \leq M$$

(suponemos $b \neq a$, porque si $b = a$ entonces lo que hay que demostrar es trivial.)

Por el teorema de Bolzano, la función continua f ha de tomar todos los valores intermedios entre $f(p^m)$ y $f(p^M)$. En particular, ha de tomar el valor $\int_a^b f/(b - a)$ en algún c_0 comprendido entre p^m y p^M, lo que termina la demostración.

Cuando $n = 2$, el razonamiento del último párrafo hay que sustituirlo por otro adaptado a varias dimensiones (ver una demostración en el apartado (K.6)).

2.4 CAMBIOS DE VARIABLE

A poca experiencia que se tenga en calcular integrales de una sola variable, se sabe que una técnica muy útil consiste en hacer un *cambio de variable*, que transforma, a veces de manera significativa, la función a integrar y el dominio de integración (apartado 1.1.3). Nos proponemos estudiar cómo se transforma una integral doble mediante cambios en sus variables.

La simplificación que eventualmente se consiga sobre una integral concreta no es el único motivo por el que interesa conocer cambios de variable. En las aplicaciones de las integrales no es infrecuente que las funciones que se manejan tengan su expresión natural en sistemas de coordenadas que estén más adaptadas al problema que se trata que las coordenadas cartesianas.

Nuestros recintos de integración serán uniones de regiones simples, sin limitarnos ya más a rectángulos, puesto que al aplicar un cambio de variable será frecuente que los rectángulos no se transformen en rectángulos y que las regiones simples no se transformen en regiones simples.

2.4.1. Fórmula del cambio de variable

Un **cambio de variable(s)** será para nosotros una aplicación entre dos conjuntos n-dimensionales, $\boldsymbol{T} : \Delta \longrightarrow D = \boldsymbol{T}(\Delta)$, con $D,\ \Delta \subset \mathbb{R}^n$, donde, en este capítulo, $n = 2$.

Consideremos ahora una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Nuestro objetivo en este apartado es convertir la integral de f sobre D (en las variables x, y) en una integral sobre Δ (en las nuevas variables, que cuando no tengamos nombres específicos para ellas llamaremos u, v).

Las variables en D serán las cartesianas y el dominio de las nuevas variables será Δ, tal como se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 \supset \Delta & \xrightarrow{\boldsymbol{T}} & D = T(\Delta) \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) = \boldsymbol{T}(u,v) & \longmapsto & f(x,y) = f(\boldsymbol{T}(u,v)) \end{array}$$

Hacer un cambio de variable en la integral sustituyendo las variables x, y por las variables u, v significa dos cosas: la primera es sustituir el dominio D por el dominio Δ, y la segunda hacer una composición de f con la aplicación $\boldsymbol{T}$. De modo que la función en las nuevas variables es $f \circ \boldsymbol{T}$, que lleva el vector (u, v) al número $f(\boldsymbol{T}(u, v))$. Pero la integral de f sobre D no coincide con la integral de $f \circ \boldsymbol{T}$ sobre Δ, debido a que la transformación $\boldsymbol{T}$ deforma el plano, variando las áreas. Lo mismo ocurría en una variable, donde el cambio $x = h(t)$ obligaba a introducir en la integral un multiplicador, $h'(t)$, que viene a ser una medida de cuánto estira las longitudes la función h en las cercanías del punto t. En varias variables el determinante jacobiano de la transformación juega un papel análogo al que juega la derivada en una variable. ([82])

Veremos en primer lugar algunos casos particulares sobre los que podremos dar justificaciones y alguna demostración de las fórmulas, para luego pasar al resultado general, cuya demostración omitiremos por completo.

Focalizamos los casos particulares en cómo se transforman los rectángulos, porque con objeto de comparar las sumas de Riemann de las integrales de una función de dos variables antes y después de aplicar un cambio de variable $\boldsymbol{T}$, nos interesa conocer la relación que hay entre el área de un rectángulo R y el área de ese mismo rectángulo una vez transformado mediante $\boldsymbol{T}$.

- $\boldsymbol{T}$ es lineal y $f = 1$.

  Supóngase que $\boldsymbol{T}$ es una aplicación lineal $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y que f es la función constantemente igual a 1. Sabemos que entonces la integral de f sobre $\boldsymbol{T}(R)$, $\iint_{\boldsymbol{T}(R)} dx\,dy$, coincide con el área de $\boldsymbol{T}(R)$.

  ¿Qué relación hay entre el área de $\boldsymbol{T}(R)$ y el área de R? Observemos en primer lugar cómo es la imagen de un rectángulo mediante una aplicación lineal.

  Llamamos **paralelogramo** a un conjunto definido por $\{\boldsymbol{P} + s\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B} : 0 \leq s, t \leq 1\}$, donde $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{A}$

[82] Jacobi introdujo por primera vez los determinantes funcionales precisamente para expresar de manera resumida el coeficiente que aparecía en las fórmulas del cambio de variable en varias dimensiones.

y $\boldsymbol{B}$ son vectores y $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ son linealmente independientes. Un tipo especial de paralelogramos son los rectángulos ([83]) $R = [a, b] \times [c, d]$, basta tomar $\boldsymbol{P} = (a, c)$, $\boldsymbol{A} = (b - a, 0)$, $\boldsymbol{B} = (0, d - c)$.

Puesto que $\boldsymbol{T}$ es lineal, es inmediato comprobar ([84]) que la imagen del paralelogramo determinado por $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ es el paralelogramos determinado por $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{P})$, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ y $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})$ (siempre que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ y $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})$ sean linealmente independientes, claro, porque de lo contrario no se cumpliría nuestra definición de paralelogramo). Por consiguiente hemos demostrado que:

Teorema 2.33 *Una aplicación lineal inyectiva $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ transforma rectángulos en paralelogramos.* ([85])

Ahora podemos obtener el área de la imagen $\boldsymbol{T}(R)$ en función del área de R y de la matriz de la transformación lineal. Siempre que no digamos otra cosa, se entiende que las matrices que usemos para las aplicaciones lineales se refieren a las bases canónicas.

Teorema 2.34 *El área de $\boldsymbol{T}(R)$ es igual al área de R multiplicada por el valor absoluto del determinante de la matriz asociada a $\boldsymbol{T}$. Por tanto,*

$$\iint\limits_{\boldsymbol{T}(R)} dx\,dy = A(\boldsymbol{T}(R)) = |\det \boldsymbol{T}| A(R) = \iint\limits_{R} |\det \boldsymbol{T}|\,du\,dv.$$

JUSTIFICACIÓN: *Razonaremos sobre la figura para el caso especial de que $b = d = 1$, $a = c = 0$ y que las coordenadas de $\boldsymbol{T}(1, 0)$ y de $\boldsymbol{T}(0, 1)$ sean todas estrictamente positivas. El área de $\boldsymbol{T}(R)$*

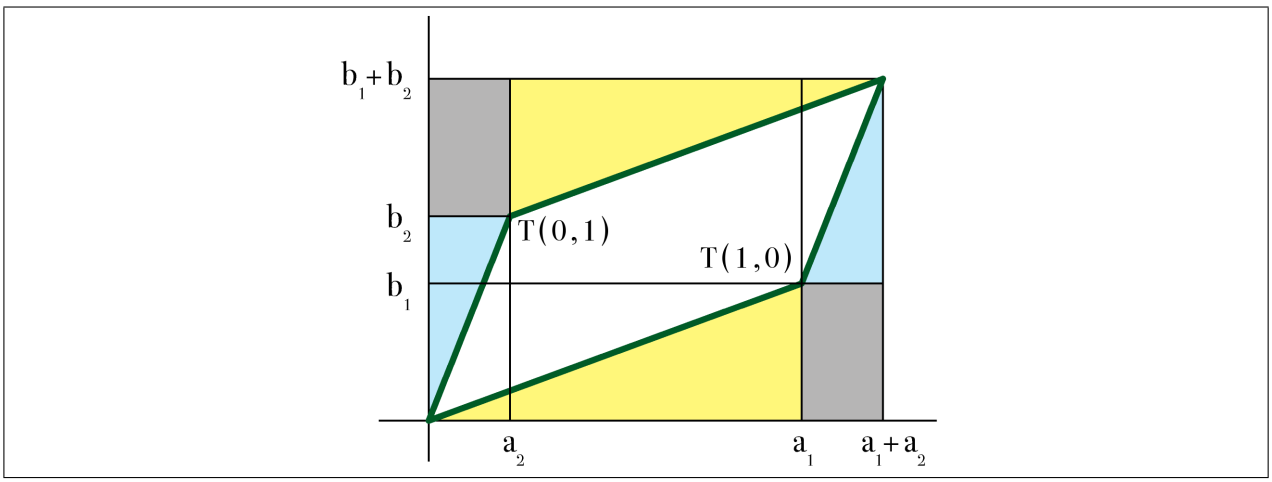


Figura 2.33: Paralelogramo imagen de $[0, 1] \times [0, 1]$. Calculamos su área restando el área del rectángulo total menos las áreas de las regiones coloreadas

es, aplicando la aditividad de las integrales (corolario 2.31), la del rectángulo total menos las de los triángulos y rectángulos que sobran (ver figura):

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) - 2\,\frac{1}{2}\,a_2 b_2 - 2\,\frac{1}{2}\,a_1 b_1 - 2a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

que coincide con $|\det \boldsymbol{T}|$, puesto que la matriz de $\boldsymbol{T}$ ([86]), es $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. En nuestro caso este número

[83] En este apartado 2.4.1 supondremos que todos nuestros rectángulos son no degenerados, es decir, que $a \neq b$ y $c \neq d$.

[84] Puesto que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{P} + s\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{P}) + s\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}) + t\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})$.

[85] La inyectividad de una aplicación lineal nos garantiza que las imágenes de dos vectores linealmente independientes también son vectores linealmente independientes.

[86] Para simplificar la notación, identificamos la aplicación $\boldsymbol{T}$ con su matriz expresada en las bases canónicas. Escribimos los vectores en columna.

es positivo, porque, como se ve en la figura, la pendiente b_2/a_2 es mayor que la pendiente b_1/a_1.

Argumentando sobre una nueva figura en la que los vectores $\boldsymbol{T}(1,0)$ y $\boldsymbol{T}(0,1)$ también estén en el primer cuadrante pero el primero en una posición más avanzada que el segundo en el sentido de las agujas del reloj (es decir, cuando $b_1/a_1 > b_2/a_2$), se demuestra que en ambos casos $A(\boldsymbol{T}(R)) = |a_1b_2 - a_2b_1|$.

Por último, incluso cuando $a_1b_2 = a_2b_1$ se obtiene también $A(\boldsymbol{T}(R)) = |a_1b_2 - a_2b_1|$.

54 . Interpretamos este resultado diciendo que, cuando el cambio de variable es lineal, las áreas de los rectángulos están sujetas a un "coeficiente de dilatación" que coincide con el valor absoluto del determinante de la aplicación.

55 . Obsérvese que en caso de que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ fueran vectores tridimensionales, para calcular el área del paralelogramo que determinan podríamos suponer sin pérdida de generalidad que el plano que los contiene es $z = 0$ y por tanto $\boldsymbol{A} = (a_1, b_1, 0)$, $\boldsymbol{B} = (a_2, b_2, 0)$. Entonces $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)$, luego el área del paralelogramo sería igual a $\|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\|$, la longitud del producto vectorial de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$. ([87])

- $\boldsymbol{T}$ es el cambio a coordenadas polares y $f = 1$.

  Nos proponemos ahora buscar un coeficiente de dilatación similar al de antes para el cambio a coordenadas polares, es decir, para
  $$(x, y) = \boldsymbol{T}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

  Ahora $\boldsymbol{T}$ ya no transforma un rectángulo en un paralelogramo, como ocurría en el caso lineal, sino en una diferencia de sectores circulares. En la figura resulta obvio, además, que el coeficiente de dilatación no es el mismo en todos los puntos, va creciendo a medida que nos alejamos del origen.

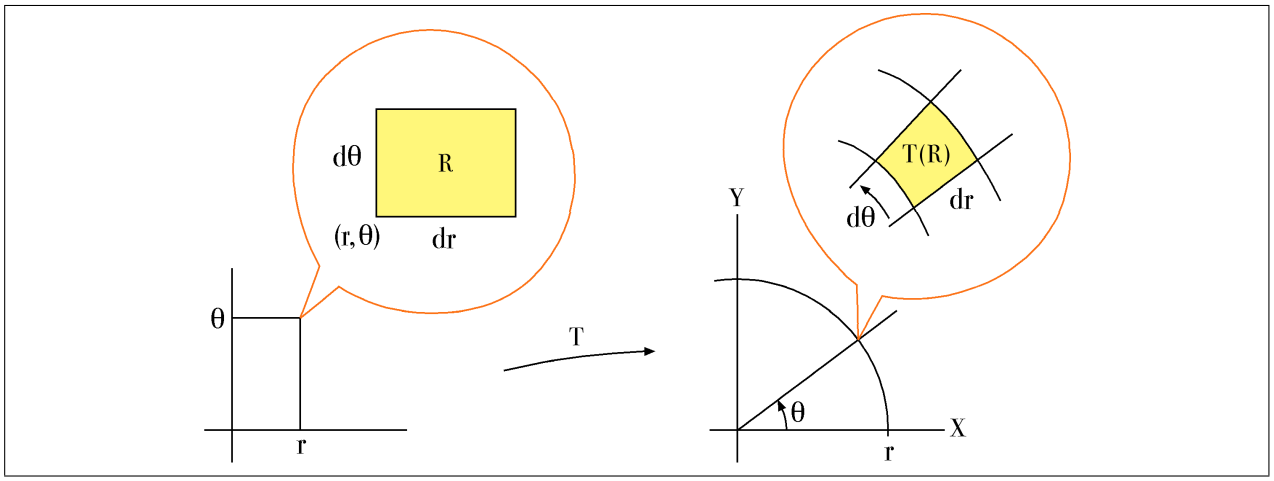


Figura 2.34: Transformación de un rectángulo de lados infinitesimales

56 . No podremos hacer un cálculo exacto apelando a la geometría elemental, pero sí un cálculo aproximado para el caso que más nos importa, que es cuando el rectángulo original sea infinitesimal.

Cuando los lados del rectángulo R son infinitesimales, de medidas $d\theta$ y dr, la imagen es infinitamente próxima a un rectángulo cuyos lados miden $r\,d\theta$ y dr, por lo que su área ha de ser muy parecida al

[87] El **producto vectorial** de dos vectores tridimensionales $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, es el vector que se obtiene desarrollando por la primera fila el determinante
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

valor del producto $r\,dr\,d\theta$, que coincide con $rA(R)$.

Por tanto, una descomposición de $\boldsymbol{T}(R)$ en las imágenes de una partición infinitesimal de R da lugar a una aproximación del área de $\boldsymbol{T}(R)$, $\sum r_i A(R_{ij})$, que resulta ser una suma de Riemann de la función $R \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(r,\theta) \rightsquigarrow r$, por lo que es a su vez infinitamente próxima, por definición de integral doble, a $\iint_R r\,dr\,d\theta$.

Puede demostrarse con un razonamiento de este tipo que el área de $\boldsymbol{T}(R)$ es

$$\iint\limits_{\boldsymbol{T}(R)} dx\,dy = \iint\limits_{R} r\,dr\,d\theta.$$

57 . En otras palabras, r es el coeficiente de dilatación de áreas asociado a la transformación $\boldsymbol{T}$.

Se trata de un coeficiente variable, no como en el caso lineal, en el que el coeficiente a aplicar era el mismo en todos los puntos del plano.

58 . ¿Qué tiene que ver el coeficiente r con las derivadas de la transformación $\boldsymbol{T}$? La explicación, como se verá en el caso más general que exponemos a continuación, es que r es el determinante jacobiano ([88]) de $\boldsymbol{T}$.

- $\boldsymbol{T}$ diferenciable.

Generalizando los casos anteriores, intentaremos ahora justificar cuál pueda ser el coeficiente de dilatación de áreas cuando $\boldsymbol{T}$ sea una función diferenciable.

59 . Recordemos que una función es diferenciable cuando, alrededor de ese punto, a escala infinitesimal no se distingue de una aplicación lineal.

La aplicación lineal que aproxima a $\boldsymbol{T}$ en los alrededores del punto (u,v) es la diferencial de $\boldsymbol{T}$ en (u,v), denotada por $\boldsymbol{T}'(u,v)$ o por $D\boldsymbol{T}(u,v)$, cuya matriz asociada es la matriz jacobiana de $\boldsymbol{T}$, $J\boldsymbol{T}(u,v)$, formada por las derivadas parciales de $\boldsymbol{T}$ en el punto (u,v).

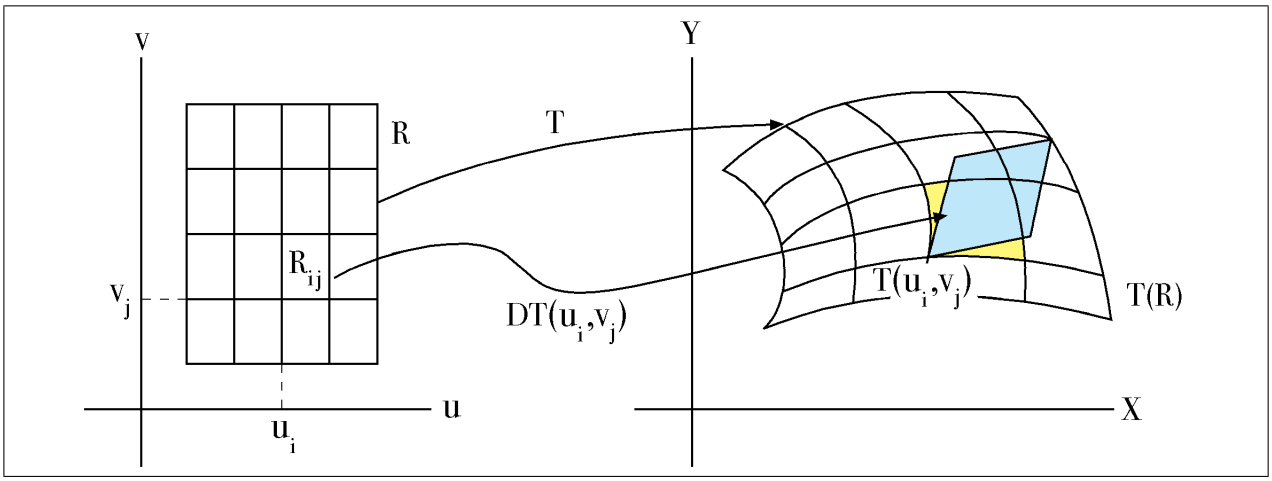


Figura 2.35: El área de $\boldsymbol{T}(R_{ij})$ (en amarillo) es aproximadamente igual al área de $D\boldsymbol{T}(u,v)(R_{ij})$ (en azul)

[88] Es decir, el determinante de la matriz 2×2 formada por las cuatro derivadas parciales de las funciones componentes del cambio $\boldsymbol{T}$ a coordenadas polares:

$$J\boldsymbol{T}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}; \qquad \det J\boldsymbol{T}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Aunque no lo dijimos expresamente, al utilizar los números r, dr y $d\theta$ para medir una figura, estamos suponiendo que son positivos, por lo que en este caso r coincide con el valor absoluto del jacobiano.

Razonando como en el caso de coordenadas polares, el área de $\boldsymbol{T}(R_{ij})$ es aproximadamente igual a la de $D\boldsymbol{T}(u_i, v_j)(R_{ij})$, que vale (de acuerdo con lo que vimos cuando la transformación era lineal) $|\det J\boldsymbol{T}(u_i, v_j)|A(R_{ij})$. Por tanto, $\sum f(x_i, y_j)A(\boldsymbol{T}(R_{ij}))$ es aproximadamente igual a

$$\sum (f \circ \boldsymbol{T})(u_i, v_j)|\det J\boldsymbol{T}(u_i, v_j)|A(R_{ij})\,.$$

Si f es continua y $\boldsymbol{T}$ es de clase $\mathscr{C}^1$, la función $(f \circ \boldsymbol{T})|\det J\boldsymbol{T}|$ es continua, luego integrable sobre el rectángulo R, y por tanto la última suma está infinitamente próxima a la integral $\iint_R (f \circ \boldsymbol{T})|\det J\boldsymbol{T}|$. Se demuestra que, bajo ciertas hipótesis sobre los datos, la primera suma es, a su vez, infinitamente próxima a la integral $\iint_{T(R)} f(x, y)\, dx\, dy$. Por tanto,

$$\iint\limits_{T(R)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{R} (f \circ \boldsymbol{T})(u, v)|\det J\boldsymbol{T}(u, v)|\, du\, dv.$$

Los ejemplos que hemos puesto explican (pero no demuestran) la validez del siguiente resultado.

Teorema 2.35 (del cambio de variable para integrales dobles) *Sean Δ un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ cerrado y acotado, y N un subconjunto de Δ que contiene a la $\operatorname{Fr}\Delta$ y es despreciable para la integración.*

Supóngase además que $\boldsymbol{T} : \Delta \longrightarrow \boldsymbol{T}(\Delta) \subset \mathbb{R}^2$ es una aplicación de clase $\mathscr{C}^1$ tal que

1. *$\boldsymbol{T}$ es inyectiva sobre $\Delta \backslash N$,*
2. *para todo $(u, v) \in \Delta \backslash N$, $\det J\boldsymbol{T}(u, v) \neq 0$.*

Entonces, si $f : \boldsymbol{T}(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua sobre $\boldsymbol{T}(\Delta \backslash N)$, la función $f \circ \boldsymbol{T}\,|\det J\boldsymbol{T}|$ también es integrable sobre Δ y se verifica la igualdad

$$\iint\limits_{\boldsymbol{T}(\Delta)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Delta} (f \circ \boldsymbol{T})(u, v)\,|\det J\boldsymbol{T}(u, v)|\, du\, dv,$$

*que llamaremos **fórmula del cambio de variable**.*

60. El coeficiente de dilatación no es el jacobiano, sino su valor absoluto. Si olvidamos poner el valor absoluto, podemos terminar obteniendo resultados absurdos, como volúmenes negativos.

★ Puede consultarse un esquema de la demostración en [2], capítulo 7.7.

★ En caso de que la función f no sea continua sobre $\boldsymbol{T}(\Delta \backslash N)$, sino solamente integrable sobre $\boldsymbol{T}(\Delta)$, se puede demostrar un resultado análogo, pero para la integral de Lebesgue o de la de Kurzweil-Henstock en lugar de la de Riemann (ver, por ejemplo, [1], teorema 15.11).

Corolario 2.36 *Las hipótesis del primer párrafo del teorema del cambio de variable se cumplen siempre que Δ sea una unión finita de regiones simples y que N sea la unión de los bordes de esas regiones.*

DEMOSTRACIÓN: *Es inmediato a partir del teorema 2.20, que implica que la frontera (o borde) de una región simple esté formada por la unión de un número finito de gráficas de funciones continuas. Y de que si $X = \cup_i^n X_i$, entonces $\operatorname{Fr} X \subset \cup_1^n \operatorname{Fr} X_i$* ([89]).

La exigencia de que la transformación sea inyectiva (salvo en un conjunto despreciable para la integración) es lógica, porque si el cambio de variable tuviera, por ejemplo, tres valores de las nuevas variables para cada punto (x, y), al calcular la integral en (u, v) pasaríamos tres veces por cada punto, con lo que lo esperable sería que obtuviéramos la integral original multiplicada por 3.

[89] Demostración del último contenido: para cada punto $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Fr} X$ tomamos una sucesión de puntos de X que converjan a $\boldsymbol{p}$. Como sólo hay un número finito de X_i, para algún i_0 hay infinitos términos de la sucesión que están en Xi_0, con lo que ya tenemos una sucesión de puntos en Xi_0 que converge a $\boldsymbol{p}$. Por otra parte, sabemos que existe alguna sucesión de puntos de X^c que también converge a $\boldsymbol{p}$; como los puntos de esta sucesión son todos de $X_{i_0}^c$, queda probado que $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Fr} X_{i_0}$.

El contenido recíproco no siempre es cierto.

Si aplicáramos esta fórmula del teorema del cambio de variable para integrales dobles al caso unidimensional ([90]), obtendríamos

$$\int_{h([a,b])} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(h(t))|h'(t)|\,dt.$$

¿A qué se debe esta diferencia al pasar a varias variables, por qué hemos introducido el valor absoluto?

2.4.2. Coordenadas polares

Para el cambio a coordenadas polares se utilizan las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. El significado es el de la figura. La variable r suele llamarse radio vector, y la variable θ, ángulo polar ([91]). Las curvas $r = k$,

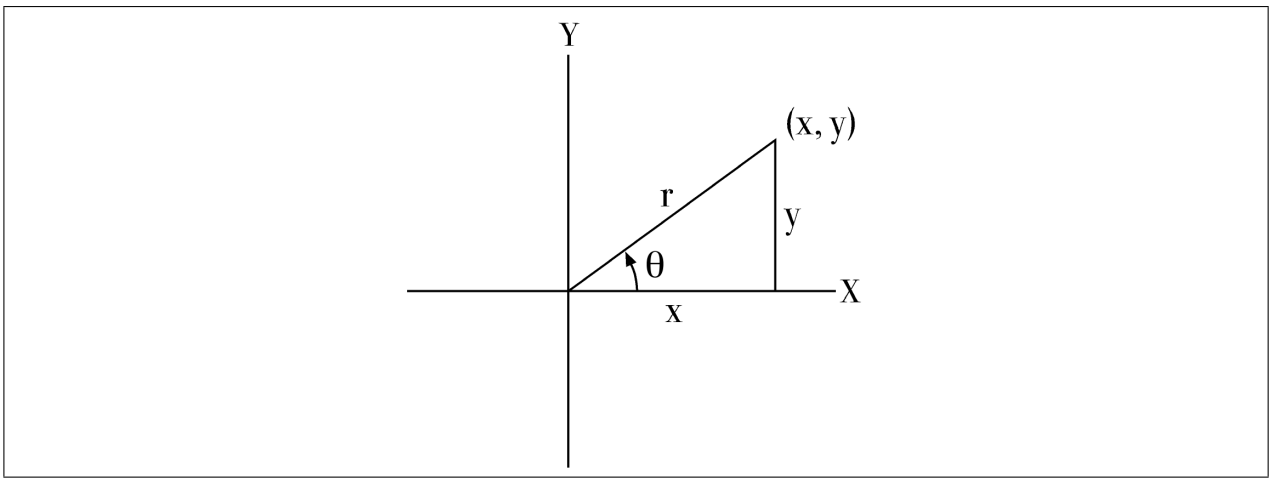


Figura 2.36: Coordenadas polares

donde k es una constante, son circunferencias centradas en el origen, mientras que las $\theta = k$ son semirrectas que parten del origen. Estos dos haces de curvas se cortan en todos los puntos del plano, por lo que sirven para describirlos todos.

El cambio de coordenadas puede definirse sobre todo $\mathbb{R}^2$, pero como las funciones circulares son periódicas de periodo 2π, para describir cualquier punto (x, y) es suficiente con limitar la variable θ a un rango de amplitud 2π (apartado (B.3)), e incluso a un rango de amplitud π si se admitiera que r pudiera tomar valores estrictamente negativos.

Ejemplo 2.37 (Ejemplo 6.3.4 de [15].) Pasando a coordenadas polares, evaluar $\iint_D \log(x^2 + y^2)\,dx\,dy$, donde D es la región contenida en el primer cuadrante y comprendida entre los arcos de las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$ (donde $0 < a < b$).

Nuestra primera labor va a ser identificar el conjunto Δ del plano (r, θ) que se corresponde con D en el paso a polares.

Las desigualdades que según el enunciado caracterizan a los puntos de D son

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2,$$

que en coordenadas polares se transforman en

$$r\cos\theta \geq 0, \quad r\sin\theta \geq 0, \quad a^2 \leq r^2 \leq b^2.$$

Por otra parte, el valor absoluto del determinante jacobiano es igual a $|r|$ ([88]). Puesto que tenemos varias

[90] Para ello tenemos que convertir las integrales de una variable en integrales dobles, cosa que podemos hacer de la siguiente manera. Suponiendo que $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sea de clase $\mathscr{C}^1$, inyectiva y con derivada no nula en ningún punto (salvo, quizá, en los extremos del intervalo), construimos $\Delta = [a, b] \times [0, 1]$ y $\boldsymbol{T}(u, v) = (h(u), v)$, con lo que $\det J\boldsymbol{T}(u, v) = h'(u)$ y $\boldsymbol{T}(\Delta)$ resulta ser un rectángulo de altura 1 y de base la imagen de $[a, b]$ mediante h. Y construimos una nueva función $\overline{f} : \boldsymbol{T}(\Delta) \longrightarrow \mathbb{R}$, mediante $\overline{f}(x, y) = f(x)$.

[91] Ver en la nota a pie de página nº 93 una definición formal de estos términos.

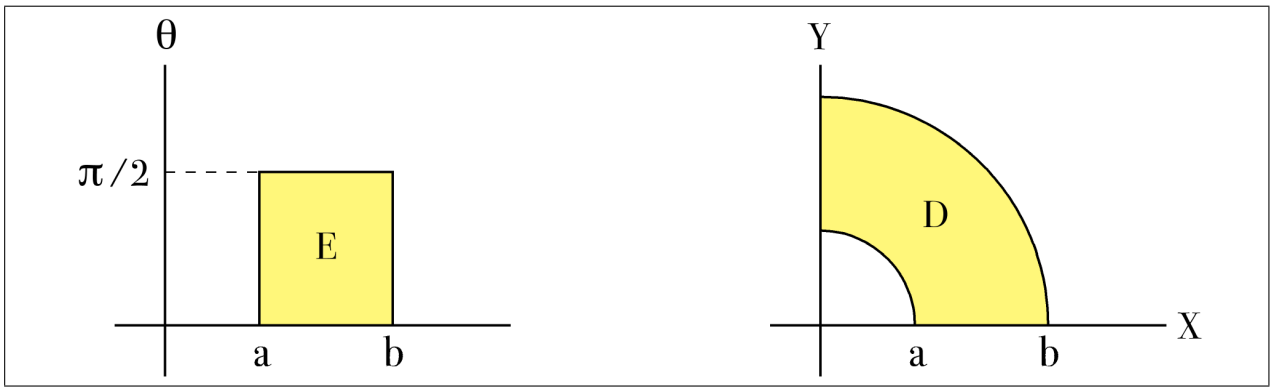


Figura 2.37: Los conjuntos D y $E = \Delta$ del ejemplo

posibilidades en la elección de r y θ, decidimos en primer lugar que $r \geq 0$, y así no tendremos que introducir valores absolutos en la integral a calcular.

Hecha esta elección, las desigualdades equivalen a

$$\cos\theta \geq 0, \quad \sin\theta \geq 0, \quad a \leq r \leq b.$$

Gracias a la periodicidad de las funciones seno y coseno el ángulo polar podemos restringirlo a un intervalo de amplitud 2π, así que elegimos $[0, 2\pi]$ (como podríamos elegir cualquier otro, aquí hay total discrecionalidad), y entonces las desigualdades equivalen a

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad a \leq r \leq b.$$

Resumiendo, el cambio de variable $\boldsymbol{T} : \Delta = [a, b] \times [0, \pi/2] \longrightarrow D$ en este caso no sólo es una aplicación suprayectiva sino biyectiva (utilizar las propiedades del apartado (B.3)). Podemos aplicar el teorema del cambio de variable ([92]) y la integral se transforma de la siguiente manera:

$$\iint\limits_{D=\boldsymbol{T}(\Delta)} \log(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Delta} r \log r^2\, dr\, d\theta = \int_a^b \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r \log r\, d\theta\, dr = \pi \int_a^b r \log r\, dr.$$

La última integral se resuelve por partes o recurriendo a la tabla de antiderivadas (anexo M); y el resultado final es $\frac{\pi}{2}\left[b^2 \log b - a^2 \log a - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\right]$. ■

Las ideas que han aparecido en el ejemplo pueden sernos útiles para otros muchos casos. En general, querremos tener una transformación que verifique las hipótesis del teorema del cambio de variable 2.35, por lo que hemos de limitar el dominio de las nuevas variables, para lo que hay varias opciones posibles. *Nosotros usaremos siempre $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, salvo indicación en contrario* ([93]). Un **cambio a coordenadas polares** será a partir de ahora una aplicación definida sobre una unión finita de regiones simples, $\Delta \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$, por $(r, \theta) \rightsquigarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

[92] Se cumplen todas las hipótesis con $N = \varnothing$.

[93] Por tanto, a partir de ahora, siempre que no digamos expresamente lo contrario, el **radio vector** de un punto de $\mathbb{R}^2$ se obtendrá mediante la aplicación

$$r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty), \qquad (x, y) \rightsquigarrow r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

donde la raíz cuadrada es no negativa, ver el apartado (B.1) para $n = 2$. Y el **ángulo polar** que usaremos vendrá definido por

$$\theta : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \rightsquigarrow \theta(x, y) = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } y \geq 0 \\ \pi + \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

donde arccos es la función arcocoseno introducida en el apartado (B.3). Obsérvese que nuestra función ángulo polar es discontinua en todos los puntos de la forma $(x, 0)$ con $x > 0$, y que nunca alcanza el valor 2π.

Esta función ángulo polar θ no es universal, en otros textos se define de distinta manera. Por ejemplo, en programación es frecuente utilizar en su lugar la función `atan2` (ver [28]); la diferencia estriba en que la imagen de θ es $[0, 2\pi)$, mientras que la imagen de `atan2` es $[-\pi, \pi)$. Es en la teoría de variable compleja donde se estudia de manera más completa y sistemática la función ángulo polar.

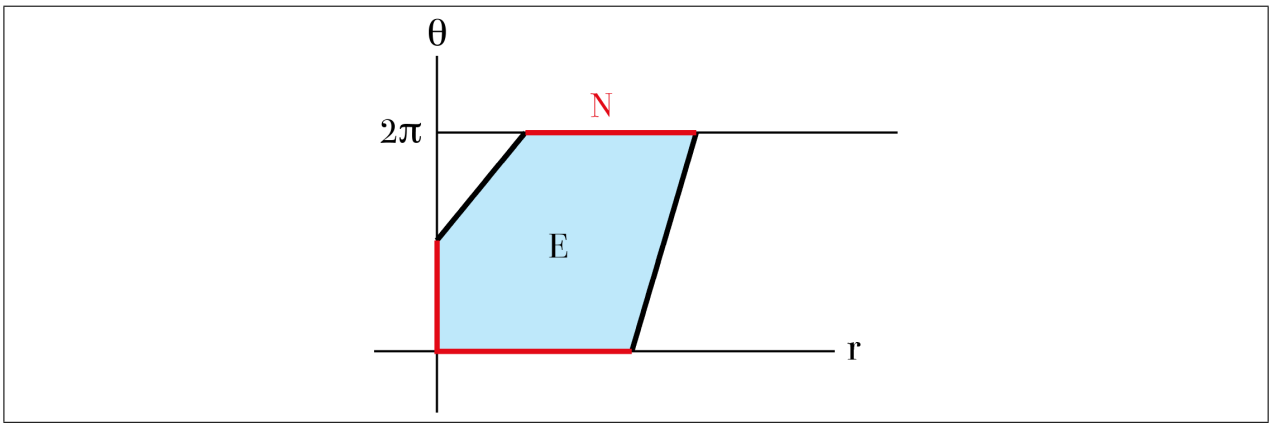


Figura 2.38: Una muestra de conjunto $\Delta = E$ al que sería aplicable el teorema 2.35 para coordenadas polares (para una f adecuada). E es el conjunto azul, incluidos los bordes de cualquier color, y N, formado por las tres líneas rojas, es la parte de la frontera de E donde el cambio de variable no es inyectivo

Como el interior de Δ no corta a la frontera de $[0, +\infty) \times [0, 2\pi]$, se comprueba que entonces se cumplen las hipótesis del teorema 2.35, ver apartado (K.7). La fórmula que relaciona la integral en coordenadas cartesianas con la integral en coordenadas polares es

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\ dr\, d\theta.$$

Finalizamos el apartado sobre cambios de variable con un comentario sobre el sentido que tiene modificar las coordenadas. Las coordenadas cartesianas pueden visualizarse como una rejilla formada por rectas verticales y rectas horizontales que llenan todo el plano. Cada par de rectas, una horizontal y otra vertical, determinan un punto. Y a cada punto de $\mathbb{R}^2$ le corresponde uno y sólo un par de esas rectas.

61. Al efectuar un cambio de coordenadas lo que estamos haciendo, en cierto modo, es sustituir los haces de rectas paralelas que forman la rejilla cartesiana por haces de curvas para los que también se cumple que cada intersección de curvas, una de cada haz, se corresponde biunívocamente con un punto (al menos dentro de una determinada región del plano que nos interese estudiar).

En los problemas y en las aplicaciones de las integrales, las fórmulas que definan su borde (en otras palabras, la forma geométrica que tenga un recinto de integración) suelen sugerir que introduzcamos un cambio de variable en el cual esas fórmulas se simplifiquen.

En el caso de las polares, los dos haces son: uno, constituido por circunferencias de centro el origen y radio cualquier número positivo; y otro, formado por todas las semirrectas posibles que parten del origen. Las intersecciones de una circunferencia de radio estrictamente positivo con una de las semirrectas describen todo $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Recíprocamente, cada punto de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ determina una única circunferencia y una única semirrecta.

2.5 Teorema de Green-Riemann

Llamamos "teoremas clásicos del cálculo vectorial" a tres resultados conocidos desde el siglo XIX que tienen en común que proporcionan fórmulas que relacionan entre sí a dos integrales de diferente tipo y dimensión. Todos ellos pueden considerarse una especie de regla de Barrow para dimensiones superiores a 1.

Los nombres que se dan a estos resultados varían según los textos e incluso según tradiciones nacionales. Nosotros los denominaremos teoremas de Green-Riemann, de Stokes y de la Divergencia.

No es posible insistir demasiado en la trascendencia de los teoremas clásicos. Al relacionar integrales de dos tipos distintos, constituyen un poderoso elemento de demostración y suministran herramientas en multitud de aplicaciones.

62. Dentro del análisis matemático, todos los teoremas que tienen como tesis una igualdad entre dos procesos distintos de paso al límite (y las integrales son unos de esos procesos), figuran entre los más importantes y útiles, y conviene recordarlos porque surgen aplicaciones suyas por doquier.

La fórmula de Green-Riemann (o de Green en el plano, o simplemente de Green) para un campo vectorial de dos variables, compara una integral doble sobre un recinto plano y una integral de línea sobre la frontera del mismo recinto. Puede verse como una regla de Barrow pero de una dimensión más: la integral doble (sencilla en la regla de Barrow) de unas derivadas sobre un recinto bidimensional (unidimensional en la regla de Barrow) se transforma en una integral de las funciones sin derivar sobre la frontera del recinto, que resulta ser una o varias curvas (un par de puntos en la regla de Barrow).

Uno de los asuntos más delicados es la orientación de las curvas implicadas en la fórmula de Green-Riemann. Para considerar integrales de línea sobre esas curvas se precisa que la frontera esté dotada de una determinada orientación, que con frecuencia se define recurriendo a conceptos como derecha e izquierda o como el sentido de las agujas del reloj, conceptos que, si bien son muy intuitivos y ayudan sobremanera a reconocer la orientación en las aplicaciones, no caben en nuestro modelo matemático ([94]).

63. Por coherencia con el nivel de abstracción que manejamos en el resto del curso, nosotros optaremos por actuar exactamente al revés: en la formulación más general no definiremos una orientación como positiva y después enunciaremos la fórmula usando esa orientación, sino que utilizaremos la fórmula para definir la orientación que llamaremos positiva.

No obstante, a la hora de demostrar la fórmula para algunos casos especialmente simples lo haremos de manera constructiva, con lo que, para esos casos particulares, concretaremos previamente la orientación que manejemos.

No haremos la demostración del caso más general posible, pero sí justificaremos la fórmula bajo hipótesis bastante amplias como para incluir los conjuntos que son más habituales en las aplicaciones.

Las funciones que integraremos serán, en general, continuas sobre regiones simples o uniones de regiones simples, con lo que la existencia de las integrales estará garantizada. La tesis del teorema es también válida para funciones más generales, no continuas, pero esta ampliación no acarrea más dificultades que las propias de la integrabilidad. Lo sorprendente de los teoremas clásicos, y de éste en particular, es que las mayores dificultades para demostrar la validez de la fórmula se derivan de la complejidad geométrica del recinto de integración (curvas y conjuntos bidimensionales, en el caso que nos ocupa), más que de las propiedades de las funciones a integrar.

[94] Como dice L. Schwartz ([19], página 29), si pretendiéramos explicar nuestros conceptos de izquierda y derecha a unos seres inteligentes residentes en un lugar del universo desconocido para nosotros, no seríamos capaces de hacerlo.

2.5.1. Fórmula de Green-Riemann para rectángulos

Primero probaremos la validez de la fórmula para los recintos más sencillos y después analizaremos su extensión a otros recintos más complicados.

Consideramos en este apartado campos vectoriales definidos sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. El borde de R, ∂R, es una curva cerrada simple formada por la unión de sus cuatro lados. Dotamos a ∂R de la

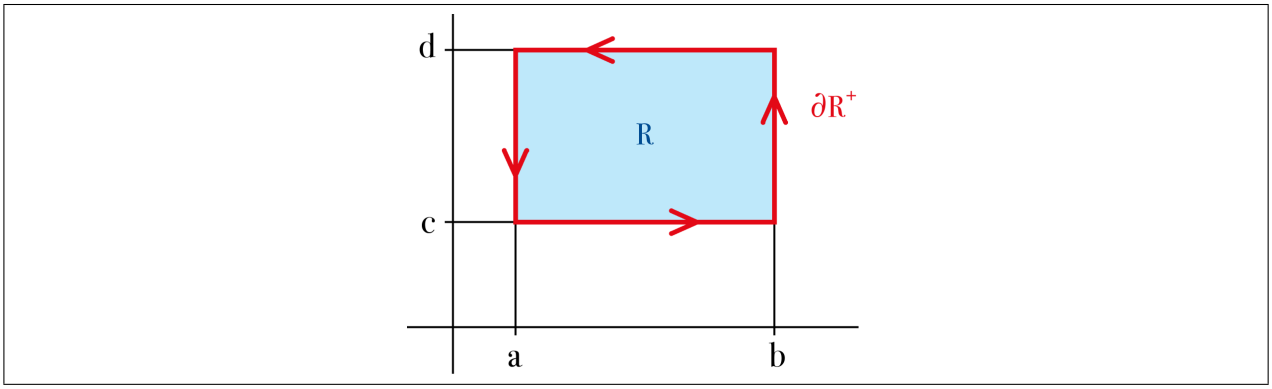


Figura 2.39: Orientación *antihoraria* del borde de un rectángulo

orientación definida por la parametrización que es suma de los cuatro caminos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c_1} &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \rightsquigarrow (t, c)\\
\boldsymbol{c_2} &: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \rightsquigarrow (b, t)\\
\boldsymbol{c_3} &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \rightsquigarrow (a + b - t, d)\\
\boldsymbol{c_4} &: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \rightsquigarrow (a, c + d - t)
\end{aligned}$$

Diremos entonces que ∂R^+ está dotado con la **orientación antihoraria o positiva**.

Teorema 2.38 (de Green-Riemann para rectángulos) *Sea $\boldsymbol{F} : R = [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$ que tiene por componentes a las funciones reales P y Q, $\boldsymbol{F} = (P, Q)$. Entonces se cumple la **fórmula de Green-Riemann**:*

$$\int_{\partial R^+} P\ dx + Q\ dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy\ .$$

64. Observar que distinguimos entre "fórmula" de Green-Riemann, y "teorema" de Green-Riemann, que es un enunciado cuya tesis es la fórmula.

Cuando digamos que sobre un cierto dominio "se cumple la fórmula de Green-Riemann" querremos decir que se cumple para todo campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$ definido sobre el dominio (tener en cuenta la observación 21).

DEMOSTRACIÓN: *La demostración no requiere ninguna idea feliz. Nos limitaremos a calcular con un poco de cuidado la integral de línea utilizando la parametrización que conocemos de ∂R^+ y a aplicar los teoremas 2.21 y 2.22 para la integral doble.*

Empezando con la integral doble,

$$\begin{aligned}
\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\ dx\, dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\ dy\, dx =\\
&= \int_c^d \Big[Q(x, y)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \Big[P(x, y)\Big]_{y=c}^{y=d} =\\
&= \int_c^d Q(b, y)\, dy - \int_c^d Q(a, y)\, dy - \int_a^b P(x, d)\, dx + \int_a^b P(x, c)\, dx.
\end{aligned}$$

Ahora calculamos la integral del campo vectorial sobre cada uno de los cuatro caminos que parametrizan ∂R^+:

$$\int_{\boldsymbol{c_1}} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \Big(P(t,c), Q(t,c)\Big)\cdot(1,0)dt = \int_a^b P(t,c)\,dt$$

$$\int_{\boldsymbol{c_2}} P\,dx + Q\,dy = \int_c^d \Big(P(b,t), Q(b,t)\Big)\cdot(0,1)dt = \int_c^d Q(b,t)\,dt$$

$$\int_{\boldsymbol{c_3}} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \Big(P(a+b-t,d), Q(a+b-t,d)\Big)\cdot(-1,0)dt =$$

$$= -\int_a^b P(a+b-t,d)dt = -\int_a^b P(u,d)du$$

$$\int_{\boldsymbol{c_4}} P\,dx + Q\,dy = \int_c^d \Big(P(a,c+d-t), Q(a,c+d-t)\Big)\cdot(0,-1)dt =$$

$$= -\int_c^d Q(a,c+d-t)dt = -\int_c^d Q(a,v)dv$$

(donde se han introducido los cambios de variable $u = a+b-t$, $v = c+d-t$). A continuación sumamos las cuatro integrales y observamos que el resultado coincide con el obtenido más arriba para la integral doble, con lo que la fórmula queda demostrada.

2.5.2. Fórmula de Green-Riemann para regiones simples en las dos direcciones

Nuestro siguiente objetivo es investigar la validez de la fórmula de Green-Riemann sobre cualquier región que sea simple en ambas direcciones. Esta generalización complicará el enunciado y la demostración. Las complicaciones se derivarán, más que de los nuevos cálculos (que seguirán un esquema muy parecido al de la anterior demostración), de las consideraciones que habrá que hacer para adaptar al borde de la región simple algunas ideas que hemos utilizado sobre los lados del rectángulo.

En primer lugar, con los conceptos que hemos dado en este curso, en caso de que el borde ∂D de una región simple no fuera una curva cerrada simple es obvio que no podríamos ni siquiera enunciar el teorema 2.39, puesto que la integral del primer miembro de la igualdad sólo puede ser una integral de línea sobre una curva de este tipo.

65. A partir de ahora, todas nuestras **regiones bidimensionales simples** supondremos que tienen la característica adicional de que su borde (o frontera) es una curva cerrada simple.

No es trivial que, como se dice en la observación 65, la propiedad de que ∂D sea una curva cerrada simple constituya verdaderamente un rasgo *adicional* al hecho de que D sea una región simple ([95]).

En segundo lugar, incluso después de suponer que el borde de una región bidimensional simple es una curva cerrada simple, tendremos que tener cuidado con las parametrizaciones de esa curva, que no son tan

[95] En principio, podría ocurrir que de la hipótesis de que D sea una región simple en el sentido de la definición 2.19 se dedujera que ∂D es una curva cerrada simple. Para poder asegurar con certeza matemática que no es así, tendremos que encontrar al menos una región simple cuyo borde no sea una curva cerrada simple.

Considérese, por ejemplo, el segmento D que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, que es una región simple en ambas direcciones, de acuerdo con la definición 2.19. Para esta región simple resulta que $\partial D = D$, que no es una curva cerrada simple: si lo fuera, tendría una parametrización en las condiciones de la definición 1.26, $\boldsymbol{c} : [a,b] \longrightarrow D$, $t \rightsquigarrow \boldsymbol{c}(t) = (c_1(t), c_2(t))$. Entonces la función $c_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sería continua e inyectiva sobre $[a,b)$ y sobre $(a,b]$, luego estrictamente monótona sobre todo $[a,b]$ (utilizar [1], ejercicio 4.62), lo que entraría en contradicción con la suposición de que $\boldsymbol{c}(a) = \boldsymbol{c}(b)$.

Otro ejemplo más extremo se obtendría tomando como D un único punto.

sencillas como puede parecer a primera vista. Intentaremos explicarlo a continuación. Si D es una región simple en las y, por ejemplo, y conocemos una descripción suya en los términos de la definición 2.19, entonces automáticamente conocemos una trayectoria que describe a la frontera ∂D como imagen de un camino cerrado: no hay más que recorrer primero la gráfica de $y = \varphi_1(x)$ de izquierda a derecha ([96]); después el segmento vertical que corresponde a $x = b$, de abajo a arriba; a continuación la gráfica de $y = \varphi_2(x)$ de derecha a izquierda; y por último el segmento de la frontera que está sobre la recta $x = a$, de arriba a abajo ([97]).

Lo que ocurre es que las funciones φ_1 y φ_2 pueden ser solamente continuas, mientras que para parametrizar una curva cerrada simple necesitamos un camino con ciertas propiedades de diferenciabilidad, ver la definición 1.26. No hace falta recurrir a conjuntos complicados para apreciar la importancia de esta diferencia. Por ejemplo, el círculo D definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ es una región simple en las y, para las funciones

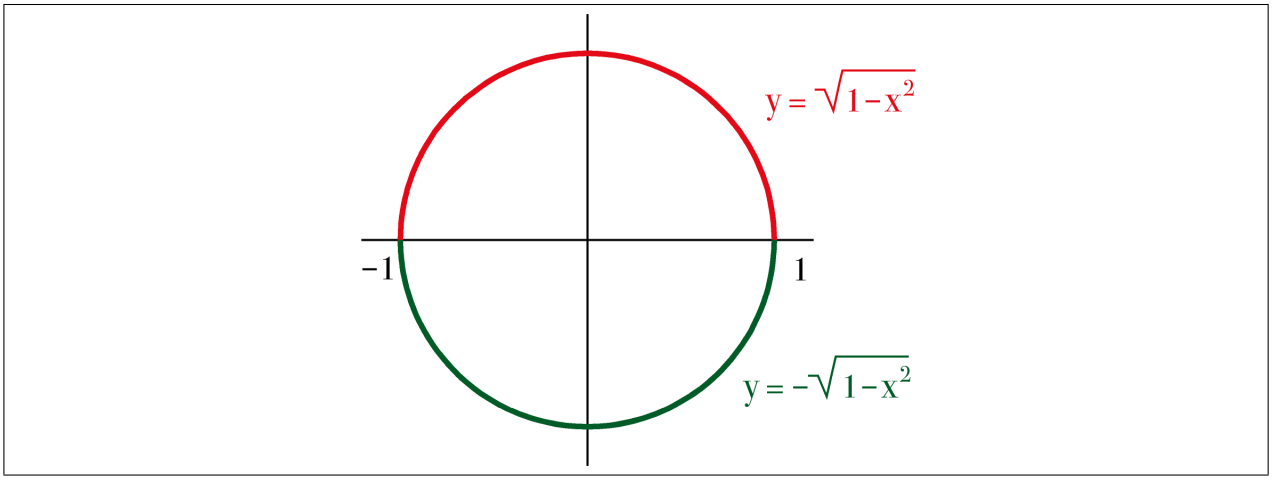


Figura 2.40: Las funciones que describen al círculo unidad $x^2 + y^2 \leq 1$ como región simple (cuyas gráficas son dos semicircunferencias) no son diferenciables en los puntos 1 y -1

continuas $\varphi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$ y $\varphi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$. Por otra parte, ∂D, que es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ completa, es una curva cerrada simple. Sin embargo, ni φ_1 ni φ_2 son de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, puesto que en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ no son derivables lateralmente, luego no nos sirven para parametrizar ∂D. Esta observación habrá que tenerla presente durante la demostración del teorema 2.39.

Con la condición adicional para las regiones bidimensionales simples que hemos añadido en la observación 65, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2.39 (de Green-Riemann para regiones simples en las dos direcciones) *Sea D una región simple tanto en las x como en las y. Para una cierta orientación del borde ∂D que se llamará* ***orientación positiva del borde, ∂D^+****, se cumple la fórmula de Green-Riemann ([98]):*

[96] No hay contradicción entre lo que se dijo antes en contra de utilizar en las definiciones o en las demostraciones las nociones de izquierda y derecha (o arriba y abajo) y el uso informal que le estamos dando aquí, puesto que éste es formalizable sin recurrir a izquierda o derecha, aunque sea un poco complicado.

En efecto, cuando decimos coloquialmente que "recorremos la gráfica de $y = \varphi_1(x)$ de izquierda a derecha" podríamos decir lo mismo de un modo totalmente preciso: "consideremos la gráfica de $y = \varphi_1(x)$ con la orientación para la que el punto inicial es $(a, \varphi_1(a))$ y el punto final es $(b, \varphi_1(b))$". Esta frase no apela a nuestra idea de izquierda y de derecha.

Lo que sí hay que tener en cuenta es una sutileza adicional: que el hecho de que la gráfica de $y = \varphi_1(x)$ sea una curva simple requiere una demostración, a menos que las funciones φ_1 y φ_2 fueran de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos. Puede hacerse una demostración, ★ para la que basta que φ_1 y φ_2 sean continuas, utilizando el concepto topológico de conjunto conexo, pero no es tan elemental como podría esperarse: ver (I.2).

[97] El camino así construido podría no ser inyectivo sobre $[a, b)$, pero en muchos casos solventaríamos esta dificultad descomponiendo D en varios subconjuntos que no se solaparan.

[98] Aquí es donde estamos haciendo lo que dijimos en la observación 63: no estamos enunciando la fórmula para una orientación de ∂D previamente establecida, sino que estamos definiendo la "orientación positiva" de ∂D como aquella para la que es válida la fórmula de Green-Riemann.

$$\int\limits_{\partial D^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_{\partial D^+} P\ dx + Q\ dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy\ ,$$

donde $\boldsymbol{F} = (P, Q) : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es cualquier campo vectorial de clase* $\mathscr{C}^1$ *sobre* D.

La demostración es asequible al nivel del curso pero excesivamente larga, por lo que la remitimos al anexo I.

2.5.3. Fórmula de Green-Riemann para regiones más generales

La fórmula de Green-Riemann no sólo es válida sobre los conjuntos simples en las dos direcciones, ni mucho menos. Al contrario, lo que resulta difícil es encontrar un conjunto plano sobre el que no sea válida. . . ; otra cosa muy distinta es que sea fácil demostrarla para conjuntos más generales, que no lo es. Vamos a dar varias ampliaciones de las hipótesis de los teoremas 2.38 y 2.39, todas ellas referidas al dominio D, manteniendo las hipótesis de derivabilidad con continuidad para el campo $\boldsymbol{F}$.

(1) Nuestra primera ampliación va a consistir en admitir que el conjunto D tenga "agujeros", con la (importante) condición adicional de que el campo vectorial esté definido y sea también de clase $\mathscr{C}^1$ dentro de los agujeros, no sólo sobre D. Lo probaremos para el caso de que el conjunto agujereado se obtenga como diferencia conjuntista de dos regiones que sean simples en ambas direcciones (el agujero, junto con su borde, también será una región simple). Para probarlo cuando haya más de un agujero aplicaríamos el mismo procedimiento repetidamente, con las modificaciones que se necesiten en el razonamiento, que pueden ser no triviales.

Concretando, tomaremos dos regiones simples en ambas direcciones, D_1 y D_2, con $D_2 \subset D_1$, y llamaremos $D = D_1 \setminus \operatorname{Int} D_2$. Para asegurarnos de que los bordes de ∂D_1 y ∂D_2 son disjuntos, impondremos la condición

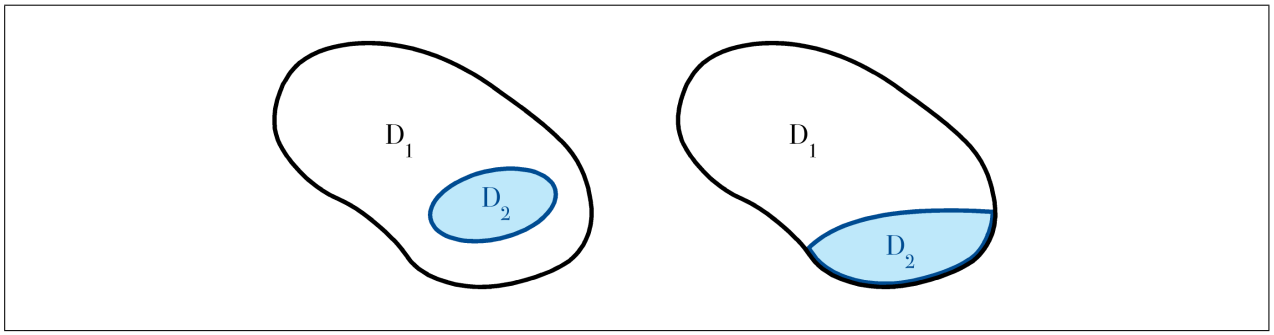


Figura 2.41: Dos ejemplos de regiones simples en ambas direcciones D_1, D_2, con $D_2 \subset D_1$. El primero de los ejemplos cumple las hipótesis del corolario 2.40 y el segundo no. Observar que en este segundo caso, $\partial D_1 \cap \partial D_2 \neq \varnothing$

de que D_2 no tiene puntos del borde de D_1, es decir, $D_2 \subset \operatorname{Int} D_1$ (ver figura 2.41). ([99])

Aplicamos el teorema 2.39 a D_1 y a D_2, restamos las dos fórmulas y hacemos uso de varias propiedades de las integrales ([100]) para obtener

$$\int\limits_{\partial D_1^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} + \int\limits_{\partial D_2^-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_{\partial D_1^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} - \int\limits_{\partial D_2^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} =$$

$$= \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy\ - \iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy\ = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy\ .$$

A partir de aquí obtendremos la fórmula de Green-Riemann si interpretamos adecuadamente para este

[99] La figura nos sirve de justificación para lo que acabamos de decir. Para una demostración, ver el teorema J.3.

[100] La última igualdad se justifica mediante el teorema 2.30, puesto que $D_1 = D \cup D_2$ y además (a) $D \cap \operatorname{Int} D_2 = \varnothing$; (b) la frontera de D_2 es una curva cerrada simple; y (c) la frontera de D está formada por una la unión de dos curvas cerradas simples (teorema J.3).

caso el borde orientado de D. Llamaremos **borde de D, ∂D,** a la unión $\partial D_1 \cup \partial D_2$, dado que esta definición es coherente con la intuición asociada a la palabra "borde" y con el concepto topológico de frontera ([101]). Por tanto, ∂D no será, hablando con propiedad, una curva cerrada simple, sino la unión disjunta de dos curvas cerradas simples.

66. Escribiremos $\boldsymbol{\partial D = \partial D_1 + \partial D_2}$, en el bien entendido de que es un abuso de notación, puesto que no corresponde a la suma de dos caminos.

La justificación para escribir la unión de curvas disjuntas como una suma es que también denotaremos la suma de las integrales (de campos escalares o de campos vectoriales) sobre cada una de las curvas como la integral sobre la unión de las curvas disjuntas.

Cada uno de los dos bordes ∂D_i tiene su propia orientación positiva, que no es otra que la que se precisa para que la fórmula de Green-Riemann sea cierta sobre el correspondiente conjunto D_i. Pues bien, llamaremos **orientación positiva del borde ∂D** a la orientación positiva de la curva exterior, ∂D_1^+, junto con la orientación negativa de la curva interior, ∂D_2^-, y pondremos $\boldsymbol{\partial D^+ = \partial D_1^+ + \partial D_2^-}$.

Haciendo uso de estas notaciones, lo que hemos demostrado (cuidado: para considerar los anteriores razonamientos como una demostración necesitaríamos incluir parte del contenido del anexo J) es el siguiente resultado:

Corolario 2.40 *La igualdad*

$$\int_{\partial D^+} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\ dy$$

es válida siempre que

- *el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ pueda ponerse como una diferencia $D = D_1 \setminus \operatorname{Int} D_2$, donde D_1 y D_2 son dos regiones simples en ambas direcciones para las que se cumple que $D_2 \subset \operatorname{Int} D_1$;*
- *además, $\boldsymbol{F} = (P, Q) \in \mathscr{C}^1(D_1)$;*

considerando como orientación positiva del borde ∂D la descrita por $\partial D^+ = \partial D_1^+ + \partial D_2^-$.

(2) La segunda ampliación que daremos de las hipótesis bajo las cuales se cumple la fórmula de Green-Riemann tiene interés teórico y además su demostración es instructiva, pero también demasiado larga para incorporarla a este curso. Consiste en "deformar" un conjunto sobre el que sabemos que se cumple la fórmula y comprobar que si la FGR era válida antes de la deformación seguirá siendo válida después.

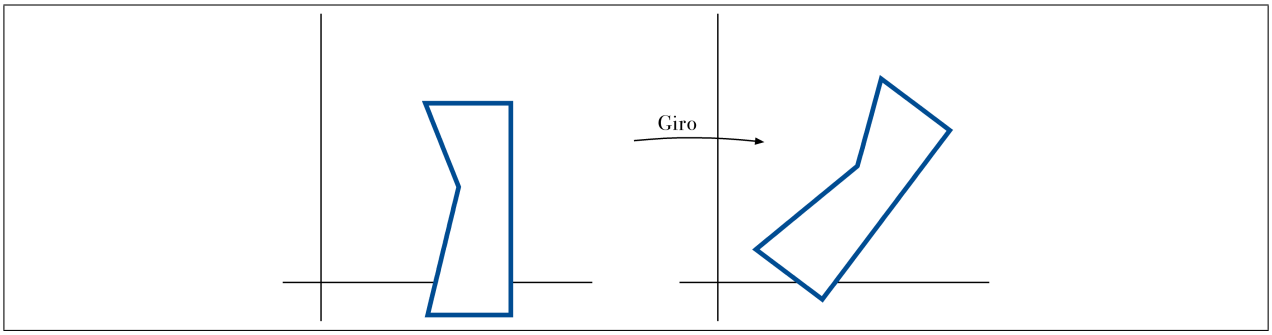


Figura 2.42: Mediante un giro pueden pasar a ser regiones simples en las dos direcciones algunos conjuntos que no lo eran

Corolario 2.41 *Sea $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación de clase $\mathscr{C}^2$ y con jacobiano estrictamente positivo en todos los puntos. Si $D^* \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto sobre el que $\boldsymbol{T}$ es inyectiva y sobre el que además se cumple la fórmula de Green-Riemann, entonces sobre $D = \boldsymbol{T}(D^*) \subset \mathbb{R}^2$ también se verifica la fórmula de Green-Riemann.*

[101] Puesto que $\operatorname{Fr} D = \partial D_1 \cup \partial D_2$, ver el teorema J.3.

Demostración: *Consultar el apartado (K.9).*

Por ejemplo, si $D \subset \mathbb{R}^2$ no es simple en las dos direcciones pero mediante un giro lo podemos convertir en un conjunto que sí lo sea, entonces sobre D es válida la fórmula de Green-Riemann, puesto que el giro inverso es una transformación de clase $\mathscr{C}^\infty$ y con jacobiano constantemente igual a 1.

(3) Hasta ahora, la validez de la fórmula de Green-Riemann la hemos estudiado comenzando con un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que cumple ciertas condiciones y después considerando su frontera. También puede hacerse al revés, comenzar con una curva cerrada simple en el plano y considerar el conjunto que encierra.

Cualquier curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$ divide al plano en tres zonas, la de los puntos que están sobre la curva, la de los que están dentro de la curva y la de los que están fuera de la curva. Igual que ocurría con las orientaciones antihorarias, el concepto de estar dentro de la curva es muy visual pero para definirlo necesitamos utilizar alguna herramienta de tipo técnico, alguna herramienta matemática. Lo más útil es el teorema de la curva de Jordan ([102]), que asegura que si C es la imagen de un camino cualquiera (o sea, que basta con que sea continuo) y que es inyectivo salvo por el hecho de que la imagen del punto inicial y del punto final del intervalo coinciden, entonces el resto del plano, $\mathbb{R}^2 \backslash C$, está formado por dos conjuntos con las siguientes propiedades: (a) ambos son no vacíos; (b) dados dos puntos cualesquiera de uno de ellos, siempre pueden unirse por un camino cuya imagen no se sale del conjunto; (c) si se toma un punto en cada uno de los dos conjuntos, la imagen de cualquier camino que los una siempre corta a C; y (d) uno de esos dos conjuntos es acotado y el otro no. El conjunto acotado es el que se denomina la parte de **dentro de la curva C**.

Si llamamos D al conjunto que está dentro de una curva cerrada simple C, puede demostrase que $C = \partial D$ (aquí lamamos ∂D a $\operatorname{Fr} D$, la frontera de D de la definición 1.16) y que la fórmula de Green-Riemann es válida para una orientación sobre C. La demostración para este caso supera ampliamente los confines del presente curso ([103]).

(4) Nuestra última generalización tampoco la vamos a demostrar, incluso su formulación la haremos de una manera más laxa que las demás ampliaciones del teorema de Green-Riemann. A pesar de que la formulación no sea totalmente precisa, será muy útil en las aplicaciones concretas.

Supóngase que $D \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto acotado cuya frontera $\operatorname{Fr} D$ una unión disjunta de curvas cerradas simples. Siempre que además D pueda descomponerse, trazando un número finito de curvas simples, en unión de conjuntos sobre los que sea válida la fórmula de Green-Riemann (ver la figura 2.43) entonces también

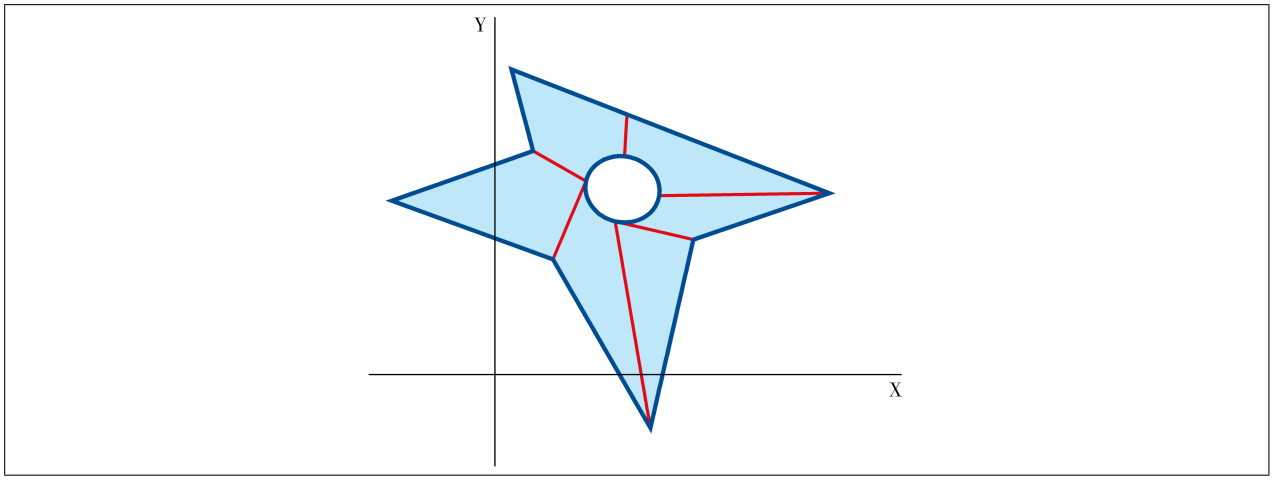


Figura 2.43: Muchos conjuntos pueden dividirse en un número finito de regiones simples en las dos direcciones

sobre D es válida la misma fórmula para una determinada orientación de ∂D que llamaremos **positiva**.

No intentaremos precisar más ni, mucho menos, desarrollar una demostración. Daremos solamente un ejemplo que pone de manifiesto la manera de proceder, para aplicar las mismas ideas cuando nos enfrentemos

★ [102] La demostración de este resultado, que no es nada elemental, pertenece a la rama de las matemáticas que se conoce con el nombre de Topología. Puede consultarse una prueba en [16].

★ [103] Ver un planteamiento de este tipo en [2], 7.5.

a otro caso concreto.

Ejemplo 2.42 Sobre una corona circular puede demostrarse la fórmula de Green-Riemann a través de una descomposición en cuatro regiones que son simples en las dos direcciones. ([104])

Tomamos el origen de coordenadas en el centro de las circunferencias que limitan a la corona D, con lo que las ecuaciones que definen a D serán del tipo $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, con $0 < a < b$, y llamamos D_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ a los cortes de D con los cuatro cuadrantes (ver la figura 2.30). Cada D_i es una región simple en los dos sentidos, luego le es aplicable el teorema 2.39 ([105]). De modo que si (P, Q) es un campo vectorial sobre D, podemos aplicar la fórmula a (P, Q) y cada uno de los D_i; y sumando todas las igualdades,

$$\sum_{i=1}^{4} \int_{\partial D_i^+} P\,dx + Q\,dy = \sum_{i=1}^{4} \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\ dy\ .$$

El miembro de la derecha es igual a la integral sobre la unión de los D_i, gracias a la aditividad de las integrales dobles, corolario 2.31. En cuanto a la suma que aparece en el miembro de la izquierda, no podemos escribirla como la integral sobre la unión de las curvas, puesto que ni los caminos que parametrizan a ∂D_i son sumables en el sentido de la definición 1.9, ni les podemos aplicar la observación 66, dado que los bordes ∂D no son disjuntos.

No terminaremos la demostración, nos conformaremos con una guía de la forma de actuar a partir de aquí, con el siguiente razonamiento que será de aplicación bastante general. En cada una de las curvas cerradas simples ∂D_i distinguimos dos tipos de tramos: los que ya pertenecían a ∂D, que los dejamos con la misma orientación, y los que hemos introducido al dividir D en los D_i. Estos últimos se recorren siempre dos veces, una en cada sentido, puesto que por su propia naturaleza son borde de dos D_i diferentes, uno a cada lado. Por tanto, en la suma de las integrales estos tramos se cancelan, quedando únicamente los tramos que formaban ∂D, con la orientación que, como dijimos más arriba, llamaremos positiva. ■

2.5.4. Otras formulaciones del teorema de Green-Riemann

FORMA VECTORIAL

Consideremos a los objetos bidimensionales de la fórmula de Green-Riemann como sumergidos en el espacio $\mathbb{R}^3$, es decir,

- el dominio D contenido en el plano coordenado horizontal, identificando D con $D \times \{0\}$, que está contenido en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ([106]);
- y el campo vectorial $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ dotado de una tercera componente que es nula en todos los puntos, a base de identificar $\boldsymbol{F}$ con $\boldsymbol{F}^*|_{D\times\{0\}}$ ([107]), donde $\boldsymbol{F}^*(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ para todo $(x, y) \in D$ y todo $z \in \mathbb{R}$.

---

[104] Puesto que la corona circular es diferencia de dos círculos, puede parecer que para una corona ya se ha probado la fórmula en el punto (1) de este mismo apartado, que trataba de conjuntos con agujeros, pero no es así. Como advertimos más arriba, para el razonamiento que justificó aquella ampliación a conjuntos del tipo $D = D_1 \setminus \operatorname{Int} D_2$ tuvimos que suponer que el campo vectorial estaba definido y era de clase $\mathscr{C}^1$ *sobre todo* D_1, no nos bastó con que lo fuera sobre la diferencia, que es lo que suponemos ahora.

Ambas cosas no son lo mismo. Así, por ejemplo, el campo utilizado en la demostración del teorema 1.33.B) está definido sobre toda una corona circular, pero no lo está sobre la totalidad del círculo grande.

[105] Otra forma de deducir que sobre cada D_i se cumple la fórmula de Green-Riemann sería utilizar el teorema 2.38 y el corolario 2.41, puesto que, por ejemplo, $D_1 = D \cap \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$ es la imagen del rectángulo $[a, b] \times [0, \pi/2]$ mediante la transformación que define las coordenadas polares, $\boldsymbol{T}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, que es inyectiva sobre D_1.

[106] Cuidado con esta "identificación": el interior de D en $\mathbb{R}^2$ es bastante distinto del interior de $D \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^3$.

[107] Sin perjuicio de que $\boldsymbol{F}$ esté definida sobre un conjunto que contenga a D en su interior como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, tal como se indicó en la observación 21.

Por la misma razón, $\boldsymbol{F}^*$ ha de estar definida sobre un conjunto que contenga a $D \times \{0\}$ en su interior como subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Éste es el motivo por el que en la definición del dominio de $\boldsymbol{F}^*$ hemos incluido puntos con z distinto de cero.

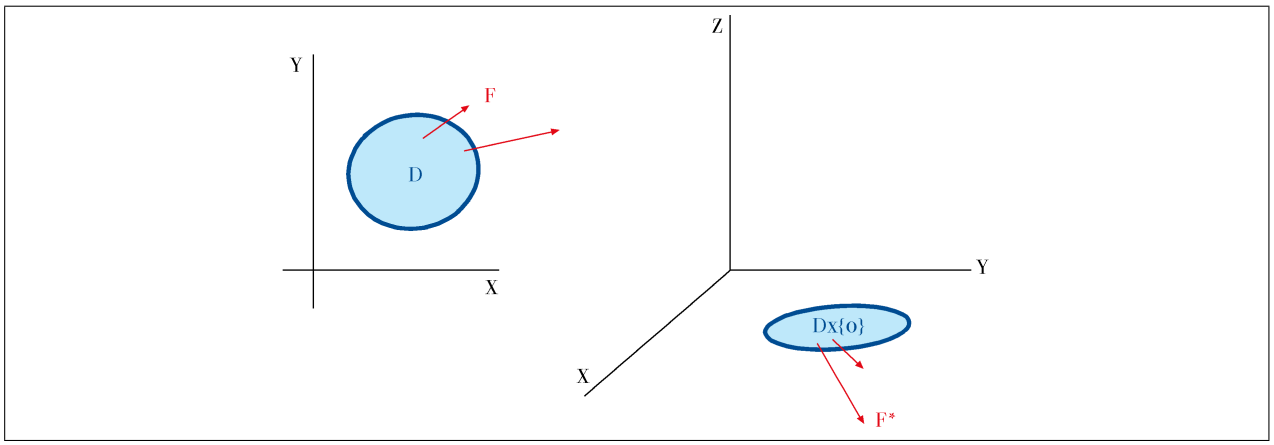


Figura 2.44: Inmersión de D y $\boldsymbol{F}$ en $\mathbb{R}^3$

En el siguiente diagrama $\boldsymbol{F^*}$ es la composición de las demás aplicaciones:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\boldsymbol{F}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\text{biyección}"] & \mathbb{R}^2 \times \{0\} \arrow[d, "\text{inmersión como plano } XY"] \\
D \times \mathbb{R} \arrow[u, "\text{proyección sobre el plano } XY"] \arrow[rr, "\boldsymbol{F}^*"] & & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Corolario 2.43 (forma vectorial de la fórmula de Green-Riemann) *Bajo las hipótesis y notaciones del teorema de Green-Riemann o de alguna de sus extensiones (apartado 2.5.3) y del párrafo anterior,*

$$\int_{\partial D^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_D \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F}^* \cdot \boldsymbol{k}\; dA,$$

donde $\boldsymbol{k}$ *es el vector unitario* $(0, 0, 1)$.

DEMOSTRACIÓN: *Basta observar que el rotacional* $\boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}^*$ *es un vector con las dos primeras coordenadas nulas y la tercera igual a* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

La forma vectorial del teorema de Green-Riemann arroja un poco de luz sobre el sentido que tiene la diferencia de derivadas parciales que aparece en la integral doble: su razón de ser reside en que es una componente de un rotacional. Además, más adelante nos permitirá comprobar inmediatamente que la fórmula de Green-Riemann es un caso particular de la fórmula de Stokes, ver la observación nº 104.

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EN EL PLANO

Así como la anterior formulación nos liga el resultado con el teorema de Stokes para superficies en $\mathbb{R}^3$ (teorema 3.37), la que exponemos a continuación nos lo relaciona con el teorema de la divergencia para volúmenes en $\mathbb{R}^3$ (teorema 4.16). Para enunciarla reconsideraremos la orientación en una curva cerrada simple, que hasta ahora hemos definido a través del sentido del vector tangente unitario ([108]), como la selección de una de las dos normales unitarias a la curva.

[108] La orientación de una curva cerrada simple la habíamos definido mediante la utilización de cambios de variable con derivada estrictamente positiva (ver definición 1.23). Cuando se manejan parametrizaciones que sean regulares, elegir una orientación es equivalente a seleccionar de manera continua uno de los dos vectores tangentes unitarios en cada punto.

Definición 2.44 *Supóngase que $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región sobre la que es válida la fórmula de Green-Riemann y que cada una de las curvas cerradas simples que forman ∂D^+ tiene una parametrización regular a trozos $(x(t), y(t))$. La* ***normal exterior a ∂D en un punto regular $(x(t), y(t))$*** *es*

$$\boldsymbol{N}(x(t), y(t)) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \ .$$

(Ver la nota a pie de página nº 120.)

No hay más que multiplicar escalarmente $\boldsymbol{n}$ por el vector tangente a ∂D, (x', y'), y ver que da cero para entender el nombre de *normal a ∂D*. El nombre de *exterior* se justifica mediante la figura, que muestra cómo

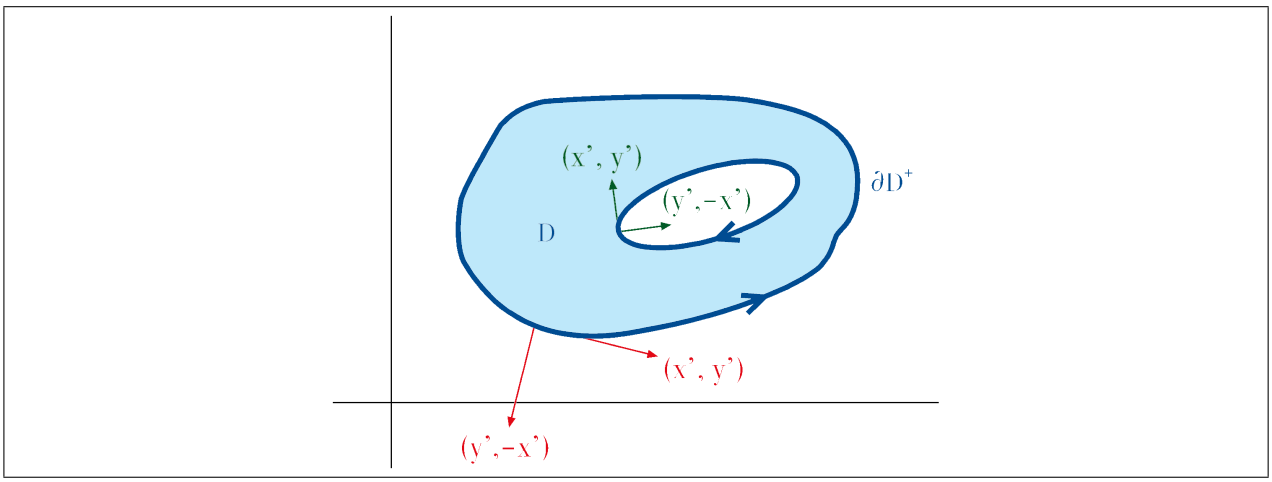


Figura 2.45: Vector tangente (x', y') en dos puntos de ∂D^+, con sus respectivos vectores ortogonales en el sentido de la normal exterior, $(y', -x')$. En ambos casos la normal exterior apunta hacia fuera de D

la normal así definida apunta siempre hacia fuera del conjunto D ([109]).

Como hemos hecho en otras ocasiones, también aquí hemos de demostrar que la definición de normal exterior es correcta, es decir, que depende solamente del conjunto D y del punto donde se calcule, no depende de la parametrización sobre ∂D^+ que utilicemos para calcularla ([110]).

Teorema 2.45 (de la divergencia en el plano) *Bajo las hipótesis y notaciones de los teoremas de Green-Riemann o de alguna de sus extensiones (apartado 2.5.3),*

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} \ ds = \iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{F} \ dA = \iint_D \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} \ dA,$$

donde $\boldsymbol{N}$ es la normal exterior a ∂D.

DEMOSTRACIÓN: *Aplicaremos la fórmula de Green-Riemann, pero no al campo $\boldsymbol{F} = (P, Q)$, sino al campo $(-Q, P)$. Llamando, como siempre, $\boldsymbol{c} = (x, y) : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a una parametrización de ∂D, o de alguna de las*

[109] Lo que hemos hecho para definir la normal exterior ha sido tomar el vector tangente, normalizar su longitud y darle un giro de $-\pi/2$ (considerando como positivo el ángulo en sentido antihorario), como puede comprobarse aplicando a (x', y') la correspondiente matriz de rotación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix}.$$

[110] En efecto, si $(x_1(t_1), y_1(t_1))$ es cualquier otra parametrización de ∂D^+, con cambio de parámetros $t_1 = h(t)$, entonces $h'(t)$ siempre es estrictamente positivo (ignoramos los puntos del conjunto finito donde la derivada puede no existir, ya que estamos alrededor de un punto regular de la curva). Entonces

$$\big(y'(t), -x'(t)\big) = h'(t)\big(y_1'(h(t)), -x_1'(h(t))\big) = h'(t)\big(y_1'(t_1), -x_1'(t_1)\big),$$

que una vez normalizados serán vectores iguales.

curvas cerradas simples que constituyen ∂D,

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\ ds = \int_a^b (\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{N}\circ\boldsymbol{c})\ \|\boldsymbol{c}'\|\ dt = \int_a^b (\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{c})\cdot(y',-x')dt = \int_a^b (Py'-Qx')dt =$$
$$= \int_{\partial D^+} -Q\,dx + P\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{F}\ dA.$$

67. Ambos resultados, la forma vectorial y el teorema de la divergencia en el plano son equivalentes al de Green-Riemann. Es decir, si suponemos cierto uno de estos dos entonces podemos deducir la fórmula de Green-Riemann. (No vamos a demostrar esta afirmación.)

2.5.5. Aplicaciones del teorema de Green-Riemann

ÁREA ENCERRADA POR UNA CURVA

A partir del teorema de Green-Riemann es posible obtener una fórmula para el área de un recinto, que tiene una particularidad que la distingue de las demás que hemos visto hasta ahora: el cálculo se realiza únicamente sobre la frontera del conjunto. Apoyándose en este resultado, se construyen unos instrumentos que se llaman *planímetros* (ver [7]) y que computan el área a medida que una rueda recorre el borde del conjunto.

Corolario 2.46 *Si sobre D es válida la fórmula de Green-Riemann, entonces*

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} -y\ dx + x\ dy.$$

DEMOSTRACIÓN: *La fórmula del enunciado se obtiene por aplicación directa de la de Green-Riemann:*

$$\int_{\partial D^+} -y\ dx + x\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\ dA = \iint_D 2\ dA = 2A(D).$$

CAMPOS CONSERVATIVOS

Estamos ahora en condiciones de dar una *justificación* de que sobre un conjunto $D\subset\mathbb{R}^2$ que no contenga agujeros, un campo vectorial que sea cerrado (es decir, que tenga la propiedad 4 del teorema 1.33) es siempre exacto (propiedad 3 del mismo teorema).

Sea $\boldsymbol{F}=(P,Q): D\longrightarrow\mathbb{R}^2$ un campo vectorial que cumple la hipótesis 4 del teorema 1.33. Tómese cualquier curva cerrada simple, $C\subset D$, la dotamos de una orientación y queremos probar que la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre C^+ es nula, con lo que habremos demostrado la propiedad 1' del teorema 1.33, que es equivalente a la 3.

★ *El conjunto $\mathbb{R}^2\backslash C$ queda dividido en dos trozos, uno de los cuales es acotado y el otro no (cf. lo que se comentó en el apartado 2.5.3(3) sobre el teorema de la curva de Jordan). Nuestra hipótesis sobre la ausencia de agujeros significa, al traducirla a términos técnicos, que la parte acotada K está toda ella contenida en el dominio D. Suponiendo que sobre K pueda aplicarse el teorema de Green-Riemann, y observando que $C=\partial K$ y que $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ por la hipótesis 4, concluimos que* ([111])

$$\int_{C^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \pm\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0\ .$$

[111] La indefinición en el signo se debe a que no sabemos si la orientación que estamos tomando en C^+ es aquella para la que es aplicable la fórmula de Green-Riemann o es la opuesta.

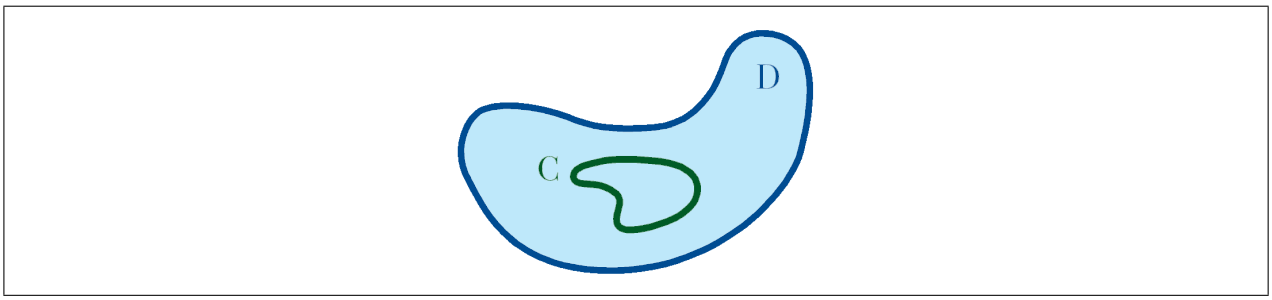


Figura 2.46: Una curva cerrada simple C contenida en D

Volviendo a la demostración de la parte B) del teorema 1.33, observamos que la anterior justificación no es aplicable al campo $\boldsymbol{F}$ y a la curva C que allí aparecen, puesto que en aquel caso la parte acotada K, que es el círculo unidad abierto (sin la circunferencia), no está contenida en el dominio de $\boldsymbol{F}$ porque éste no incluye al origen.

ROTACIÓN DE UN FLUIDO

Pensamos en una lámina de agua muy poco profunda, que identificamos con un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, y nos preguntamos si, al moverse el agua, una boya de diámetro infinitesimal centrada en un punto pero anclada en el fondo giraría como efecto de la velocidad que trata de arrastrarla. Construimos un modelo del movimiento de un fluido sobre un plano, para lo que el campo vectorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$ representará la velocidad del fluido en el punto $\boldsymbol{p}$. Supuesta conocida la función $\boldsymbol{F}$, que para nuestro razonamiento supondremos que es de clase $\mathscr{C}^1$, nos interesa averiguar si en un determinado punto el fluido está sometido a una rotación.

Llamaremos B_ε al círculo (o bola cerrada) de centro en $\boldsymbol{p}$ y radio ε, y C_ε la circunferencia con el mismo centro y el mismo radio, que es la frontera de B_ε, ∂B_ε ([112]). Y planteamos la expresión

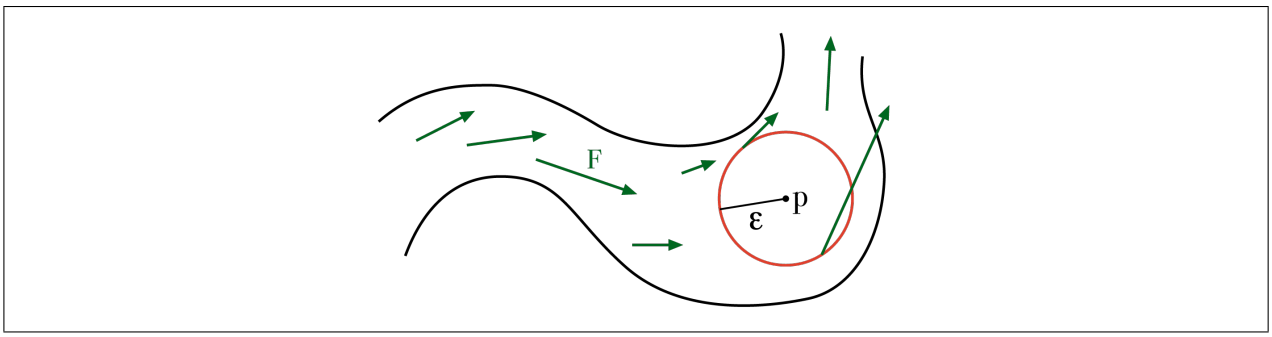


Figura 2.47: Los puntos de la circunferencia de centro $\boldsymbol{p}$ y radio ε se mueven con velocidad $\boldsymbol{F}$

$$\frac{1}{\ell(C_\varepsilon)} \int\limits_{C_\varepsilon^+} \frac{\boldsymbol{F}}{\varepsilon} \cdot d\boldsymbol{s} \ .$$

De acuerdo con el teorema 1.15, la integral de $\boldsymbol{F}/\varepsilon$ es la integral a lo largo de C_ε de la componente tangencial (en el sentido de giro dado por la orientación de C_ε^+) de la velocidad partida por el radio, es decir, de la magnitud de la velocidad angular. Al estar dividida por la longitud de la circunferencia, puede interpretarse como un promedio de la magnitud de la velocidad angular del fluido alrededor de C_ε^+. Pasando al límite cuando ε tiende a cero, si dicho límite existe obtendremos una **medida de la rotación del fluido en el punto $\boldsymbol{p}$**.

Por otra parte,

$$\frac{2}{\ell(C_\varepsilon)} \int\limits_{C_\varepsilon^+} \frac{\boldsymbol{F}}{\varepsilon} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{A(B_\varepsilon)} \int\limits_{C_\varepsilon^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

[112] El círculo, o bola cerrada, B_ε es una región simple en $\mathbb{R}^2$ (ver el teorema J.5); el teorema 2.20 demuestra que su borde es la circunferencia C_ε.

es la integral a lo largo de la circunferencia de la componente tangencial de la velocidad, dividida por el área del círculo, así que el resultado de pasar al límite cuando ε tiende a cero podremos llamarlo (en caso de que el límite exista, claro) la **tasa de variación de esa circulación respecto al área, en el punto $\boldsymbol{p}$**.

Y gracias al teorema de Green-Riemann,

$$\frac{1}{A(B_\varepsilon)} \int\limits_{C_\varepsilon^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{A(B_\varepsilon)} \iint\limits_{B_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\ dy\ .$$

Por el teorema del valor medio para integrales, la última integral es igual a

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}_\varepsilon)$$

para cierto vector $\boldsymbol{q}_\varepsilon$ de longitud menor o igual que ε. Ahora podremos pasar al límite cuando ε tiende a cero, demostrando que el límite existe y calculando su valor. En efecto, como las derivadas de P y de Q son funciones continuas, el límite de la última expresión cuando ε tiende a cero existe, y es igual al valor de $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (\boldsymbol{p})$. Si este número es estrictamente positivo, indica que en las proximidades infinitesimales del punto $\boldsymbol{p}$ el fluido gira en el sentido antihorario, mientras que si es estrictamente negativo gira en el sentido horario. Y si es cero, significa que no hay rotación. Hemos justificado, en resumen,

Corolario 2.47 *(Notaciones como en el corolario 2.43.) La rotación del fluido en el punto $\boldsymbol{p}$ se mide con la tercera componente del vector $\boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{p})$. En caso de que no sea nula, su signo nos da el sentido de giro de la rotación.*

(También el teorema de la divergencia en el plano (teorema 2.45) conlleva una interpretación física del significado de la divergencia, ver, por ejemplo, [12]. páginas 821 y 822.)

2.6 INTEGRALES IMPROPIAS

68. En este apartado, como excepción, no supondremos que las funciones a integrar sean acotadas ni que los dominios de definición de las funciones sean acotados.

Nos limitaremos a poner algunos ejemplos para ilustrar el tipo de dificultades que se presentan cuando la función o su dominio no son acotados, sin entrar en una discusión general. La condición suficiente de la definición 2.51 tendrá trascendencia en el capítulo 3, donde la utilizaremos en el cálculo de algunas integrales sobre superficies, y al final de este mismo apartado, donde nos servirá para calcular algunas longitudes de curvas.

69. Para un uso intensivo de la integración sobre conjuntos no acotados o de funciones no acotadas, así como del intercambio entre integrales y límites, la integral de Riemann impropia es bastante restrictiva, sus propiedades son muy limitadas. Es mucho mejor utilizar la de Lebesgue o, mejor todavía, la de Kurzweil-Henstock.

2.6.1. Condición suficiente

Ejemplo 2.48 Sobre $(0,1]$ considérese la función $1/x$ y la partición $\mathscr{P}_n$ en n partes iguales, teniendo en cuenta que ahora el primer subintervalo no puede ser cerrado, tendrá que ser $(0,1/n]$ puesto que en el 0 no está definida la función. Si ξ es la selección de puntos asociada a esa partición definida por $\xi_i = \frac{i}{n}$,

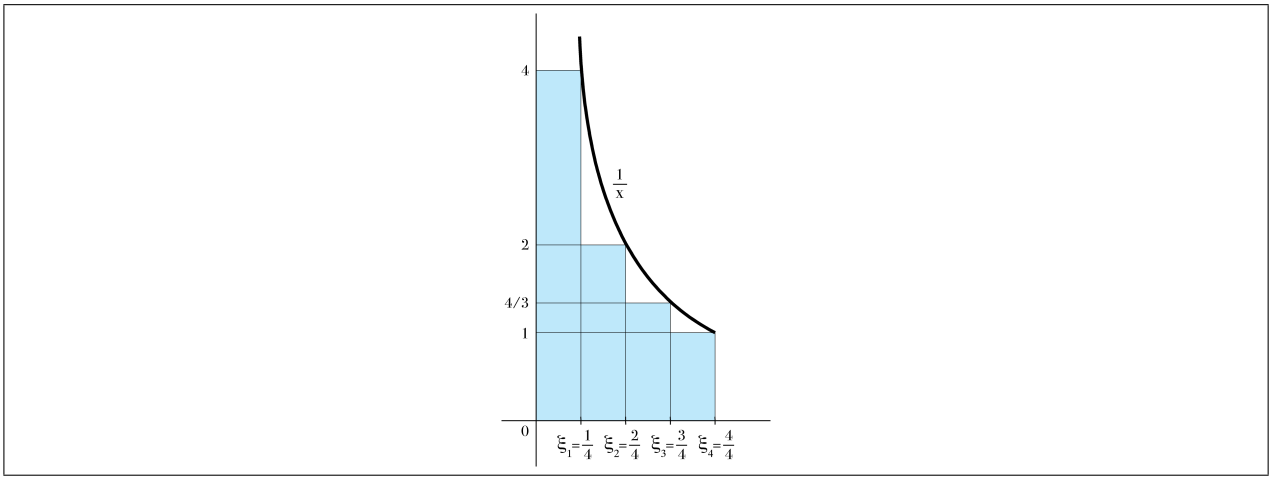


Figura 2.48: La suma de Riemann S_4 vale $4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. La figura está deformada porque las escalas de los ejes horizontal y vertical no son iguales, para facilitar la lectura de algunos valores

$i = 1, \ldots, n$, la suma de Riemann

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty \quad \text{cuando } n \text{ tiende a infinito.}$$

Este resultado es coherente con el siguiente:

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \to 0^+} \Big[\log x\Big]_\delta^1 = \lim_{\delta \to 0^+} (-\log \delta) = +\infty.$$

Se resume esta situación diciendo que **la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ es divergente**. ■

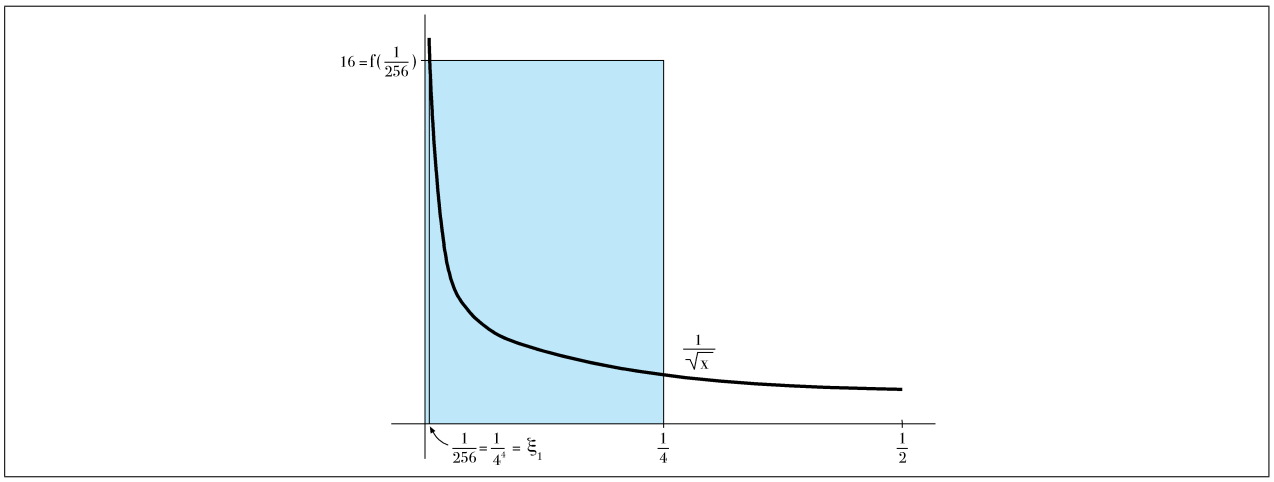


Figura 2.49: La suma de Riemann S_4 es mayor que 4, el área del rectángulo azul. La figura está deformada porque las escalas de los ejes horizontal y vertical no son iguales, para facilitar la lectura de algunos valores

Ejemplo 2.49 Actuando como en el ejemplo anterior pero con la función $1/\sqrt{x}$ y tomando una selección de puntos en subintervalos, ξ, de modo que el primer punto ξ_1, el que pertenece al primer subintervalo $(0, 1/n]$, sea $1/n^4$ (sin importarnos cuáles sean los demás puntos ξ_i para $i > 1$), observamos que

$$S_n > \frac{1}{1/n^2}\frac{1}{n} = n \to +\infty \quad \text{cuando } n \text{ tiende a infinito,}$$

y en cambio

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0^+} (2 - 2\sqrt{\delta}) = 2.$$

Se resume esta situación diciendo que **la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ es convergente y su valor es 2**, a pesar de que hay al menos unas sumas de Riemann que tienden a $+\infty$. ■

Hablamos de la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ a pesar de que la función que integramos no está definida sobre el 0:

70. En las notaciones de las integrales impropias no distinguimos, generalmente, los casos en los que la función está bien definida sobre todo el borde de los casos en los que la función no está definida sobre una parte del borde.

Es una distinción que, en cuanto al valor de la integral, carecería de importancia. Esto se debe, esencialmente, a que los bordes de un intervalo tienen longitud nula; el borde de una región bidimensional simple tiene área nula; y lo mismo ocurre en dimensiones superiores, por lo que los valores en el borde no contribuyen en nada para el valor de la integral.

Ejemplo 2.50 La integral impropia $\iint_D \log x\,dx\,dy$, donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 < x \le e^y\}$ es convergente y su valor es $2 - e$ (utilizando estas expresiones en el mismo sentido que en el último ejemplo).

En efecto: recortando D por la zona donde el integrando no está acotado, $D_\delta = \{(x, y) \in D : x \ge \delta\}$, donde $\delta > 0$,

$$\iint_{D(\delta)} \log x\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_\delta^{e^y} \log x\,dx = \int_0^1 (ye^y - e^y - \delta\log\delta + \delta)\ dy =$$

$$= 2 - e - \delta\log\delta + \delta \ \to\ 2 - e \qquad \text{cuando } \delta \to 0^+,$$

puesto que $\delta\log\delta$ tiende a cero cuando $\delta \to 0^+$. ■

El procedimiento seguido en el último ejemplo puede ampliarse y aplicarse de modo sistemático de la siguiente manera:

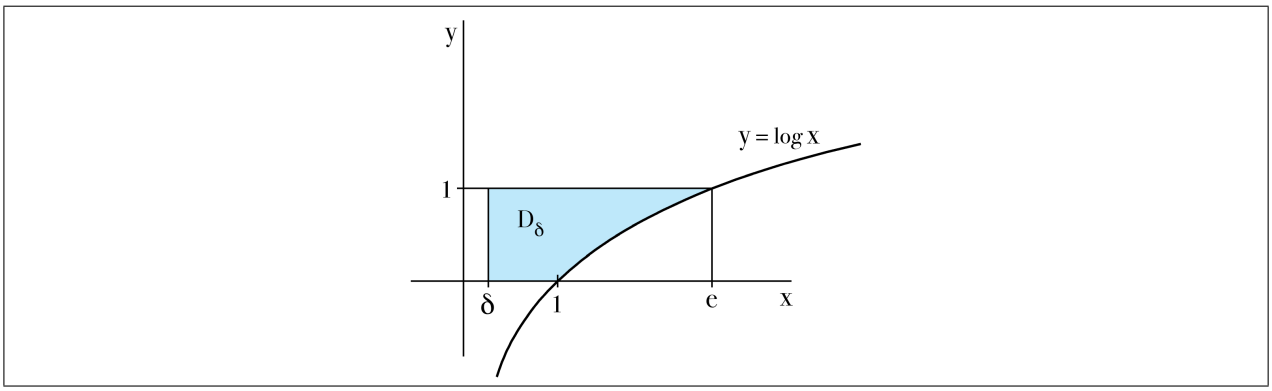


Figura 2.50: Conjuntos D_δ

Definición 2.51 *Considérese una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, cuyo dominio sea una región simple en $\mathbb{R}^2$, que no esté acotada y que sea positiva (es decir, mayor o igual que 0 en todos los puntos).*

Tómese una sucesión $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de regiones simples contenidas en D que sea creciente (es decir, para todo m se tiene que $D_m \subset D_{m+1}$) y cuya unión contenga a todo el interior de D (es decir, $\bigcup_m D_m \supset \operatorname{Int} D$). Supondremos que f es integrable sobre cada una de las D_m.

Si además el conjunto de números $\left\{\iint_{D_m} f : m \in \mathbb{N}\right\}$ está acotado, entonces diremos que ***la integral impropia $\iint_D f$ es convergente y su valor es igual a $\lim_m \iint_{D_m} f$.*** ([113])

71. Cuando f es negativa en todos los puntos, la misma condición suficiente sigue siendo válida, sin más que aplicarla a $-f$. En cambio, si la función f toma valores estrictamente positivos y valores estrictamente negativos en las proximidades de ∂D, hay que añadir ciertas hipótesis para asegurar la convergencia de la integral impropia. No daremos un enunciado detallado para estos casos. Ver, por ejemplo el Teorema 10.33 de [1].

Otras observaciones relacionadas con esta condición suficiente:

- Para verificar que la última definición es correcta habría que comprobar que para cualquier región simple D siempre existen sucesiones de conjuntos (D_m) (ver el apartado (K.10)) y que el hecho de que la sucesión de valores de las integrales esté acotado no depende de la sucesión que se tome (esto último es más complicado).
- Volviendo al último ejemplo, y utilizando las notaciones de la condición suficiente 2.51 ([114]), los conjuntos D_m serían los que en el ejemplo se llamaron D_δ, con $\delta = 1/m$. Obsérvese, además, que el límite $\lim_m \iint_{D_m} \log x$ coincide con el límite $\lim_{\delta\to 0^+} \iint_{D_\delta} \log x$, puesto que, a partir de $\delta < 1$, el valor de las integrales es decreciente a medida que δ decrece.

72. Para dimensiones 1 o 3 existen condiciones suficiente análogas a la enunciada en la definición 2.51 para dimensión 2. El ejemplo 2.49 corresponde a la dimensión 1.

Para un tratamiento mucho más amplio de las integrales de Riemann de varias variables impropias, ★ consultar el capítulo 5 de [6]. Tener en cuenta, de todos modos, lo que se ha dicho en la observación 69.

De manera similar a como hemos considerado integrales impropias de funciones no acotadas sobre conjuntos acotados se tratan las integrales impropias de funciones (acotadas o no) sobre conjuntos no acotados.

[113] Ver la observación 70, para una explicación de que pongamos $\iint_D f$ a pesar de que la unión de todos los conjuntos D_m es posible que sea estrictamente menor que D.

[114] La función del ejemplo no tiene signo constante, por lo que no es aplicable directamente el planteamiento que se hace en la condición suficiente. No obstante, sí que la podemos aplicar dividiendo previamente el dominio D en dos partes, a saber, la parte en la que el integrando es positivo ($1 \le x \le e$), donde la integral es propia, y la parte en la que el integrando es negativo, $0 < x \le 1$, que sería a la que aplicaríamos la condición suficiente.

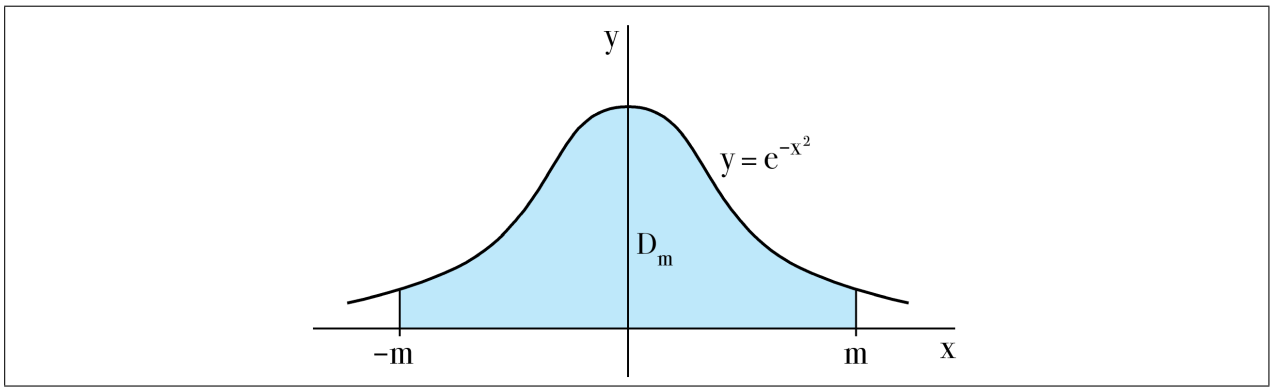


Figura 2.51: Conjuntos D_m para la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Por ejemplo, si $D \subset \mathbb{R}$ no es acotado y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, recortamos D en función de un parámetro positivo m poniendo $D_m = D \cap [-m, m]$, integramos f sobre D_m y pasamos al límite cuando m tiende a infinito. Según cuál sea el resultado de este límite se dice que **la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente o divergente**.

2.6.2. Aplicaciones

LONGITUDES

Aprovechando las integrales impropias pueden utilizarse parametrizaciones más generales para algunos cálculos de las integrales sobre curvas. Sean C una curva (simple o cerrada simple) y $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un camino como los descritos en la definición 1.26, *con la excepción de que no existe alguna de las derivadas de $\boldsymbol{c}$ en a o en b (o ninguna de las dos) y de que la longitud del vector tangente, $\|\boldsymbol{c}'(t)\|$, no está acotada* ([115]).

Entonces $\int_{\boldsymbol{c}} \|\boldsymbol{c}'(t)\|\,dt$ solamente puede existir como integral impropia. Si existe, ¿es siempre igual a $\ell(C)$, aunque $\boldsymbol{c}$ no sea propiamente una parametrización de C? Y si $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, ¿la integral $\int_C f\,ds$ puede obtenerse mediante el cálculo de $\int_a^b f(\boldsymbol{c}(t))\,\|\boldsymbol{c}'(t)\|\,dt$ (integral que puede ser propia o impropia, dependiendo de la acotación, o no, del integrando)? Las respuestas nos las proporciona el siguiente resultado:

Teorema 2.52 *Suponemos las hipótesis descritas en los párrafos precedentes y, adicionalmente, que la derivada $\boldsymbol{c}'(t)$ existe sobre todo el intervalo abierto (a, b) (esta hipótesis podría relajarse a que la derivada exista salvo en un número finito de puntos) y que la función f es no negativa en todos los puntos (en cambio, esta hipótesis es esencial, porque está muy relacionada con una condición que aparece en la definición 2.51).*

1. *Si el producto $f(\boldsymbol{c}(t))\,\|\boldsymbol{c}'(t)\|$ está acotado sobre (a, b), entonces existe la integral de Riemann $\int_{\boldsymbol{c}} f(\boldsymbol{c}(t))\,\|\boldsymbol{c}'(t)\|\,dt$, y es igual a $\int_{\boldsymbol{c}} f\,ds$* ([116]).

2. *Si el producto $f(\boldsymbol{c}(t))\,\|\boldsymbol{c}'(t)\|$ no está acotado, entonces también $\int_{\boldsymbol{c}} f\,ds = \int_{\boldsymbol{c}} f(\boldsymbol{c}(t))\,\|\boldsymbol{c}'(t)\|\,dt$, donde la última integral es una integral impropia convergente de las de la observación 72.*

   En particular, cuando además $C = \boldsymbol{c}([a, b])$ sea una curva simple o una curva cerrada simple,

$$\ell(C) = \textit{(integral impropia)} \int_a^b \|\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{t})\|\,dt.$$

Ejemplo 2.53

[115] Nótese que en el caso de $\boldsymbol{c}$ fuese una parametrización de la curva C, necesariamente la función $\|\boldsymbol{c}'(t)\|$ estaría acotada.

[116] Para poder hablar de integral de Riemann, el integrando ha de estar definido sobre todo el intervalo, cosa que aquí no ocurre, así que lo ampliaremos a los extremos a y b con valor 0, por ejemplo (el valor que asignemos en dos puntos es irrelevante para la integrabilidad y para el valor de la integral).

73. Dados dos vectores n-dimensionales no nulos, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, llamamos **ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, o por las semirrectas que determinan,** a la menor de las longitudes de los dos arcos de la circunferencia (contenida en el plano definido por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, de radio 1 y con centro en el origen) que tienen sus dos extremos en los puntos $\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}$ y $\dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$.

Ese ángulo es igual a $\arccos\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} \cdot \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right)$ ([117]), como pasamos a comprobar:

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son unitarios, que estamos en dos dimensiones, que $\boldsymbol{u} = (1, 0)$ y que $v_2 \geq 0$. Entonces $\arccos\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} \cdot \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right) = v_1$.

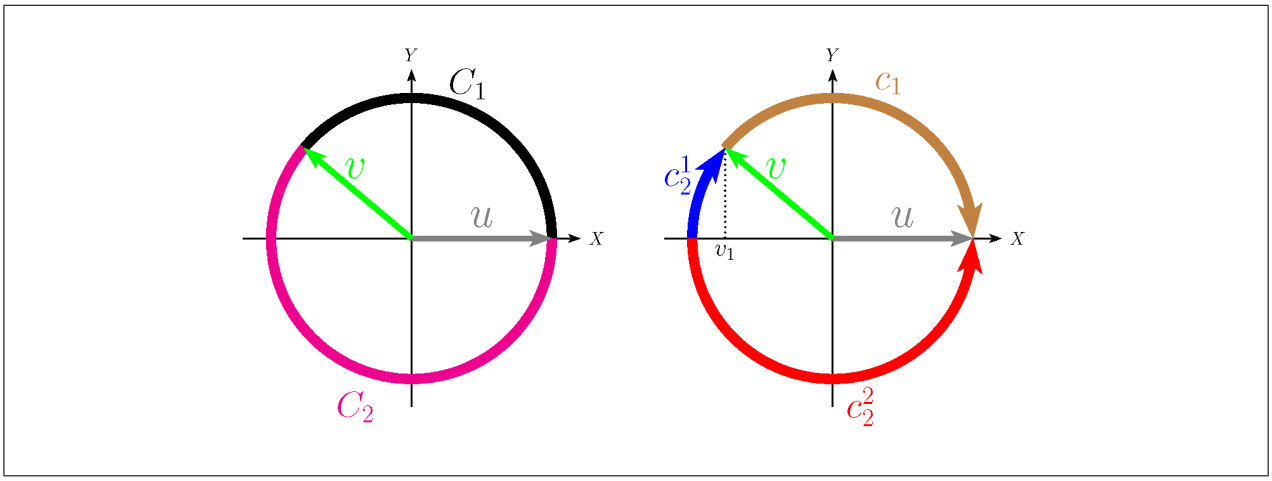


Figura 2.52: Los dos arcos de circunferencia unidad con extremos en $\boldsymbol{u}$ y en $\boldsymbol{v}$, C_1 y C_2; y las imágenes de los caminos que utilizamos para parametrizarlos

La circunferencia unidad es el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\sqrt{1 - x^2}\}$. Parametrizamos las dos curvas simples C_1 y C_2 que unen $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ a lo largo de la circunferencia unidad (ver figura 2.52) de la siguiente manera: Como parametrización de C_1 utilizamos el camino $\boldsymbol{c_1} : [v_1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{c_1}(t) = \left(t, \sqrt{1 - t^2}\right)$. Entonces $\|\boldsymbol{c_1'}(t)\| = 1/\sqrt{1 - t^2}$ para todo $t < 1$, luego

$$\ell(C_1) = \int_{\boldsymbol{c_1}} ds = (\text{integral impropia}) \int_{v_1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \lim_{\delta \to 1^-} \int_{v_1}^{\delta} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} =$$

$$= \lim_{\delta \to 1^-} \Big[-\arccos t \Big]_{v_1}^{\delta} = -\lim_{\delta \to 1^-} \arccos \delta + \arccos v_1 = \arccos v_1,$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado el teorema 2.52; y en la cuarta, la fórmula 32 del anexo M.

Y como parametrización de C_2, tomamos la suma de caminos $\boldsymbol{c_2} = (\boldsymbol{c_2^1})_{\boldsymbol{op}} + \boldsymbol{c_2^2}$, donde

$$\boldsymbol{c_2^1} : [-1, v_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{c_2^1}(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}),$$

$$\boldsymbol{c_2^2} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{c_2^2}(t) = (t, -\sqrt{1 - t^2}).$$

[117] $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ denota el **producto escalar** $u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$. Puede demostrarse que si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son unitarios, entonces su producto escalar es un número real comprendido entre -1 y 1, por lo que su arcocoseno esta bien definido.

Entonces $\ell(C_2) = \int_{\boldsymbol{c_2}} ds = \int_{(\boldsymbol{c_2^1})_{op}} ds + \int_{\boldsymbol{c_2^2}} ds$, con

$$\int\limits_{(\boldsymbol{c_2^1})_{op}} ds = \int\limits_{\boldsymbol{c_2^1}} ds = (\text{integral impropia}) \int\limits_{-1}^{v_1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\delta\to 0^+} \Big[-\arccos t \Big]_{-1+\delta}^{v_1} = \pi - \arccos v_1.$$

$$\int\limits_{\boldsymbol{c_2^2}} ds = (\text{integral impropia}) \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\delta\to 0^+} \Big[-\arccos t \Big]_{-1+\delta}^{1-\delta} = \pi.$$

Luego $\ell(C_2) = 2\pi - \arccos v_1$. Y dado que $\arccos v_1 \in [0, \pi]$, resulta que $\ell(C_1) \leq \ell(C_2)$, como queríamos demostrar. ■

A pesar de lo anterior, en las ocasiones en que el problema que estemos modelizando lo aconseje, usaremos $\ell(C_2)$ en lugar de $\ell(C_1)$ como ángulo formado por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, es decir, $2\pi - \arccos v_1$.

Áreas

Un resultado similar al del teorema 2.52 es válido para áreas de superficie, ver el teorema 3.19.

CAPÍTULO 3

Integrales sobre superficies

3.1 Superficies en $\mathbb{R}^3$ definidas en forma paramétrica

3.1.1. Introducción

La superficie idealizada de nuestro planeta la visualizamos situada, en cada instante, en algún lugar del universo, pero cuando los que vivimos en él queremos referirnos a un punto de esa superifice nos bastan dos magnitudes: la latitud y la longitud geográfica. De la misma manera, nuestras superficies serán objetos matemáticos que ocupan parte de un espacio tridimensional, pero son intrínsecamente bidimensionales; siempre que hablemos de superficies supondremos que estamos hablando de conjuntos de puntos con 3 coordenadas que dependen de 2 parámetros.

Dedicamos estos primeros apartados a introducir una definición de superficie que nos permita

- definir formalmente conceptos como los de área de una superficie, orientación, flujo de un campo vectorial que la atraviesa, así como obtener expresiones para calcularlos, en su caso;
- admitir como superficies a modelos matemáticos de los objetos geométricos elementales (esferas, paralelepípedos, cilindros, conos, ...);
- garantizar la integrabilidad de campos continuos definidos sobre ellas;
- comparar con otras definiciones de superficie (en forma explícita, en forma implícita), y recuperar los resultados obtenidos para estos casos en el cálculo diferencial;
- mantener los estudios y los cálculos en un nivel elemental;
- utilizar programas de cálculo simbólico para representaciones gráficas de superficies.

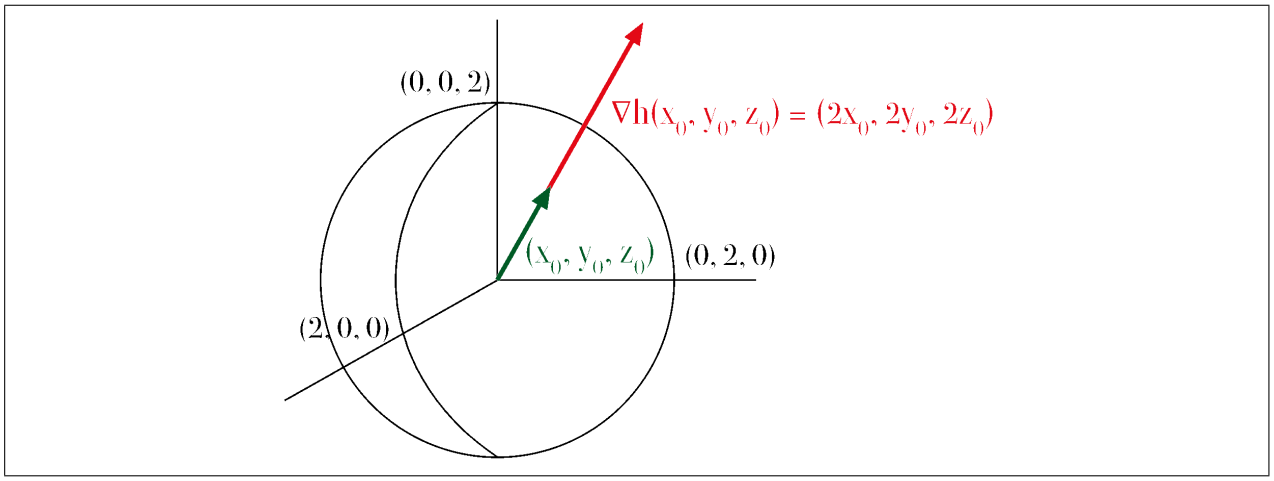


Figura 3.1: Esfera de centro el origen y radio 2, definida por $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Y gradiente de h en un punto cualquiera de la esfera

Cuando se introducen las derivadas parciales, se estudian ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que tienen plano tangente en todos sus puntos. Son las **superficies descritas en forma implícita**, o conjuntos de puntos que verifican una expresión del tipo $h(x, y, z) = 0$, donde h se supone que es de clase $\mathscr{C}^1$ y cuyo gradiente no es nulo en ninguno de los puntos en los que $h(x, y, z) = 0$. El plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) es entonces el que pasa por ese punto y tiene como vector característico al gradiente $\boldsymbol{\nabla} h(x_0, y_0, z_0)$. Esta descripción de superficies es muy útil en el cálculo diferencial, es lo bastante general para incluir algunos conjuntos que no pueden describirse a través de una variable despejada en función de las otras dos —definición explícita—, y tiene además la ventaja de que, gracias al teorema de la función implícita, localmente puede identificarse con la definición explícita. Pero para el cálculo integral no es una descripción práctica, y además nosotros

pretendemos incluir conjuntos que carezcan de plano tangente en ciertos puntos (superficies con vértices o aristas). Por ello buscaremos otra aproximación distinta a la definición de superficie.

Intuitivamente hablando podemos visualizar una superficie como una porción de un plano que ha sido deformada saliéndose del plano pero sin salirse del espacio tridimensional. Para precisar esta idea teniendo en cuenta los objetivos que se enuncian más arriba, limitaremos los posibles tipos de porciones del plano a considerar, así como las deformaciones admisibles.

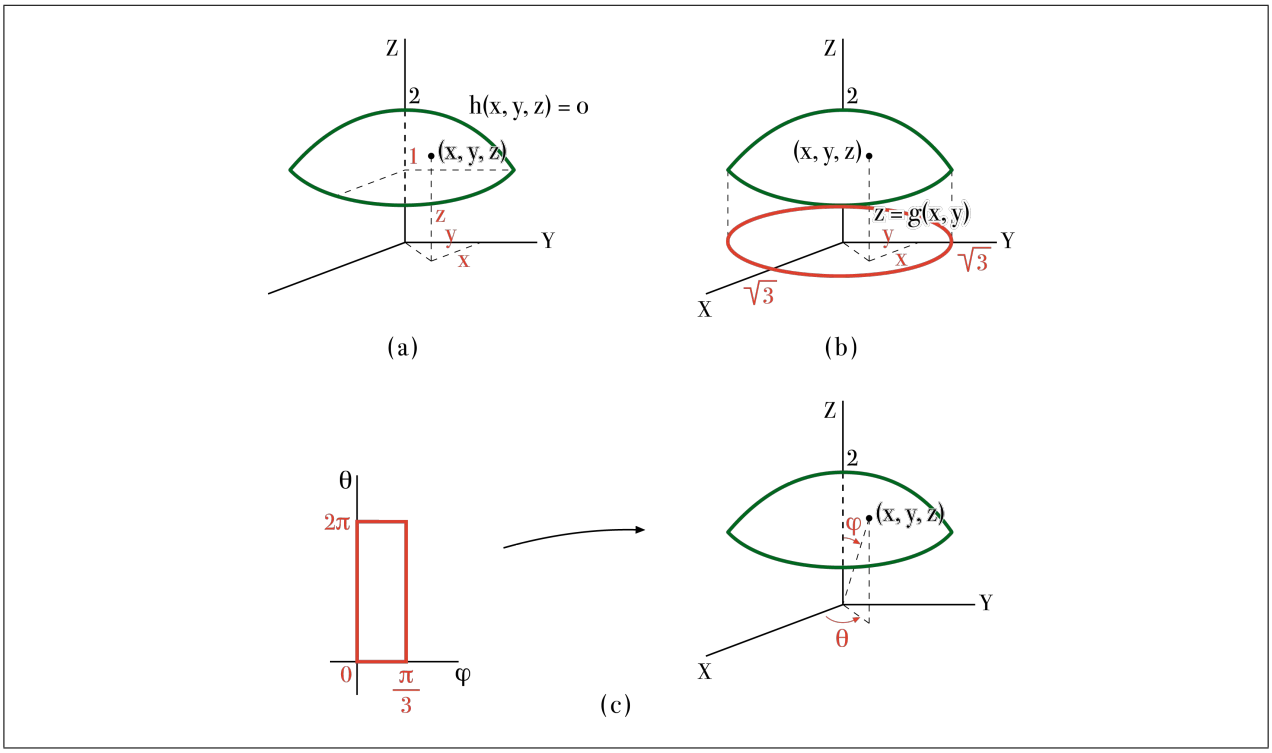


Figura 3.2: Tres definiciones distintas para describir una misma parte de una esfera.
(a) Implícita: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 1$.
(b) Explícita: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 3$.
(c) Paramétrica: $x = 2\sin\varphi\cos\theta$, $y = 2\sin\varphi\sin\theta$, $z = 2\cos\varphi$, con $0 \leq \varphi \leq \pi/3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

El caso más sencillo, que por otra parte es muy útil, es el de suponer que la porción plana solamente se ha deformado en la dirección de una de las coordenadas. Esta situación corresponde en realidad a las superficies dadas en forma explícita, que no son sino conjuntos definidos mediante una expresión del tipo $z = g(x, y)$, es decir, gráficas de funciones reales de dos variables. Por motivos técnicos convendrá suponer que tales funciones g están definidas sobre una región simple y son diferenciables con continuidad (ver la observación 21).

En el caso general supondremos que los dos parámetros que nos sirven para determinar los puntos de la superficie no coinciden con dos de las coordenadas cartesianas. De la misma manera que para curvas en $\mathbb{R}^3$ utilizábamos una parametrización o trayectoria definida como $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, en función de un parámetro t que no tenía por qué ser ninguna de las coordenadas, para superficies Σ en $\mathbb{R}^3$ utilizaremos una parametrización $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, en función de dos parámetros, u, v, que recorren un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, con la condición de que $\mathbf{\Phi} : D \longrightarrow \mathbf{\Phi}(D) = \Sigma \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{\Phi} = (x, y, z)$, sea de clase $\mathscr{C}^1$.

Antes de dar una definición formal veremos por vía de varios ejemplos cuáles son las condiciones que nos hará falta imponer sobre $\mathbf{\Phi}$. Tomamos un valor $(u_0, v_0) \in \operatorname{Int} D$, que da lugar al punto $\boldsymbol{p} = \mathbf{\Phi}(u_0, v_0) \in \Sigma$.

En las proximidades de $\boldsymbol{p}$ consideramos las curvas que son imagen mediante $\mathbf{\Phi}$ de las rectas descritas por $(u_0 + t, v_0)$ y por $(u_0, v_0 + t)$, y calculamos los vectores tangentes a estas dos curvas contenidas en Σ. Estos vectores tangentes resultan ser las derivadas parciales

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0), \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

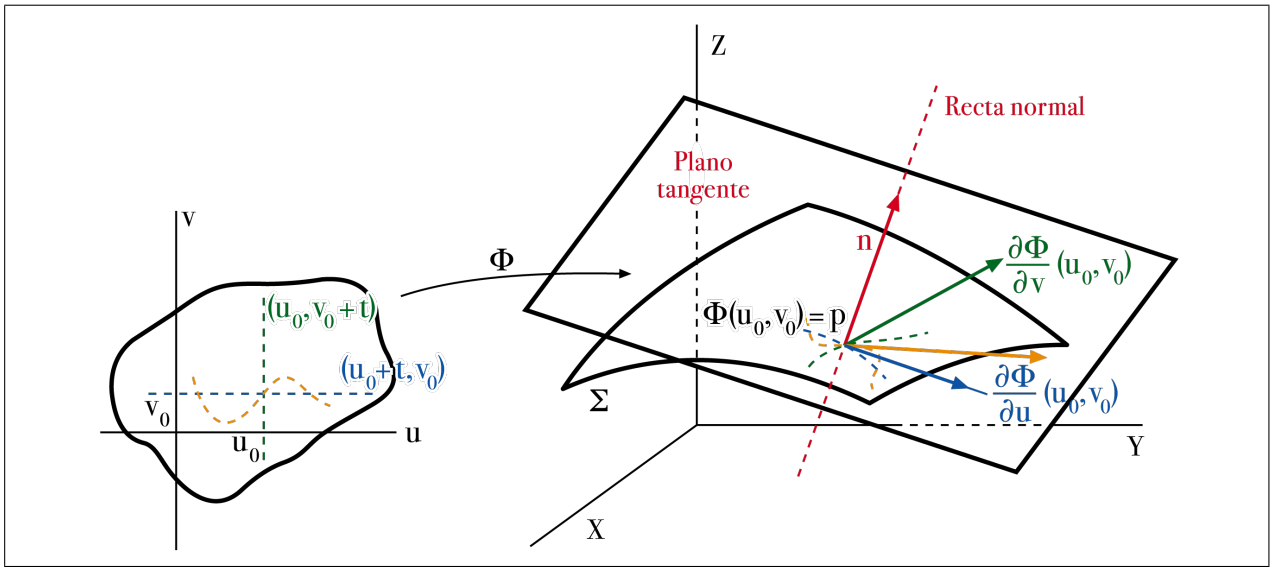


Figura 3.3: Vector normal $\boldsymbol{n}$, recta normal y plano tangente. Los vectores verde, azul y amarillo son las derivadas de las trayectorias del mismo color, que a su vez son composición de Φ con trayectorias que pasan por el punto (u_0, v_0)

Se demuestra, además, que cualquier otro vector tangente que se obtenga de la misma manera pero utilizando otras trayectorias que pasen por (u_0, v_0) (no solamente la recta horizontal o la recta vertical) es combinación lineal de $\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y de $\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0)$ (ver el apartado (K.11)). En consecuencia llamaremos **plano tangente a $\boldsymbol{\Sigma}$ en $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{T_\Sigma(p)}$,** al plano que pasa por $\boldsymbol{p}$ y contiene a esos dos vectores; **vector normal de $\boldsymbol{\Phi}$ en $(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v_0})$, $\boldsymbol{n_\Phi(u_0, v_0)}$,** al producto vectorial $\boldsymbol{n_\Phi}(u_0, v_0) = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0)$; y **recta normal a $\boldsymbol{\Sigma}$ en $\boldsymbol{p}$**, a la recta que pasa por $\boldsymbol{p}$ y está en la dirección del vector normal $\boldsymbol{n_\Phi}(u_0, v_0)$. ([118])

74. Nótese que decimos que el plano tangente y la recta normal lo son a la superficie, mientras que el vector normal no es de la superficie, sino de la parametrización.

Para que efectivamente obtengamos así un plano y una recta (respectivamente), lo que necesitamos es que el vector normal no sea nulo (cf. teorema K.6), es decir, que los vectores $\boldsymbol{\Phi}_u(u_0, v_0)$ y $\boldsymbol{\Phi}_v(u_0, v_0)$ no sean colineales o, equivalentemente, que la matriz jacobiana de $\boldsymbol{\Phi}$ tenga rango 2 ([119]), lo que en cálculo diferencial se suele denominar diciendo que la función $\boldsymbol{\Phi}$ es regular, o suave, en el punto ([120]). Entonces la ecuación del plano tangente es

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0)\right) = 0.$$

75. La ecuación del plano tangente es ésta porque identifica a los vectores (x, y, z) que, una vez trasladado el plano poniendo el punto (x_0, y_0, z_0) en el origen, son perpendiculares al producto vectorial de los dos vectores que lo engendran.

---

[118] Sobre puntos que no estén en el interior de D, $(u_0, v_0) \in \partial D$, podremos utilizar las mismas definiciones que para puntos interiores. Esto es debido, esencialmente, a que, gracias a la condición impuesta en la observación 65, todos los puntos de ∂D ★ son límite de una sucesión de puntos del interior de D (como consecuencia del teorema de la curva de Jordan citado en el apartado 2.5.3(3)). Durante la introducción nos limitaremos a puntos del interior de D.

[119] Las columnas de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{\Phi}$, consideradas como vectores, no son otra cosa que las dos derivadas parciales:

$$J\boldsymbol{\Phi}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{pmatrix}(u_0, v_0).$$

[120] En general, una función f de n variables con valores en $\mathbb{R}^m$ se llama **regular o suave en un punto $\boldsymbol{x}$** de su dominio de definición cuando existen y son continuas todas las derivadas de primer orden en todos los puntos de alguna bola de centro $\boldsymbol{x}$ y además en el punto $\boldsymbol{x}$ el rango de la matriz jacobiana $Jf(\boldsymbol{x})$ es igual al $\min\{n, m\}$ (que es el máximo rango posible para una matriz $m \times n$).

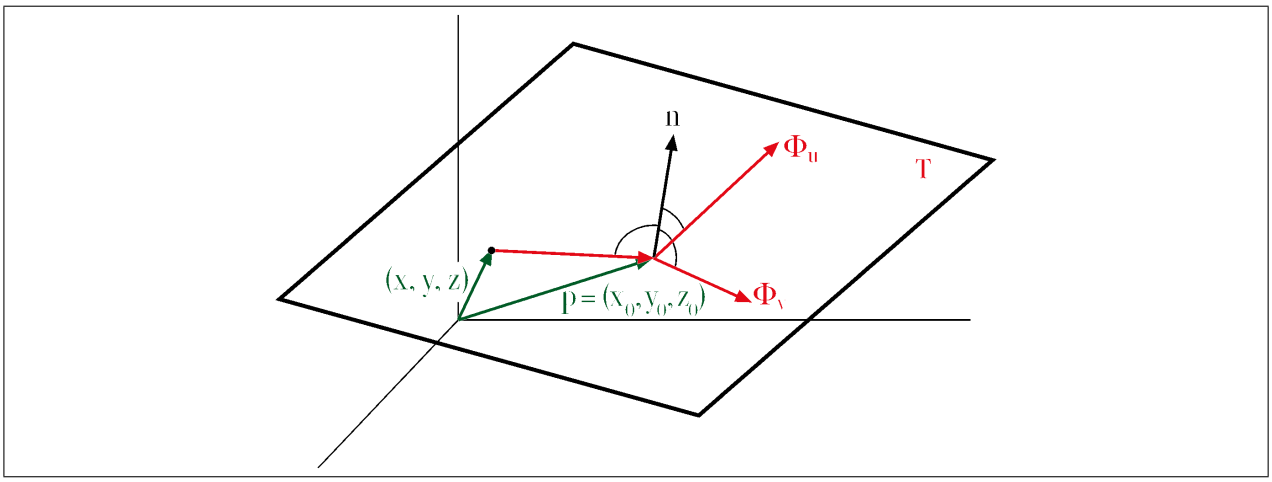


Figura 3.4: Vectores (x, y, z) que pertenecen al plano tangente: la diferencia $\boldsymbol{p} - (x, y, z)$ yace sobre el plano T. Los ángulos resaltados son todos rectos

76. En las figuras unas veces ponemos las flechas de vector a partir del origen y otras veces a partir de otro punto. Siempre que dibujamos un vector a partir de un punto distinto del origen, como ocurre en la figura 3.4 con los vectores $\boldsymbol{n}$ (que parte de $\boldsymbol{p}$) o $\boldsymbol{p} - (x, y, z)$ (que parte de (x, y, z)), estamos dibujando el vector trasladado. Se trata de un abuso de escritura que es muy útil y poco peligroso.

A continuación, iniciamos la formalización de la noción de superficie. Conviene saber que no todos los textos imponen las mismas restricciones que nosotros vamos a imponer, existen varias opciones que podrían servir para los propósitos que nos hemos marcado al comienzo de este apartado.

En primer lugar, nuestros dominios de parámetros contendrán a su frontera. La consecuencia será que en un cilindro, por ejemplo, siempre consideraremos incluidas las dos circunferencias que lo limitan (no los círculos completos, pero sí las circunferencias). Se expresa esta opción diciendo que manejamos **superficies con borde** (las que lo tienen, porque una superficie esférica, por ejemplo, no tiene borde).

En segundo lugar, admitiremos aristas y vértices en nuestras superficies, para poder trabajar, por ejemplo, con conos y cubos, lo que a menudo se traducirá en que necesitaremos que las condiciones de diferenciabilidad no se cumplan en ciertos conjuntos de puntos excepcionales.

Por último, nos limitaremos a dominios de parámetros que sean regiones simples o uniones finitas de regiones simples, para poder aplicar todas las propiedades de las integrales dobles que hemos introducido en el apartado 2.3.2 y siguientes.

3.1.2. Ejemplos previos a la definición

Ejemplo 3.1 El **cono** $z^2 = x^2 + y^2$, $z \leq 0$, puede parametrizarse de varias maneras.

77. En las dos parametrizaciones que vamos a dar del cono, el dominio de definición de los parámetros no es un conjunto acotado (como tampoco lo es el cono). Para que estas parametrizaciones lo sean en el sentido de la definición 3.10, será imprescindible que reduzcamos el dominio de parámetros.

Una de ellas consiste en tomar como parámetros a las variables x e y:

$$\left.\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= -\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}\right\} \text{(ésta es la descripción de la parametrización que llamaremos } \boldsymbol{\Phi_1}\text{)}$$

Entonces la matriz jacobiana es

$$J\boldsymbol{\Phi_1}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}$$

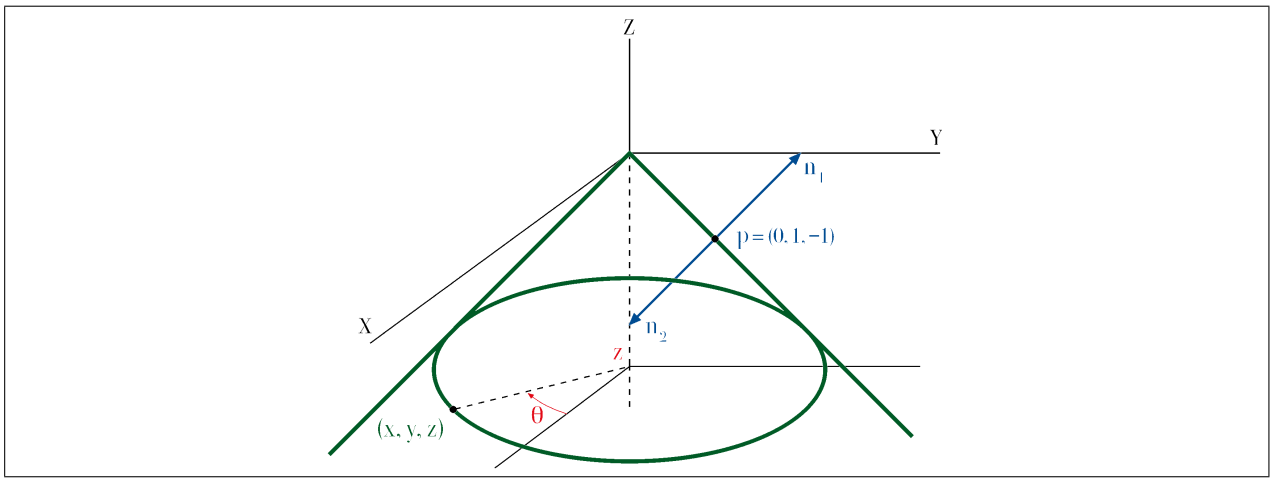


Figura 3.5: Cono $x^2 + y^2 = z^2$, $z \leq 0$. Coordenadas de un punto genérico para la parametrización $\mathbf{\Phi_2}$ (en rojo) y vectores normales en el punto $(0, 1, -1)$ (en azul)

y el vector normal es

$$\boldsymbol{n_1} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Por ejemplo, en el punto $\boldsymbol{p} = (0, 1, -1) = \mathbf{\Phi_1}(0, 1)$ el vector normal es $\boldsymbol{n_1} = (0, 1, 1)$. Hay que observar que los cálculos que hemos hecho son válidos en todos los puntos excepto en $(0, 0)$, donde no hay vector normal. Señalemos, por último, que esta normal, cuando existe, "apunta siempre hacia arriba", dado que la tercera coordenada del vector normal es estrictamente positiva.

Otra forma de parametrizar el cono es la siguiente. Elegimos en primer lugar un valor de z. El corte del cono a la altura z es la circunferencia $x^2 + y^2 = z^2$, luego tomando como nuevo parámetro un ángulo θ podremos describir cualquier punto del cono como ([121])

$$\mathbf{\Phi_2}(u, \theta) : \begin{cases} x = u \cos\theta \\ y = -u \sin\theta \\ z = -u \end{cases}$$

(donde es suficiente con tomar $0 \leq \theta \leq 2\pi$). Entonces la matriz jacobiana es

$$J\mathbf{\Phi_2}(u, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -u \sin\theta \\ -\sin\theta & -u \cos\theta \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y el vector normal es $\boldsymbol{n_2} = (-u \cos\theta, u \sin\theta, -u)$, que ahora existe en todos los puntos, incluido el vértice. ¿Es que el cono ha pasado a tener plano tangente en el vértice? No, lo que pasa es que allí el vector normal existe pero es nulo, no determina ni recta normal ni plano tangente.

El mismo punto $\boldsymbol{p}$ de antes es igual a $\mathbf{\Phi_2}(1, 3\pi/2)$, luego el nuevo vector normal en $\boldsymbol{p}$ es $(0, -1, -1)$, el opuesto al anterior. Con esta segunda parametrización, el vector normal siempre "apunta hacia abajo" (salvo cuando es nulo, claro), puesto que su tercera coordenada es siempre negativa. ■

78. El hecho de que la superficie tenga un vértice, un punto singular donde la superficie carece de plano tangente, no impide que sea imagen de una parametrización derivable con continuidad en todos los puntos, como acabamos de ver. Algo análogo ocurría con las curvas, ver el ejemplo 1.22. Lo que es imposible es que en un vértice la parametrización definida sobre una región simple tenga un vector normal que sea no nulo, puesto que entonces ese vector normal determinaría un plano tangente.

[121] Para la existencia de un tal θ utilizar la propiedad pertinente del apartado (B.3). En el ejemplo 3.2 se hacen razonamientos similares.

Ejemplo 3.2 La parametrización $x = 2\sin\varphi\cos\theta$, $y = 2\sin\varphi\sin\theta$, $z = 2\cos\varphi$ describe los puntos de la **superficie esférica** de centro el origen y radio 2. Para demostrarlo hemos de comprobar dos cosas. La

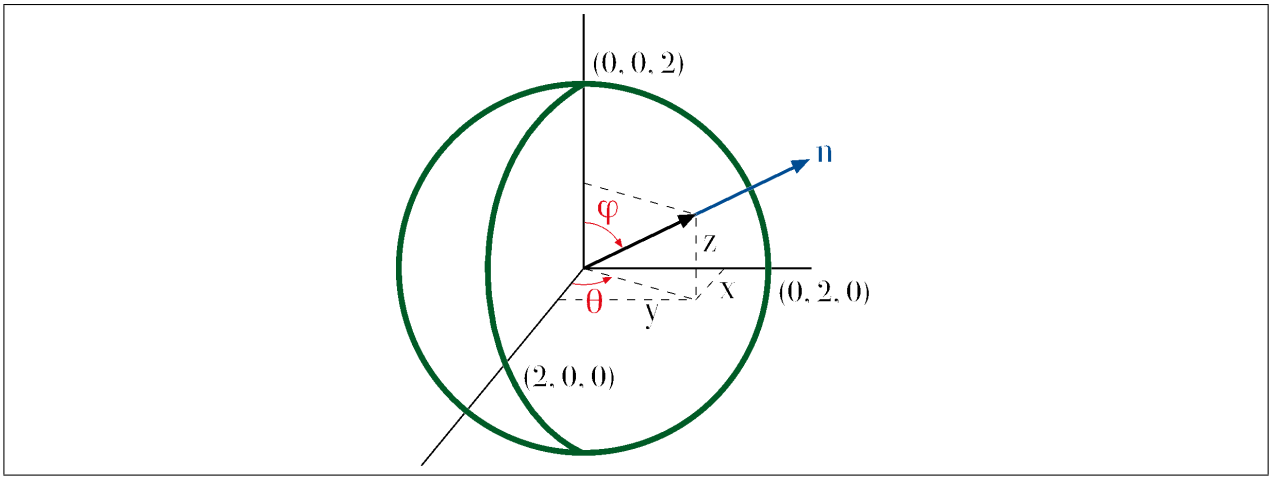


Figura 3.6: Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Parámetros φ, θ y vector normal $\boldsymbol{n}$ para punto cualquiera de la esfera

primera, que todas las imágenes así obtenidas verifican $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (hacer las operaciones), de modo que la distancia del punto (x, y, z) al origen es igual a 2. La segunda, el enunciado recíproco del anterior, es decir, que todos los puntos (x, y, z) para los que $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, son imagen de la parametrización (siempre que admitamos cualquier valor para los ángulos θ y φ), como pasamos a comprobar:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \;\Rightarrow\; \left|\frac{z}{2}\right| \leq 1 \;\Rightarrow\; \exists\varphi = \arccos(z/2)$$

(ver el apartado (B.3)). Entonces

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi \;\Rightarrow\; \left(\frac{x}{2\sin\varphi}\right)^2 + \left(\frac{y}{2\sin\varphi}\right)^2 = 1,$$

Aplicando otra de las propiedades del apartado (B.3),

$$\exists\theta \in \mathbb{R},\; x = 2\sin\varphi\cos\theta \;\wedge\; y = 2\sin\varphi\sin\theta.$$

Ahora bien, para la existencia de φ y θ no necesitamos todos los valores posibles de los ángulos, nos basta con $\varphi \in [0, \pi]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$, que serán los que tomemos a partir de ahora al manejar esta parametrización, salvo que digamos lo contrario.

La matriz jacobiana de la parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ es

$$J\boldsymbol{\Phi}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi\cos\theta & -2\sin\varphi\sin\theta \\ 2\cos\varphi\sin\theta & 2\sin\varphi\cos\theta \\ -2\sin\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

donde las columnas son los vectores $\boldsymbol{\Phi}_\varphi$ y $\boldsymbol{\Phi}_\theta$, derivadas parciales de $\boldsymbol{\Phi}$ respecto a φ y a θ, respectivamente. Haciendo el producto vectorial de las dos columnas se obtiene que el vector normal de la parametrización en el punto (φ, θ) (cuya imagen es el punto (x, y, z) de la esfera) es

$$\boldsymbol{n} = 2\sin\varphi\,(x, y, z),$$

que cuando $\sin\varphi \neq 0$ es un vector proporcional al radio vector (x, y, z) y por tanto ortogonal al plano tangente a la esfera (como era de esperar, puesto que en una esfera el plano tangente siempre es perpendicular al radio). Así se determinan el plano tangente y la recta normal en todos los puntos salvo en los casos en los que $\sin\varphi = 0$, es decir, salvo en los puntos que correspondan a $\varphi = 0, \pi$. ■

79. Como la esfera no tiene puntos singulares, hay que concluir que esta ausencia de plano tangente en algunos puntos es un "defecto" de la parametrización, no de la superficie.

Ejemplo 3.3 El **cilindro** definido por las condiciones $x^2+y^2=a^2$, $|z|\le h$ (donde a y h son estrictamente positivos) puede describirse como la imagen de la siguiente aplicación:

$$(\theta,z)\in D=[0,2\pi]\times[-h,h] \quad\rightsquigarrow\quad \mathbf{\Phi}(\theta,z)=(a\cos\theta,a\sin\theta,z).$$

Podemos visualizar la deformación que hemos hecho del rectángulo D observando que el resultado ha sido como si lo recortásemos del plano (θ,z), lo estirásemos de acuerdo al factor a (si $a<1$, en realidad lo

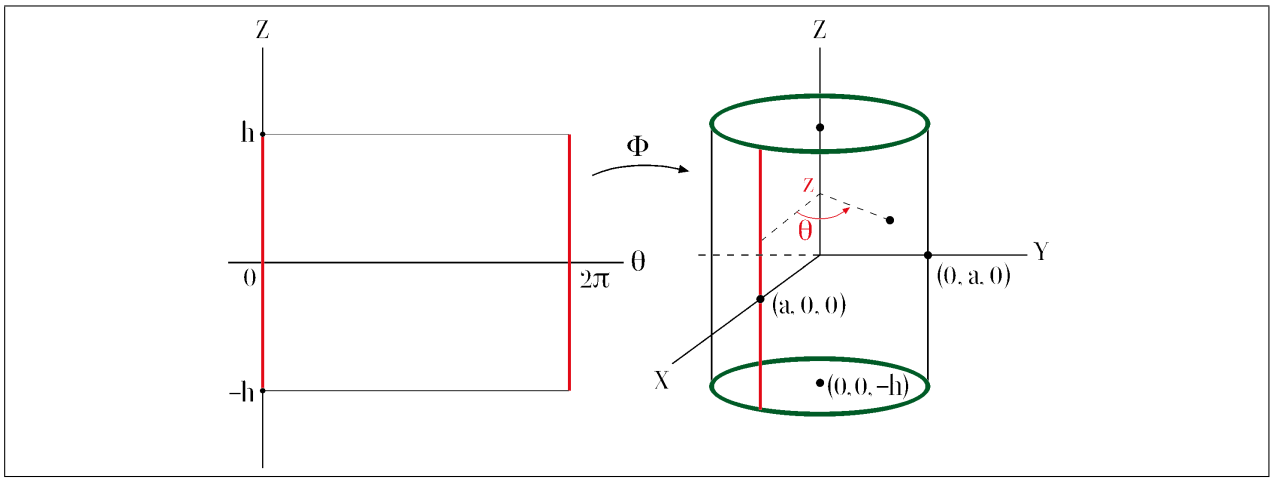


Figura 3.7: Parametrización del cilindro $x^2+y^2=z^2$, $|z|\le h$. Los dos lados verticales del rectángulo (en rojo) se han unido para formar una generatriz del cilindro (en rojo)

estaremos encogiendo), lo enroscásemos, pegando los dos lados correspondientes a $\theta=0$ y $\theta=2\pi$, y lo desplazásemos para que el eje Z coincida con el eje del cilindro.

La matriz jacobiana es

$$J\mathbf{\Phi}(\theta,z)=\begin{pmatrix}-a\sin\theta & 0\\ a\cos\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

y el vector normal en un punto de parámetros θ, z es $\boldsymbol{n}=(a\cos\theta,a\sin\theta,0)=(x,y,0)$, siempre horizontal. ■

Ejemplo 3.4 Una variante del ejemplo anterior es la que podemos llamar **cilindro con tapas**, consistente en añadir a la superficie cilíndrica

$$x^2+y^2=a^2,\quad |z|\le h$$

los dos círculos

$$z=h,\quad x^2+y^2\le a^2 \qquad \text{y} \qquad z=-h,\quad x^2+y^2\le a^2$$

que, en cierto modo, cierran la figura cilíndrica terminando de formar el modelo matemático de un objeto con forma de lata.

Para obtener una descripción paramétrica podemos actuar de dos maneras. La primera consiste en dar parametrizaciones independientes de cada uno de los tres trozos en los que se descompone de forma natural el cilindro con tapas, es decir, por una parte la superficie cilíndrica (ejemplo 3.3), por otra la tapa de arriba

$$(x,y)\in D_h=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le a^2\} \quad\rightsquigarrow\quad (x,y,h),$$

y por otra la tapa de abajo

$$(x,y)\in D_{-h}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le a^2\} \quad\rightsquigarrow\quad (x,y,-h).$$

Una segunda manera consiste en pensar en un "desarrollo" de la figura completa, convirtiéndola en una figura plana formada por un rectángulo junto con dos círculos tangentes al rectángulo en lados opuestos. Este procedimiento lleva a construir una única función $\mathbf{\Phi}$ definida mediante tres fórmulas distintas sobre las tres partes de esa figura plana, con un espíritu similar al que explicamos pormenorizado en el ejemplo 3.5. ■

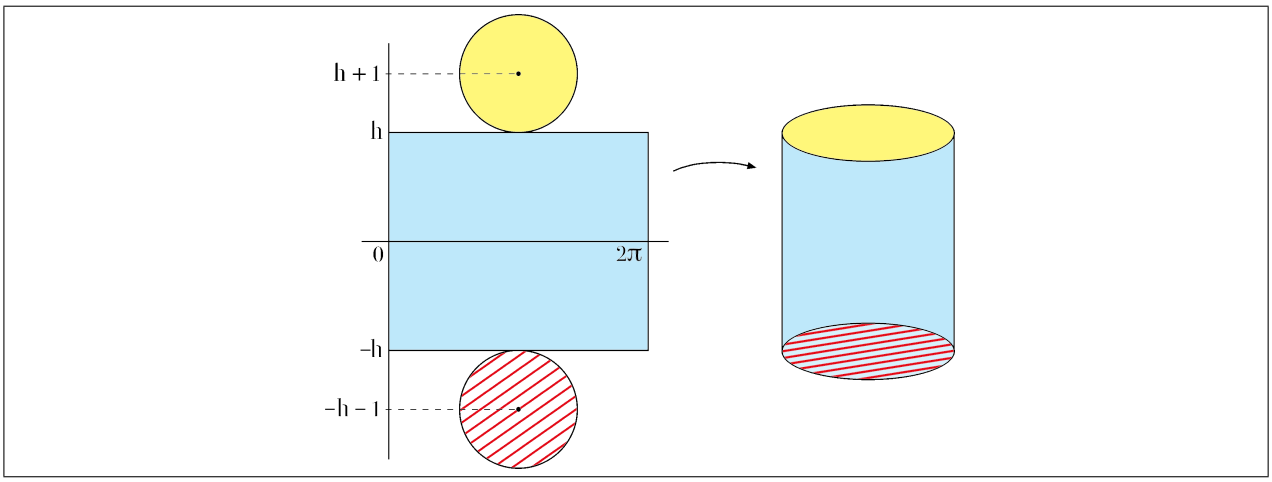


Figura 3.8: Parametrización del "cilindro con tapas"

Ejemplo 3.5 El **cubo** formado por las seis caras de $[0,1]^3$ es la imagen de $\mathbf{\Phi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $D = D_1 \cup \cdots \cup D_6$, $D_1 = [0,1]\times[1,2]$, $D_2 = [0,1]\times[-1,0]$, $D_3 = [0,1]\times[0,1]$, $D_4 = [1,2]\times[0,1]$, $D_5 = [2,3]\times[0,1]$, $D_6 = [3,4]\times[0,1]$, y

$$\begin{array}{lcl}
(u,v) \in D_1 & \Rightarrow & \mathbf{\Phi}(u,v) = (v-1,u,1) \\
(u,v) \in D_2 & \Rightarrow & \mathbf{\Phi}(u,v) = (-v,u,0) \\
(u,v) \in D_3 & \Rightarrow & \mathbf{\Phi}(u,v) = (0,u,v) \\
(u,v) \in D_4 & \Rightarrow & \mathbf{\Phi}(u,v) = (u-1,1,v) \\
(u,v) \in D_5 & \Rightarrow & \mathbf{\Phi}(u,v) = (1,3-u,v) \\
(u,v) \in D_6 & \Rightarrow & \mathbf{\Phi}(u,v) = (4-u,0,v)
\end{array}$$

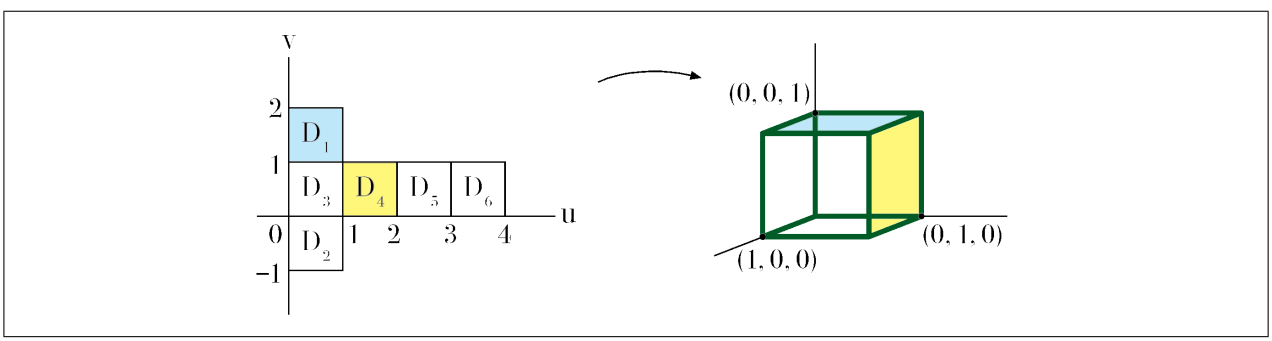


Figura 3.9: Parametrización del cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

La función $\mathbf{\Phi}$ está bien definida (porque sobre los bordes comunes de los D_i coincide) y es continua sobre todo D. Además, su restricción a cada D_i es derivable con continuidad, puesto que todas las fórmulas son polinomios de primer grado.

Para mejor comprender la parametrización, podemos imaginar que hemos dibujado un desarrollo del cubo, con las seis caras dispuestas en forma de T tumbada, para a continuación recortar y pegar lados de las caras para ir formando las aristas. ■

Ejemplo 3.6 Si D es una región simple de dos variables y $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable con continuidad sobre D, entonces la gráfica de g, $\Sigma = \{(x,y,g(x,y)) : (x,y) \in D\}$, es una **superficie en forma explícita**, imagen de la parametrización

$$\mathbf{\Phi}(x,y) = (x,y,g(x,y)) \quad \forall (x,y) \in D,$$

que es inyectiva y regular en todos los puntos del dominio D, ya que su matriz jacobiana es

$$J\mathbf{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

que siempre tiene rango igual a 2 porque el determinante de las dos primeras filas es no nulo. El vector

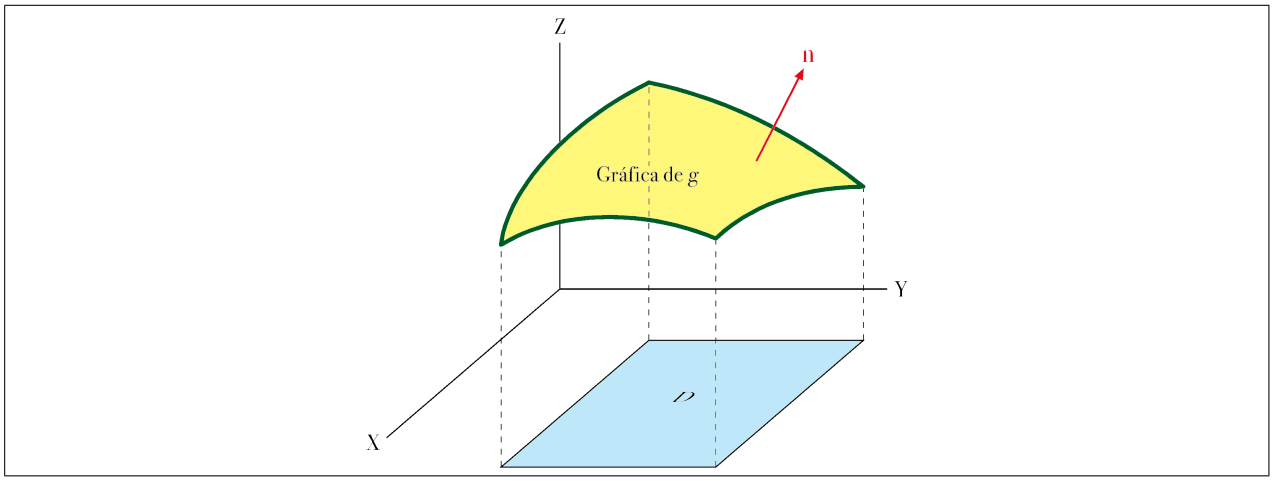


Figura 3.10: Superficie en forma explícita

normal vale $\boldsymbol{n} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)$. ([122]) ■

81. Si $\Sigma = \mathbf{\Phi}(D)$, donde los parámetros $u, v \in D$ no tienen por qué ser dos de las coordenadas cartesianas, entonces alrededor de los puntos de Σ para los que la matriz jacobiana de $\mathbf{\Phi}$ tiene rango 2, siempre puede expresarse una parte de Σ en forma explícita (ver teorema K.7, en el apartado (K.12)).

Cuando se considera la gráfica de una función de dos variables como una superficie, para definir el plano tangente se suele utilizar el polinomio de Taylor de primer grado, que es la mejor aproximación por un plano afín en las proximidades del punto. A continuación comprobamos que esa definición coincide con la que hemos dado más arriba.

Teorema 3.7 *Sea Σ la superficie dada en forma explícita por $z = g(x,y)$ (notaciones como en el ejemplo 3.6), y $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de Σ, con $(x_0, y_0) \in \operatorname{Int} D$. Entonces el plano tangente a Σ en $\boldsymbol{p}$ es el conjunto de puntos (x,y,z) que cumplen*

$$z = z_0 + (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).$$

DEMOSTRACIÓN: *Se deduce inmediatamente de la definición de plano tangente (página 115) y de los vectores normales calculados en el ejemplo 3.6.*

82. Como consecuencia de esta fórmula puede decirse que nuestros planos tangentes son los mismos que los que se introdujeron en el cálculo diferencial para superficies definidas en forma explícita.

[122] Podemos escribir las variables en cualquier orden, pero el orden tiene consecuencias al calcular el vector normal. Obsérvese que si hubiéramos elegido los parámetros de modo que las variables x, y se obtuviesen en el otro orden posible, $(u,v) \rightsquigarrow (v, u, g(u,v))$, entonces el vector normal también sería no nulo, $\boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial u}, -1\right)$, pero su última coordenada sería negativa. Esto ahora no tiene trascendencia, pero la tendrá cuando hablemos de la orientación (apartado 3.3.2).

80. *Salvo indicación expresa en sentido contrario*, para evitar ambigüedades escribiremos los parámetros y las variables en el orden natural, numérico o alfabético, con letras latinas antes que letras griegas. Por ejemplo, (r, u_1, u_2, v, x, y, z, α, φ, ρ, θ).

Ejemplo 3.8 Nos encontraremos en la práctica con algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos como la gráfica de una función, $z = g(x, y)$, donde no se cumplen todas y cada una de las condiciones del ejemplo 3.6 y ello se debe a que el plano tangente en algún o en algunos puntos que están sobre la frontera de la región D es vertical. Es decir, el problema surge porque alguna de las derivadas parciales de g se hace infinita en ciertos puntos del borde (o frontera) ∂D. En consecuencia, la función g no es diferenciable en esos puntos, lo que contraviene la hipótesis que hicimos en 3.6 de que $g \in \mathscr{C}^1(D)$.

Por consiguiente, nos interesa considerar también las definiciones explícitas

$$\Sigma : \quad z = g(x, y), \ (x, y) \in D,$$

en las que *g sea continua sobre todo D; sea derivable y con ambas derivadas continuas sobre todo* $\operatorname{Int} D$*; y alguna de sus derivadas parciales no esté acotada sobre* $\operatorname{Int} D$.

Por ejemplo, la semiesfera $z = g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, de centro el origen y radio 2, tiene plano tangente vertical en todos los puntos de la circunferencia borde, es decir, cuando $z = 0$. Y es que las derivadas, que en los demás puntos se expresan como

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},$$

no existen cuando los denominadores se anulan, es decir, cuando $x^2 + y^2 = 4$. En consecuencia, no nos servirían para calcular, por ejemplo, el plano tangente.

A pesar de sufrir una importante deficiencia técnica, estas descripciones explícitas podrán utilizarse, bajo ciertas condiciones, para calcular integrales de campos escalares o vectoriales, sustituyendo las integrales dobles convencionales por integrales dobles impropias. Ver los teoremas 3.19 y 3.34, así como el ejemplo 3.35. ■

Ejemplo 3.9 El teorema de la función implícita garantiza que de una ecuación $h(x, y, z) = 0$, donde h es una función derivable con continuidad y que tiene gradiente no nulo en todos los puntos donde h vale cero, siempre se puede despejar alguna de las tres variables en función de las otras dos, al menos en un entorno de cada punto, puesto que si en un punto $\boldsymbol{p_0} = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ el gradiente de h es no nulo, alguna de sus derivadas parciales tiene que ser distinta de cero. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\partial h/\partial z(\boldsymbol{p_0}) \neq 0$. Entonces sabemos que existe una función g de dos variables tal que $g(x_0, y_0) = z_0$ y que en un entorno de $\boldsymbol{p_0}$ la ecuación $h(x, y, z) = 0$ equivale a $z = g(x, y)$.

83. Siempre que un subconjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ esté definido por una ecuación $h(x, y, z) = 0$ (por ejemplo, una superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$), donde h sea una función derivable con continuidad y que tenga gradiente no nulo en todos los puntos donde se anula h, podremos asegurar que en un entorno de cada punto ([123]), el conjunto Σ es una superficie en forma explícita.

Por consiguiente, un resultado análogo al teorema 3.7 es válido para las superficies definidas en forma implícita de la página 113. ■

3.1.3. Definición formal de superficie

Nuestra definición de superficie incluye los conjuntos que se pueden obtener uniendo imágenes de parametrizaciones que son inyectivas y regulares sobre interiores de regiones simples, con la condición adicional de que solamente se "peguen" puntos que correspondan a los bordes. En cierto modo, es algo similar a lo que hicimos con las parametrizaciones de curvas, al admitir funciones de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos.

[123] Es decir, si nos limitamos a la parte de Σ contenida en un cierto paralelepípedo con centro en el punto y con lados de longitud estrictamente positiva.

Definición 3.10 *Una* ***superficie*** *es cualquier subconjunto $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ que sea imagen, $\Sigma = \mathbf{\Phi}(D)$, de una aplicación continua $\mathbf{\Phi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$, $m \in \mathbb{N}$, es una unión (finita) de m regiones simples D_i que no se solapan, y de forma que*

1. *Para cada $i = 1, \ldots, m$, $\mathbf{\Phi}|_{D_i} \in \mathscr{C}^1(D_i)$.*
2. *$\mathbf{\Phi}|_{\operatorname{Int} D_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Int} D_m}$ es inyectiva y regular.*
3. *$\mathbf{\Phi}(\operatorname{Int} D_i) \cap \mathbf{\Phi}(\partial D_i) = \varnothing$ para todo i.*
4. *$\mathbf{\Phi}(\operatorname{Int} D_i) \cap \mathbf{\Phi}(D_j) = \varnothing$ siempre que $i \neq j$.*

Cualquier función que cumpla estas condiciones se denomina una ***parametrización*** *de la superficie Σ.*

84. Insistamos en algo que ya hemos comentado en la introducción a este capítulo: las definiciones de *superficie* pueden diferir en ciertos detalles según el texto que manejemos. Cuando consultemos un libro nuevo será muy conveniente asegurarnos en primer lugar de la definición de superficie que en él se utiliza. ([124])

La condición 4. obliga a que las regiones simples no se solapen, es decir, a que $\operatorname{Int} D_i \cap \operatorname{Int} D_j = \varnothing$ siempre que $i \neq j$.

La condición

1. Para cada $i = 1, \ldots, m$, $\mathbf{\Phi}|_{D_i} \in \mathscr{C}^1(D_i)$.

puede sustituirse por

1′. $\mathbf{\Phi} \in \mathscr{C}^1(D)$.

En efecto, aunque 1′ es más fuerte que 1, si en la definición 3.10 se pone 1′ en lugar de 1, el concepto de superficie no cambia. Ver una demostración en el apartado (K.13).

85. No estamos diciendo que 1 sea equivalente a 1′, sino que la existencia de una parametrización con las condiciones 1, 2, 3, 4 es equivalente a la existencia de una parametrización con las condiciones 1′, 2, 3, 4.

86. Recordar que desde la sección 2.5, a nuestras regiones simples del plano les exigimos la condición de que su borde sea una curva cerrada simple (observación 65).

La esfera, el cono, el cilindro y demás conjuntos de los ejemplos 3.1 a 3.6 cumplen estas condiciones ([125]), así como otras *superficies* de frecuente aparición en las aplicaciones.

Cuando tratemos con parametrizaciones cuyo dominio no sea una región simple ($m > 1$ en la definición 3.10), al hablar de rectas normales y planos tangentes nos referiremos únicamente a valores de los parámetros que pertenezcan a $\operatorname{Int} D_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Int} D_m$, salvo indicación en contrario. El motivo es que la definición 3.10 admite que $\partial D_i \cap \partial D_j \neq \varnothing$ con $i \neq j$, por lo que para las imágenes de esos puntos los conceptos de recta normal y plano tangente podrían no estar bien definidos.

87. Una definición como la 3.10 que se limitara al caso $m = 1$ podría no incluir a la superficie de un paralelepípedo, ni a otras muchas figuras que tengan distintas "caras" y para su descripción se requiera usar ecuaciones distintas.

En algunos textos las superficies en las que $m = 1$ y además $\mathbf{\Phi}$ es inyectiva y suave sobre toda la región simple D se llaman **superficies elementales** o también **superficies simples regulares** ([2], definición 8.1.1).

---

[124] Para generalizar el concepto de *superficie* contenida en $\mathbb{R}^3$ a *variedades diferenciables* contenidas en espacios de cualquier dimensión, nuestra definición requerirá cambios sustanciales.

[125] En el caso del cono hay que limitar el dominio de parámetros de manera que sea una región simple o una unión finita de regiones simples.

Ejemplo 3.11 La unión de dos trozos de planos que se cortan, definida por $xy = 0$, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$, también es una superficie según nuestra definición.

La observación 84 es pertinente aquí: este conjunto no sería es variedad diferencial de dimensión 2; y en algunos textos elementales tampoco encajaría en la definición de superficie. ■

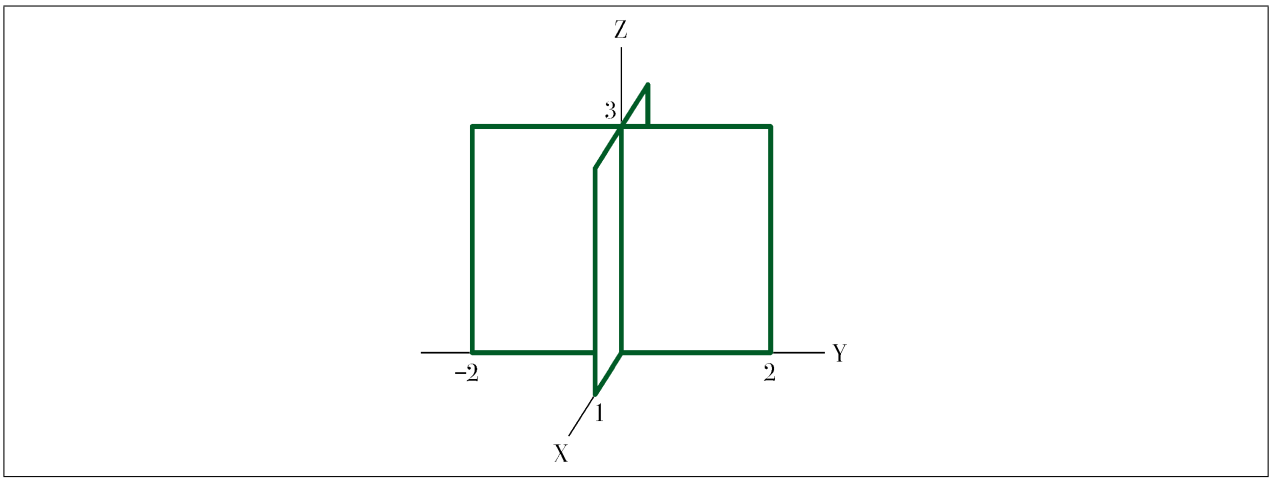


Figura 3.11: Superficie contenida en $xy = 0$

Ahora que disponemos de una definición precisa de superficie es el momento de replantearnos los conceptos de recta normal y de plano tangente, en particular necesitamos comprobar que están bien definidos, igual que ocurrió en otros conceptos de este mismo curso (repasar la observación 74). Aquí habrá que garantizar que las definiciones dadas no dependen de la parametrización utilizada, sino solamente de la superficie y del punto en cuestión. Lo que sí que depende de la parametrización utilizada es tanto la magnitud como el sentido del vector normal en un punto. Todas estas afirmaciones se deducen de la fórmula del siguiente teorema, que garantiza que un vector normal se puede obtener de otro vector normal multiplicándolo por un escalar:

Teorema 3.12 *Si $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$ son regiones simples y $\boldsymbol{\Phi_1} : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{\Phi_2} : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son dos parametrizaciones con la misma imagen, con la condición adicional de que ambas son inyectivas y regulares sobre todo su dominio* ([126]), entonces para cada punto $(u, v) \in D_2$,

$$\boldsymbol{n_2}(u, v) = \det J\boldsymbol{h}(u, v)\, \boldsymbol{n_1}(\boldsymbol{h}(u, v))$$

donde $\boldsymbol{h}$ es el cambio de parámetros, es decir, una función $D_2 \longrightarrow D_1$ biyectiva y regular (con jacobiano no nulo) para la que $\boldsymbol{\Phi_2} = \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{\Phi_1}$.

★ La parte más complicada de la demostración es la construcción de $\boldsymbol{h}$ y la demostración de sus propiedades (cf. [2], teorema 8.1.10). Una vez hecho todo eso, la fórmula se deduce de la regla de la cadena (con algo de trabajo, ver por ejemplo [2], teorema 8.2.7).

[126] Lo que en algunos libros se llama *superficies simples regulares*, como hemos indicado tras la definición 3.10.

3.2 INTEGRAL DE UN CAMPO ESCALAR SOBRE UNA SUPERFICIE

Las integrales de campos escalares sobre superficies nacen para resolver cuestiones muy similares a las que resuelven las integrales de campos escalares sobre curvas: definir y calcular masas, temperaturas medias, etc. Para su definición introduciremos un coeficiente multiplicador asociado a la parametrización, que a escala infinitesimal mida de modo aproximado la relación entre el área de un rectángulo en el dominio de parámetros y el área de su imagen una vez aplicada la deformación de la representación paramétrica.

No podremos obtener, sin embargo, un resultado análogo al teorema 1.5, donde se probó que la longitud de un camino es el límite de las longitudes de poligonales inscritas en el camino. Un paso al límite de este tipo es más complejo de lo que parece a primera vista, ya que incluso para una superficie tan sencilla como un cilindro, el área de un poliedro que la aproxime no siempre aproxima el valor del área del cilindro, como demostró Hermann Schwarz en 1881 (ver "Acordeón de Schwarz", antes del Prólogo).

★ **88**. Para asegurarnos de que un poliedro inscrito en una superficie nos sirve para aproximar el área de la superficie, hay que imponer además otras condiciones adicionales sobre los poliedros.

Ejemplo 3.13 Puesto que una aproximación a través de triangulaciones de la superficie puede no funcionar, intentamos una aproximación diferente, comenzando con el área de la gráfica de una función $z = g(x, y)$

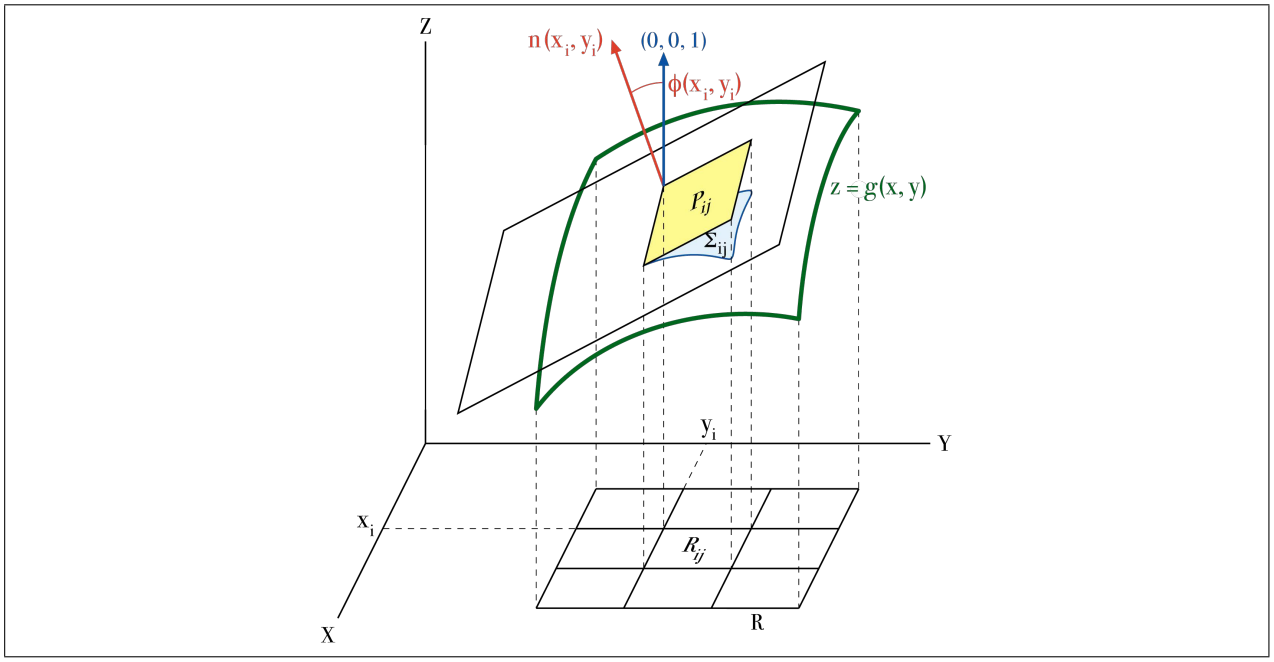


Figura 3.12: El paralelogramo amarillo P_{ij} es la parte del plano tangente a la superficie que se proyecta sobre R_{ij}. El ángulo $\varphi(x_i, y_j)$ que forma la normal $\boldsymbol{n}(x_i, y_j)$ con la vertical es el mismo que el que forman el plano tangente y el plano $z = 0$

definida sobre un rectángulo R (una superficie en forma explícita). Aproximamos el área haciendo una partición infinitesimal sobre R que lo divida en rectángulos R_{ij} y calculando la suma de las áreas de cada uno de los paralelogramos P_{ij} que sean tangentes a la superficie en el punto $(x_i, y_j, g(x_i, y_j))$ y cuya proyección sea R_{ij} (una especie de escamas infinitesimales que recubren toda la superficie). Dada la proximidad a escala infinitesimal entre el plano tangente y la propia superficie, sumaremos las áreas de los paralelogramos infinitesimales P_{ij} y llamaremos área de la superficie a la parte estándar (para una definición de la parte estándar ver el apartado (C.2)) de la suma.

Al ser R_{ij} la proyección de P_{ij}, su área es igual al área del paralelogramo multiplicada por el coseno del ángulo $\varphi(x_i, y_j)$ que forma su plano con el plano horizontal.

El **ángulo entre el plano horizontal $z = 0$ y el plano que contiene a P_{ij}** es el formado por los vectores normales a ambos, $(0,0,1)$ y $(-\partial g/\partial x, -\partial g/\partial y, 1)$, que es menor o igual que $\pi/2$ ([127]).

Al sumar todos estas áreas de los P_{ij} lo que se tendrá será, salvo un infinitésimo, la integral del inverso del mencionado coseno. En consecuencia, el coeficiente local de dilatación en el punto (x, y) es precisamente $\dfrac{1}{\cos\varphi(x,y)}$.

Otro razonamiento que nos es útil aquí, y que es válido no sólo para una superficie en forma explícita sino para cualquier tipo de parametrización, es el siguiente. El área del paralelogramo P_{ij} es la longitud del producto vectorial de sus lados, como vimos en la observación 55, pero estos lados son $dx\dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x}(x_i, y_j)$ y $dy\dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial y}(x_i, y_j)$, luego el área del paralelogramo es

$$A(P_{ij}) = \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial y} \right)(x_i, y_j) \right\| |dx|\,|dy| = \|\boldsymbol{n}(x_i, y_j)\| A(R_{ij}).$$

En consecuencia, el coeficiente local de dilatación coincide con la longitud del vector normal en cada punto, $\|\boldsymbol{n}(x, y)\|$.

¿Cuál es la relación entre estos coeficientes, obtenidos de diferentes maneras? Son el mismo, como comprobamos con el siguiente cálculo ([128]):

$$\|\boldsymbol{n}(x_i, y_j)\| \cos\varphi(x_i, y_j) = \boldsymbol{n}(x_i, y_j) \cdot (0,0,1) = 1,$$

donde la última igualdad se sigue del ejemplo 3.6, luego

$$\frac{1}{\cos\varphi(x_i, y_j)} = \|\boldsymbol{n}(x_i, y_j)\|. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 3.14 Si ahora consideramos una superficie Σ definida por la parametrización $\mathbf{\Phi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (no necesariamente en forma explícita), un razonamiento análogo al segundo que hemos hecho en el ejemplo anterior, introduciendo una partición en rectángulos infinitesimales (ver la figura 3.13), sugiere que el área de Σ sea también la integral sobre D de la longitud del vector normal, así como que la integral de un campo escalar cualquiera se defina como la integral a través de la representación paramétrica y el coeficiente dado por la longitud del vector normal. $\blacksquare$

Definición 3.15 *(Notaciones como en la definición 3.10.) El* ***área de la superficie $\Sigma = \mathbf{\Phi}(D)$*** *es*

$$A(\Sigma) = \iint_D \|\boldsymbol{n}_{\mathbf{\Phi}}(u, v)\|\, du\, dv.$$

Definición 3.16 *Sean $\Sigma = \mathbf{\Phi}(D)$ una superficie (notaciones como en la definición 3.10), y $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar, definida y continua sobre Σ. La* ***integral de f sobre Σ*** *es*

$$\iint_\Sigma f\, d\sigma = \iint_D (f \circ \mathbf{\Phi})\, \|\boldsymbol{n}_{\mathbf{\Phi}}\| = \iint_D f(\mathbf{\Phi}(u, v))\, \|\boldsymbol{n}_{\mathbf{\Phi}}(u, v)\|\, du\, dv.$$

---

[127] De acuerdo con la observación 73 y el ejemplo 2.53, ese ángulo es

$$\varphi(x_i, y_j) = \arccos \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_i, y_j)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_i, y_j)\right)^2 + 1}}.$$

Luego $\varphi(x_i, y_j) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dado que la raíz cuadrada es positiva (ver la figura B.7).

[128] Para este cálculo elegimos los parámetros en el orden habitual, (x, y), y no en el (y, x) (ver la observación 80). Podríamos haberlo hecho al revés, pero entonces multiplicaríamos escalarmente por el vector unitario $(0, 0, -1)$, para que el coseno siguiera siendo positivo.

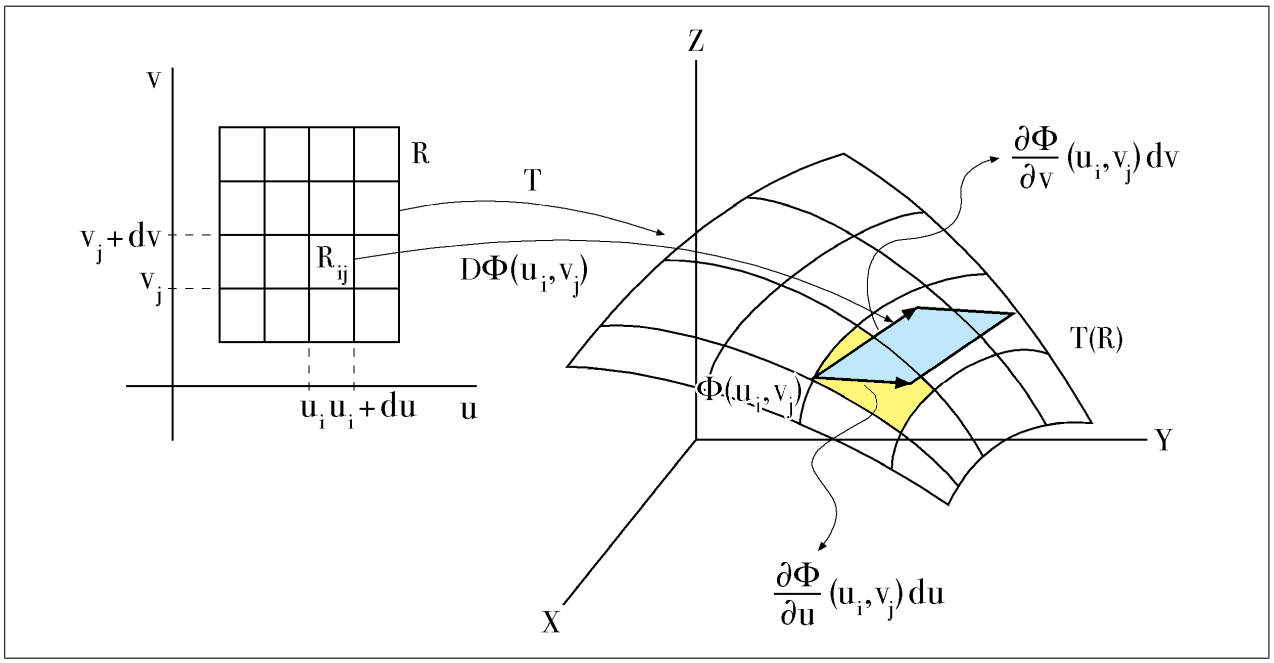


Figura 3.13: El paralelogramo azul viene definido por los vectores $du\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u_i,v_j)$ y $dv\frac{\partial\Phi}{\partial v}(u_i,v_j)$. Está contenido en el plano tangente

89. Para asegurarnos de que es correcta esta definición (y, en consecuencia, también la anterior) hay que comprobar que la integral del miembro de la derecha siempre existe y que solamente depende de la superficie y de la función, pero no de la parametrización.

La integral siempre existe por aplicación de los teoremas 2.21 y 2.22 y del corolario 2.31, ya que el integrando es continuo sobre cada una de las regiones simples D_i y éstas no se solapan. Más complicado resulta comprobar que la definición es independiente de la parametrización. Para una demostración (parcial) de esto último, que utiliza los teoremas 2.35 y 3.12, consultar el apartado (K.14).

Lo que sí resulta inmediato es que $A(\Sigma) = \iint_\Sigma d\sigma$. Tampoco es difícil ver que la integral sobre una superficie puede descomponerse en la suma de las integrales sobre sus "caras":

Teorema 3.17 *Sea $\Sigma = \Phi(D_1) \cup \cdots \cup \Phi(D_m)$ una superficie (notaciones como en la definición 3.10), y $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo sobre ella. Entonces*

$$\iint_\Sigma f\,d\sigma = \sum_{i=1}^{m} \iint_{\Phi(D_i)} f\,d\sigma$$

DEMOSTRACIÓN: *No hay más que aplicar la propiedad aditiva del corolario 2.31.*

90. Este resultado es el análogo para superficies de la propiedad aditiva de las integrales de campos escalares sobre una suma de caminos.

El siguiente caso particular nos ha servido de introducción:

Teorema 3.18 *Sea Σ una superficie definida en forma explícita por $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$ (cf. ejemplo 3.6), y f un campo escalar continuo sobre Σ. Entonces*

$$\iint_\Sigma f\,d\sigma = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \iint_D \frac{f(x,y,g(x,y))}{|\cos\varphi(x,y)|}\,dx\,dy,$$

donde φ es el ángulo ([129]) *que forma la recta normal a la superficie con el eje de las Z.*

DEMOSTRACIÓN: (PARCIAL) *La primera igualdad se obtiene inmediatamente de la definición 3.16 y del ejemplo 3.13. Este ejemplo contiene también una justificación de la segunda igualdad.*

Bajo ciertas condiciones, la integral de un campo escalar positivo también puede calcularse con la misma fórmula aunque la integral resultante sea impropia, concretamente:

Teorema 3.19 *Supóngase que se quiere calcular la integral de una función continua y positiva* ([130]) *f sobre una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ y que se tiene una descripción de la superficie como gráfica de una función, $z = g(x, y)$, que no cumple todas las condiciones de la definición explícita de superficies, pero sí las que se describen en el ejemplo 3.8 (cuyas notaciones seguimos en este enunciado).*

1. *Cuando el producto de f por la longitud del vector normal en cada punto de* $\operatorname{Int} D$,

$$f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2},$$

sea una función acotada sobre $\operatorname{Int} D$, *(a pesar de que la longitud del vector normal,* $\left[1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}$, *no esté acotada), entonces*

$$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_{D} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy,$$

donde el miembro de la derecha existe como integral de Riemann ([131]).

2. *En caso de que el producto de f por la longitud del vector normal en cada punto de* $\operatorname{Int} D$,

$$f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2},$$

sea una función no acotada sobre $\operatorname{Int} D$, *entonces*

$$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_{D} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy.$$

donde la última integral es impropia y convergente, en el sentido descrito en la definición 2.51.

★ DEMOSTRACIÓN: *Puede probarse utilizando otros conceptos de integral que tengan mejor comportamiento que la de Riemann en los pasos al límite, como la integral de Lebesgue o la integral de Kurzweil-Henstock.*

Terminamos esta sección con algunos ejemplos de superficies de revolución.

Ejemplo 3.20 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con continuidad y con un conjunto finito (eventualmente vacío) de raíces. Formalizamos la idea intuitiva de superficie de revolución generada al girar la gráfica de f alrededor del eje X de la siguiente manera. Un punto de la superficie de revolución se caracteriza porque pertenece a una circunferencia que tiene el centro en el intervalo $[a, b]$ del eje X, está situada en un plano perpendicular al eje X (y por tanto paralelo al plano YZ) y cuyo radio es igual al valor absoluto de f en el centro.

Por consiguiente, los puntos (x, y, z) de tal superficie han de ser los que cumplan estas dos condiciones:

---

[129] Dos rectas que se cortan forman dos ángulos, según las semirrectas que elijamos (ver la observación 73). Podremos quitar el valor absoluto del coseno en la última integral cuando tomemos φ menor o igual que $\pi/2$, cosa que siempre es posible, ver la nota al pie de página nº 127).

[130] Aquí es válido todo lo que se dijo en la observación 71.

[131] Estrictamente hablando, para poder escribir la integral de Riemann sobre D de una función que no está definida sobre todo D (en este caso hay alguna derivada que no está definida en algunos puntos de la frontera ∂D), previamente hay que ampliar el integrando a todo D, cosa que aquí podemos hacer definiéndolo como nulo en todos los puntos de ∂D.
También valen para estas integrales unas consideraciones análogas a las que hicimos en la observación 70.

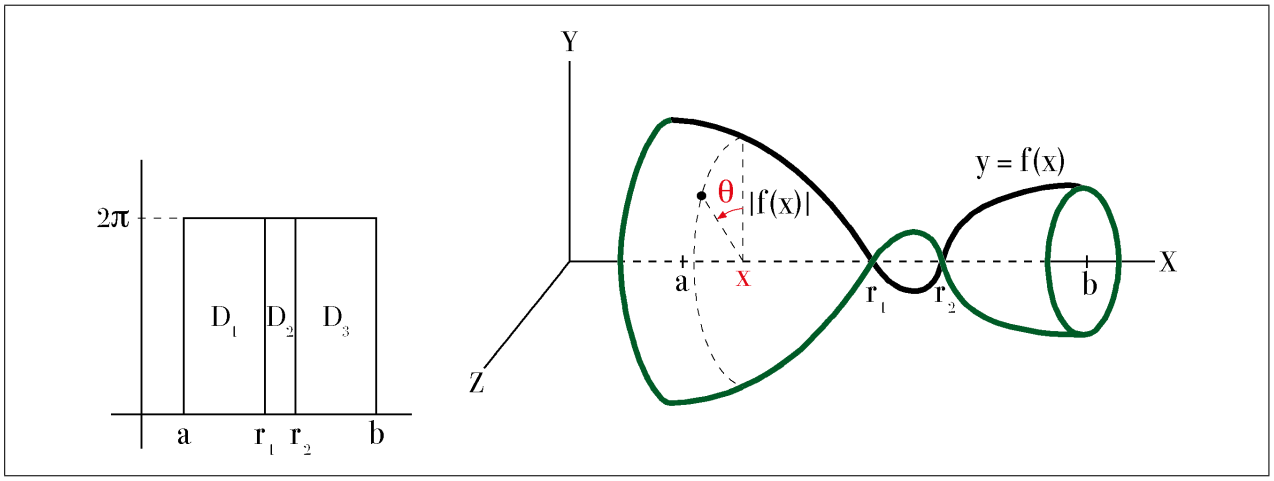


Figura 3.14: Superficie de revolución Σ obtenida al girar la gráfica de $y = f(x)$ (en negro) alrededor del eje X. Los parámetros que determinan cada punto de la superficie son la abscisa x y el ángulo θ

- $x \in [a, b]$,
- $y^2 + z^2 = f(x)^2$.

La **superficie de revolución generada al girar la gráfica de f alrededor del eje X** es el conjunto

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x \in [a, b],\ y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

Para parametrizarla pensaremos que primero nos situamos a la altura de la coordenada x (con lo que elegimos precisamente a x como primer parámetro) y después nos fijaremos en el ángulo de rotación $\theta \in [0, 2\pi]$ a partir del punto inicial $(x, f(x), 0)$, ver la figura 3.14.

El conjunto Σ es efectivamente una superficie, con parametrización

$$D = [a, b] \times [0, 2\pi], \qquad \mathbf{\Phi}(x, \theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta).$$

Para comprobar que es una superficie distinguiremos dos casos. Si f no se anula nunca en el intervalo abierto (a, b), entonces Σ responde a la definición 3.10 sin más que tomar $m = 1$. En efecto, $\mathbf{\Phi}$ es inyectiva sobre el interior de D, $\operatorname{Int} D = (a, b) \times (0, 2\pi)$, y como la matriz jacobiana es

$$J\mathbf{\Phi}(x, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(x)\cos\theta & -f(x)\sin\theta \\ f'(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \end{pmatrix},$$

resulta que tiene siempre rango 2 en los puntos de $(a, b) \times (0, 2\pi)$, porque dos de los determinantes 2×2 valen $-f(x)\sin\theta$ y $f(x)\cos\theta$, que no pueden ser nulos a la vez.

En caso de que f tenga m (≥ 1) raíces dentro de (a, b), $r_1 < \ldots < r_m$, descomponemos D en la unión de las $m + 1$ regiones simples $D_i = [r_{i-1}, r_i] \times [0, 2\pi]$, $i = 1, \ldots, m + 1$ (donde $r_0 = a$, $r_{m+1} = b$) y aplicamos a cada una de ellas el razonamiento anterior. ■

Teorema 3.21 *Sea C la gráfica de una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase $\mathscr{C}^1$, Y sea Σ la superficie de revolución obtenida al girar C alrededor del eje X (ver el ejemplo 3.20). Entonces*

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_C 2\pi |f(x)|\, ds$$

(el último miembro es la integral a lo largo de la gráfica de la longitud de la circunferencia generada por cada punto suyo).

DEMOSTRACIÓN: *La parametrización introducida en 3.20 proporciona el siguiente cálculo:*

$$\|\boldsymbol{n}_{\mathbf{\Phi}}(x, \theta)\| = \|\big(f(x)f'(x), -f(x)\cos\theta, -f(x)\sin\theta\big)\| = |f(x)|\sqrt{f'(x)^2 + 1}.$$

Por otra parte, la gráfica de f admite la parametrización $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{c}(x) = (x, f(x))$, luego $\|\boldsymbol{c}'(t)\| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$. Las fórmulas son ahora inmediatas.

91. El área de la superficie de revolución se obtiene con la misma fórmula que si calculásemos la masa de la gráfica de f suponiendo que cada punto de la gráfica contribuye a la masa con una densidad igual a la longitud de la circunferencia de revolución que pasa por ese punto.

La última observación es aplicable a otras fórmulas del cálculo integral. Una muestra es el ejemplo F.3, que transforma el cálculo del área de una superficie vertical en el de la masa de una curva cuya densidad en cada punto fuese igual a la altura de la superficie sobre ese punto.

Otras aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes pueden consultarse en el anexo F.

92. Hay que insistir en que en este curso utilizamos las áreas y los volúmenes como motivación y fuente de ejemplos para nuestras integrales, pero las integrales no solamente tratan con problemas geométricos. Son una abstracción, una generalización de la suma, que surge en los más variados campos de aplicación de las matemáticas, sin que haya que buscar siempre un área o un volumen.

3.3 INTEGRAL DE UN CAMPO VECTORIAL SOBRE UNA SUPERFICIE ORIENTADA

3.3.1. Integral de un campo vectorial sobre una parametrización

La explicación de la próxima definición hay que buscarla, como en las demás integrales introducidas en este curso, en lo que se pretende modelizar. Si $\boldsymbol{F}$ es el campo de velocidades de un fluido en una cierta región del espacio y $\boldsymbol{\Phi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametriza la superficie de una membrana sumergida en el fluido, la cantidad de fluido que atraviesa la membrana por unidad de tiempo (el **flujo** a través de la membrana) la definimos como la integral sobre la parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ de la proyección de $\boldsymbol{F}$ en la dirección de la normal a la membrana, puesto que alrededor de cada uno de los puntos de la membrana, de la velocidad que lleva el fluido solamente nos interesa la componente ortogonal a la superficie, ya que las otras componentes serán

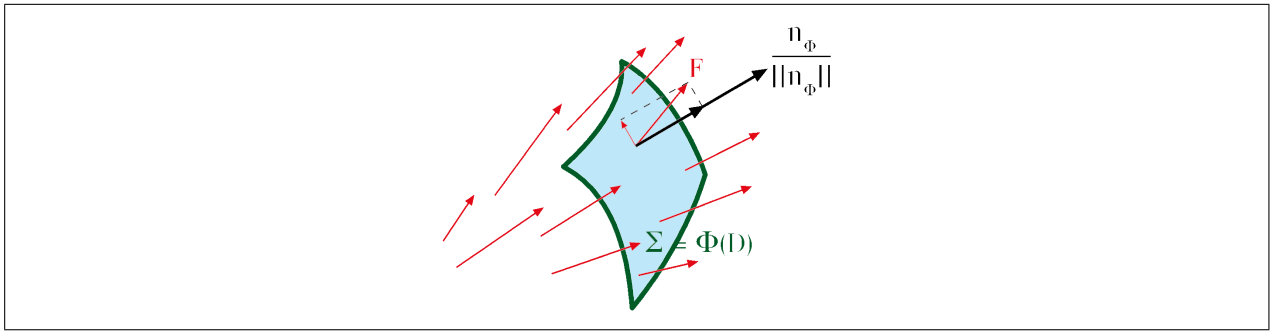


Figura 3.15: Membrana $\Sigma = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{D})$ atravesada por un fluido cuyo campo de velocidades es $\boldsymbol{F}$

tangenciales y no computarán a la hora de calcular el fluido que la atraviesa:

$$\iint_{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}}{\|\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}\|}\, d\sigma$$

(en la integral del miembro derecho estamos suponiendo que el vector normal nunca es nulo, es decir, que el rango de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{\Phi}$ es en todos los puntos igual a 2). De acuerdo con la definición 3.16, la integral de la derecha es igual a $\iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(u,v)) \cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(u,v)\, du\, dv$, para cuya formulación ya no se necesita que el vector normal sea no nulo, por lo que optamos por tomar esta última fórmula como definición.

Definición 3.22 *Sea $\boldsymbol{\Phi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización como las utilizadas en la definición 3.10. Sea además $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{\Phi}(D) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo sobre la imagen de $\boldsymbol{\Phi}$. Llamamos* ***integral del campo F sobre la parametrización Φ*** *a*

$$\iint_{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{D} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(u,v)) \cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(u,v)\, du\, dv.$$

Como todas las derivadas parciales de $\boldsymbol{\Phi}$ son continuas, el integrando del miembro de la derecha es una función continua. En consecuencia, la integral siempre existe (mismo razonamiento que para la definición 3.16, de integral de un campo escalar sobre una superficie).

Para representaciones paramétricas que sean la definición explícita de una superficie, la fórmula de la integral se expresa a menudo de la siguiente forma:

Teorema 3.23 *Con las notaciones del ejemplo 3.6, si $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ es un campo vectorial continuo sobre*

la gráfica de g,

$$\iint_{\Phi} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} =$$

$$= \iint_{D} \left[-P(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - Q(x,y,g(x,y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + R(x,y,g(x,y)) \right] dx\, dy.$$

DEMOSTRACIÓN: *Es una aplicación directa de la definición 3.22 y de la fórmula para el vector normal obtenida en el ejemplo 3.6.*

93. Observar que no hemos definido la integral de un campo vectorial sobre una superficie, sino sobre una parametrización.

Para que nuestra definición fuera válida como integral sobre una superficie necesitaríamos comprobar que es independiente de la parametrización, como hemos indicado en otros casos ([132]). Pero es que aquí no es cierto (ver el teorema 3.30), la integral depende en realidad de orientación de la superficie, concepto que introducimos a continuación.

3.3.2. Orientación de superficies definidas en forma explícita

Para considerar integrales de campos vectoriales sobre una superficie, no sobre una parametrización, necesitaremos incorporar a la superficie una orientación. En las curvas teníamos el "sentido de recorrido" como guía intuitiva para la orientación. Una superficie, en cambio, no tiene sentidos de recorrido que identifiquen la orientación. Volviendo al comienzo del apartado 3.3.1, si $\boldsymbol{F}$ es un campo de velocidades y Σ una membrana, lo que nos interesa es distinguir los resultados que nos dará la integral del campo sobre una superficie según en qué sentido la atraviese, así que esa distinción se basará ahora no en la manera de recorrer la superficie, sino en la manera de cruzarla. Asignaremos un "sentido de cruce" a base de seleccionar un sentido del vector normal.

En principio puede parecer una misión sencilla. En los puntos en los que el vector normal sea no nulo podemos elegir entre los dos vectores normales unitarios (que llamaremos **normales unitarias**), que nos proporcionan los dos sentidos de cruce. Ahora bien, esta elección hemos de hacerla de manera coherente en toda la superficie, no vale que la selección la hagamos de cualquier manera. Para nuestro modelo queremos que en puntos infinitamente próximos de la superficie el cruce se haga en el mismo sentido, por lo que las normales unitarias que seleccionemos también habrán de estar infinitamente próximas.

94. La selección que hagamos de la normal unitaria tiene que ser continua.

Para superficies definidas explícitamente, con una variable despejada en función de las otras dos, este criterio necesario es suficiente para nuestro propósito. Para otras superficies no lo será, como explicaremos en el apartado 3.3.3.

Supóngase que Σ es una superficie que viene dada en forma explícita con la tercera variable despejada en función de las otras dos, $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$, donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región simple bidimensional y g es de clase $\mathscr{C}^1$. Sobre cada punto $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0, g(x_0,y_0)) \in \Sigma$ hay definida una normal unitaria

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 + 1}} \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0), 1 \right)$$

que es función continua de las coordenadas del punto $\boldsymbol{p}$. Como consecuencia, sobre toda Σ se puede construir una normal unitaria continua $\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de dos maneras: eligiendo siempre $\boldsymbol{N}$ (que se distingue de su opuesta porque tiene la tercera componente positiva, diremos que **apunta hacia arriba**) sobre cada punto, o eligiendo $-\boldsymbol{N}$ sobre todos y cada uno de los puntos.

Además, y esto es importante, sólo de estas dos maneras se puede construir una normal unitaria continua sobre toda Σ:

[132] Por ejemplo, con la definición 3.16.

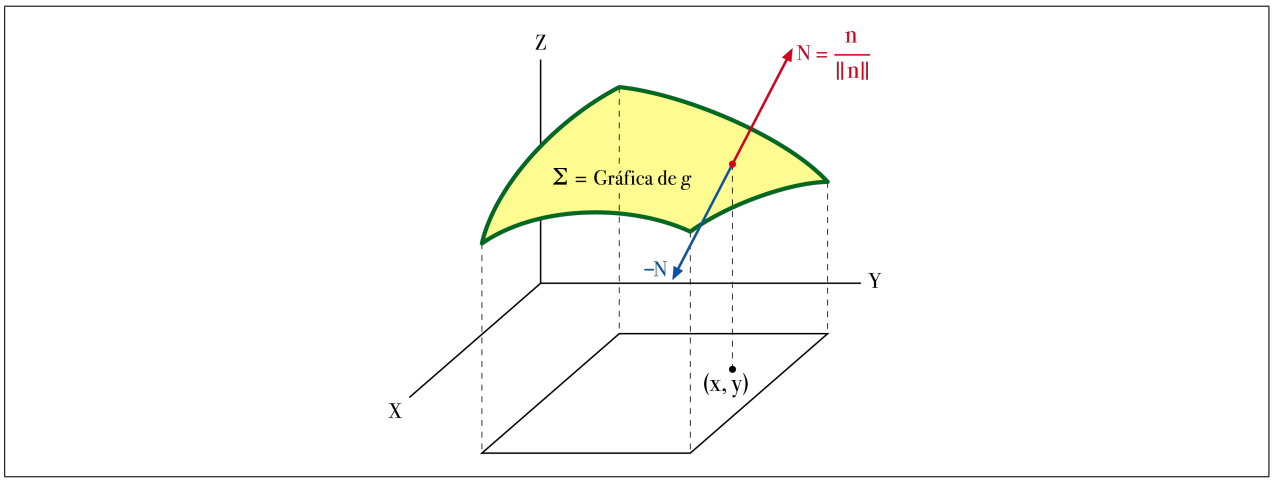


Figura 3.16: Las dos normales unitarias en cada punto de Σ

Teorema 3.24 *Si $\boldsymbol{N_0} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo que a cada punto de Σ asocia un vector unitario y normal a Σ (es decir, perpendicular al plano tangente a Σ) en el punto, entonces o bien $\boldsymbol{N_0} = \boldsymbol{N}$, o bien $\boldsymbol{N_0} = -\boldsymbol{N}$. (Notaciones como en los párrafos anteriores.)*

DEMOSTRACIÓN: ([133])

Definición 3.25 *Cuando sobre la superficie definida explícitamente por la z despejada seleccionemos como normal unitaria precisamente la función $\boldsymbol{N}$, diremos que tenemos la superficie* ***orientada positivamente (respecto del eje Z)****, y la denotaremos por Σ^+, y cuando seleccionemos sobre cada punto de la superficie la normal $-\boldsymbol{N}$, pondremos Σ^- y diremos que la superficie Σ la tenemos* ***orientada negativamente (respecto del eje Z)****.*

Todo lo dicho para la coordenada z vale para cualquiera de las otras dos coordenadas cuando la superficie se exprese con una de ellas despejada.

95. Es la segunda vez que decidimos reservar el símbolo $+$ para una orientación determinada. Lo hicimos para algunas orientaciones de curvas (en relación con el teorema de Green-Riemann) y lo haremos más adelante con otras orientaciones de superficies (en relación con el teorema de la Divergencia).

Obsérvese que este concepto de orientación positiva está asociado a una descripción explícita de la superficie, y por tanto depende de cuál de las variables es la despejada ([134]).

3.3.3. Orientación de superficies generales

Cuando pasamos a superficies que no estén descritas de manera explícita, la cuestión de disponer de una normal unitaria continua que nos sirva para diferenciar los dos lados de la superficie y con ello los dos sentidos de cruce se complica extraordinariamente, en especial cuando la superficie tiene aristas. Comenzaremos comentando algunos casos concretos para después dar un enfoque más general.

---

[133] Es obvio que, *en cada punto* $(x, y, g(x, y))$ o bien se tiene $\boldsymbol{N_0}(x, y, g(x, y)) = \boldsymbol{N}(x, y, g(x, y))$, o bien se tiene $\boldsymbol{N_0}(x, y, g(x, y)) = -\boldsymbol{N}(x, y, g(x, y))$. Lo que el enunciado asegura es que el signo de estas igualdades es el mismo en todos los puntos, cosa que no es ni mucho menos evidente. Para demostrar la tesis observemos que la función $D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por el producto escalar de $\boldsymbol{N_0}$ por $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N_0}(x, y, g(x, y)) \cdot \boldsymbol{N}(x, y, g(x, y))$ es continua y toma solamente los valores $+1$ y -1, luego tiene que ser constante (arguméntese como en la demostración del caso $n = 2$ del teorema del valor medio para integrales, 2.32, ver el apartado (K.6), observación 133).

[134] Por ejemplo, la superficie plana $\Sigma = \{(x, y, z) : y = z,\ 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ estaría orientada positivamente respecto del eje Z mediante la normal unitaria constante $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Pero si en la definición de Σ consideramos la y despejada, en lugar de la z, la orientación positiva respecto al eje Y vendrá dada por la normal $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

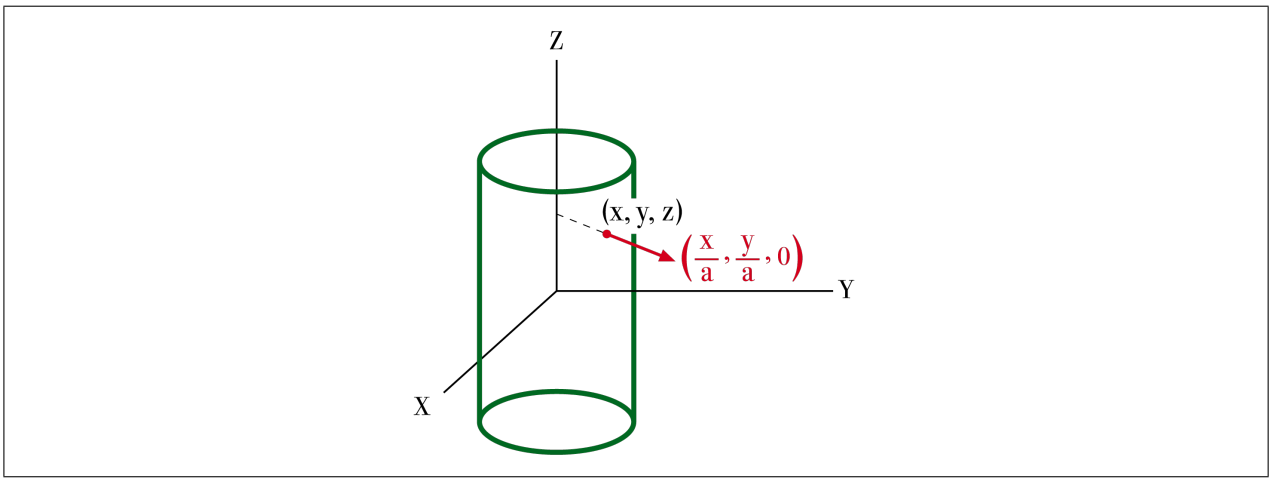


Figura 3.17: Normal unitaria en cada punto que siempre va desde dentro hacia fuera del cilindro

Para el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $|z| \leq h$ del ejemplo 3.3 el vector normal en el punto (x, y, z) es $(x, y, 0)$, lo que proporciona un vector normal unitario sobre todo el cilindro que es función continua de (x, y, z), mediante la expresión $(x/a, y/a, 0)$ (por cierto, independiente de z, como nos sugiere la intuición: la normal unitaria es la misma en toda la generatriz que contiene al punto). Esta normal nos vale para distinguir entre los dos posibles sentidos de cruce de la superficie cilíndrica.

Para la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (ejemplo 3.2), un vector normal en $\boldsymbol{p}$ es $2 \sin \varphi\, \boldsymbol{p}$, luego *siempre que pueda simplificarse* $\sin \varphi$ se obtiene una normal unitaria continua con $\boldsymbol{p}/2$. Una vez obtenida esta normal unitaria

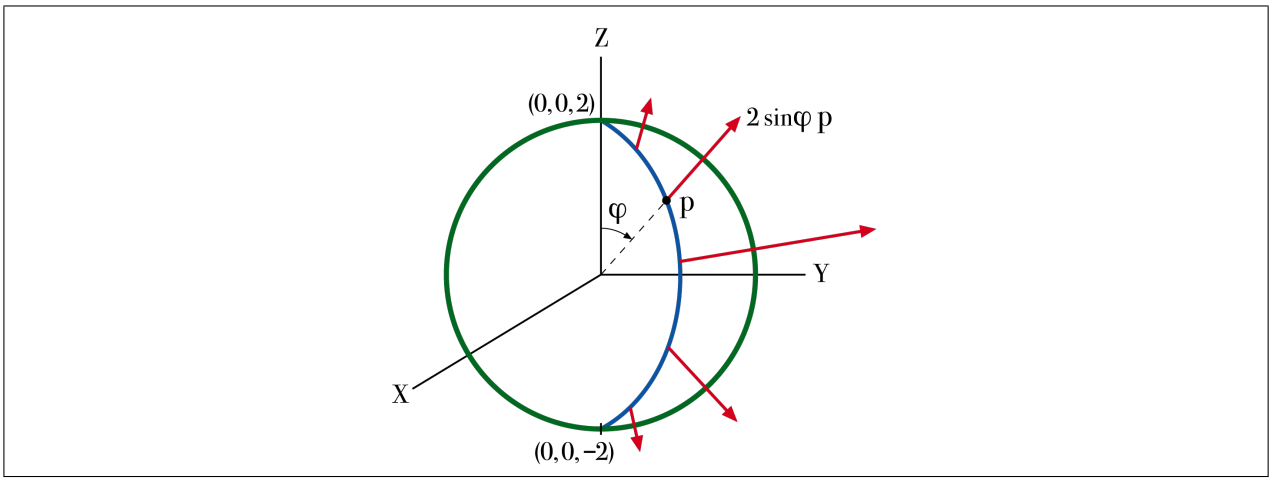


Figura 3.18: Vector normal (no unitario, en general) en puntos de un mismo meridiano, que siempre va desde dentro hacia fuera de la esfera. A medida que nos aproximamos a los puntos $(0, 0, 2)$ o $(0, 0, -2)$, la longitud del vector normal tiende a cero

sobre una parte de la esfera observamos que en los casos en los que no pueda hacerse esa simplificación, la expresión $\boldsymbol{p}/2$ también da una normal unitaria. Nuevamente, como en el caso del cilindro, tenemos una normal unitaria definida sobre toda la esfera y continua.

Para el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z \leq 0$ (ejemplo 3.1), se tiene una normal unitaria continua argumentando como en el caso de definición explícita, con la salvedad esperable de que hay un punto (el vértice) que carece de normal.

En estos ejemplos hemos podido solventar las dificultades que no eran intrínsecas a la superficie. Hemos podido construir *una normal unitaria continua* sobre todo el subconjunto de la superficie formado por sus **puntos regulares**, o sea, sobre los puntos de la superficie que son imagen mediante alguna parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ de $\operatorname{Int} D_i$ para algún i (sobre estos puntos, alguna parametrización tiene vector normal no nulo).

De esta manera hemos podido elaborar un tecnicismo que en las demostraciones nos servirá para distinguir lo que en lenguaje usual distinguimos con expresiones varias: *lado de dentro* y *lado de fuera* de la superficie,

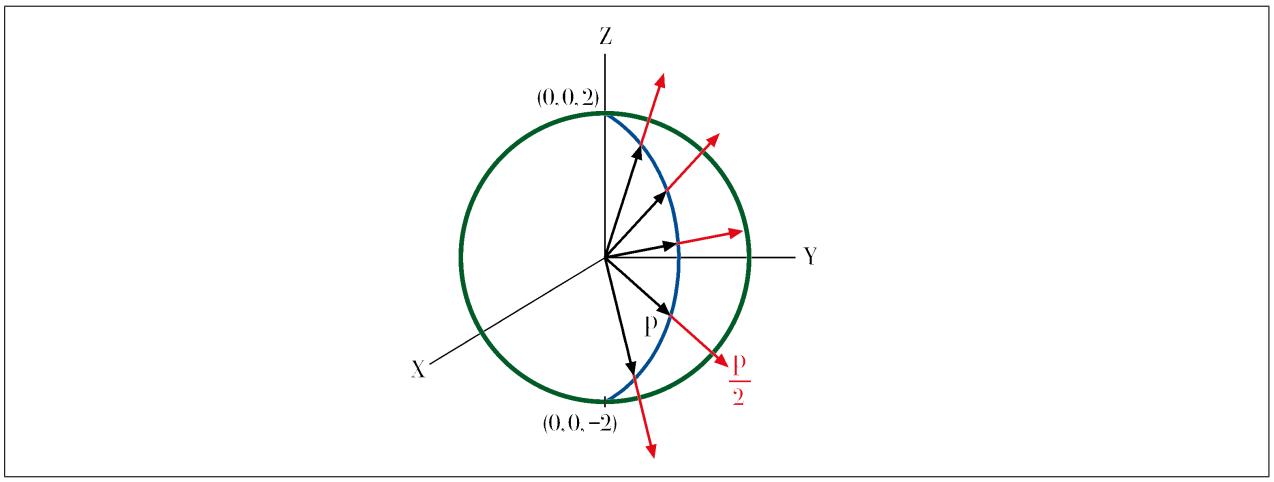


Figura 3.19: Normal unitaria en cada punto de la esfera, incluidos $(0, 0, 2)$ y $(0, 0, -2)$, que siempre va desde dentro hacia fuera de la esfera

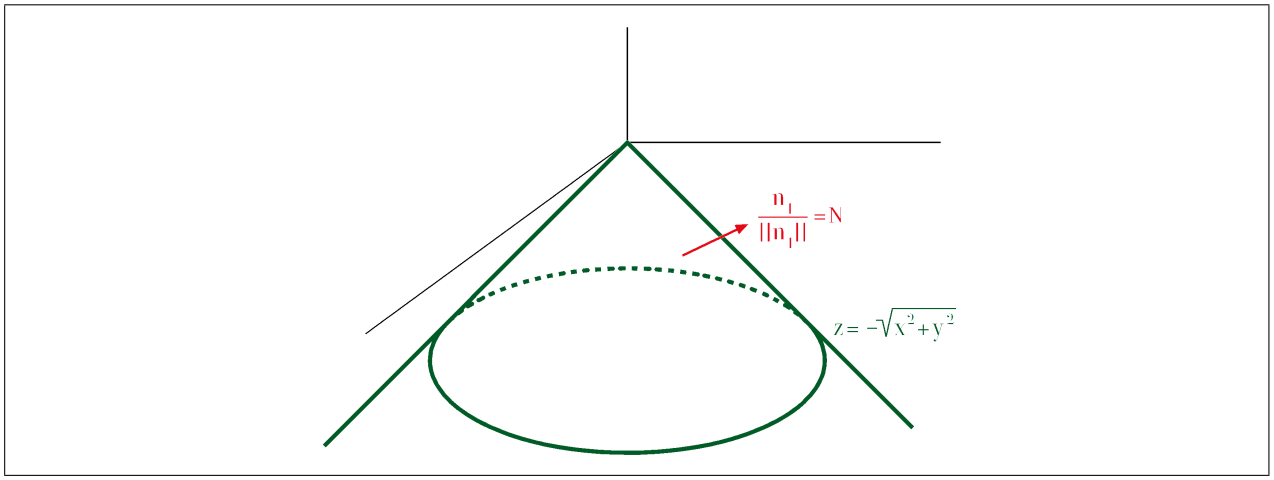


Figura 3.20: La normal unitaria $\boldsymbol{N}$ se obtiene a partir del vector normal $\frac{\boldsymbol{n_1}}{\|\boldsymbol{n_1}\|}$, ver ejemplo 3.1

dos *sentidos de cruce* de la superficie, etc.

Pero en el caso del cubo (ejemplo 3.5) o del cilindro con tapas (ejemplo 3.4), las pegas que plantean las aristas o las circunferencias, respectivamente, parecen insalvables. Para cada una de las seis caras del cubo se puede definir con facilidad una normal unitaria continua, incluso para los puntos de las aristas hay dos posibilidades, según de qué cara las consideremos. Y para los vértices hay tres posibilidades..., si bien lo sensato es no pretender elegir ninguna de ellas como normal a la superficie en esos puntos.

96. Dicho de otra forma, no es que no tengamos normales unitarias continuas definidas sobre toda la superficie del cubo menos los puntos de las aristas, sino que tenemos demasiadas.

Cuando estamos en una misma cara, el criterio para la elección en cada punto de una normal unitaria o de la otra es sencillo, el resultado de la elección ha de ser una función continua. Es la continuidad la que nos permite relacionar la normal unitaria en un punto con la normal en otros puntos de la misma cara.

Pero ¿cómo relacionamos la elección que hayamos hecho de la normal unitaria en una cara con la normal unitaria en otra cara contigua? Si queremos, como en los ejemplos anteriores, que la normal unitaria nos seleccione uno de los dos "lados" de la superficie (en este caso, el que queda dentro del cubo y el que queda fuera del cubo), ya no basta con imponer la condición de la continuidad, puesto que se trata de trozos disconexos de la superficie, una vez que sobre las aristas y los vértices hemos decidido no elegir ninguna normal. Tendremos que introducir algún mecanismo que nos permita ligar la elección hecha en una determinada cara con la elección en las caras vecinas con las que comparte aristas.

Para establecer la relación que buscamos entre orientaciones en las caras observamos que utilizando la "regla del sacacorchos" la normal unitaria en cada cara del cubo induce un sentido de giro en las aristas que

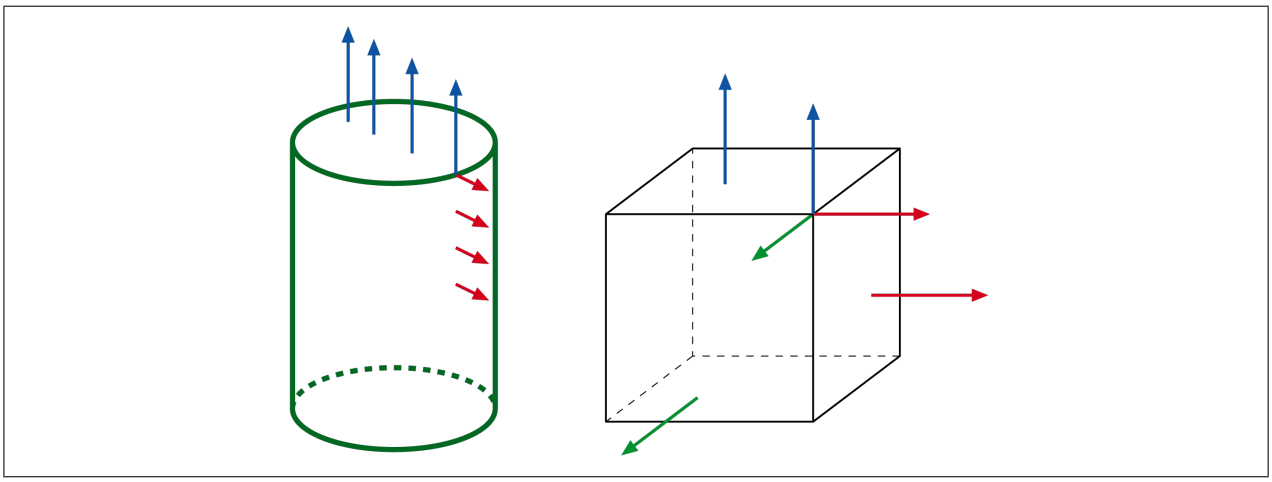


Figura 3.21: En un cilindro con tapas, para un punto que esté en la intersección de la superficie cilíndrica y una de las tapas podemos elegir dos normales unitarias que van hacia fuera del cilindro, la azul y la roja. En un cubo, para un vértice podemos elegir hasta tres

forman su borde. Y que las normales unitarias de dos caras contiguas que apunten las dos hacia fuera del cubo (o las dos hacia dentro), inducen sentidos de recorrido opuestos sobre la arista que comparten. Mientras

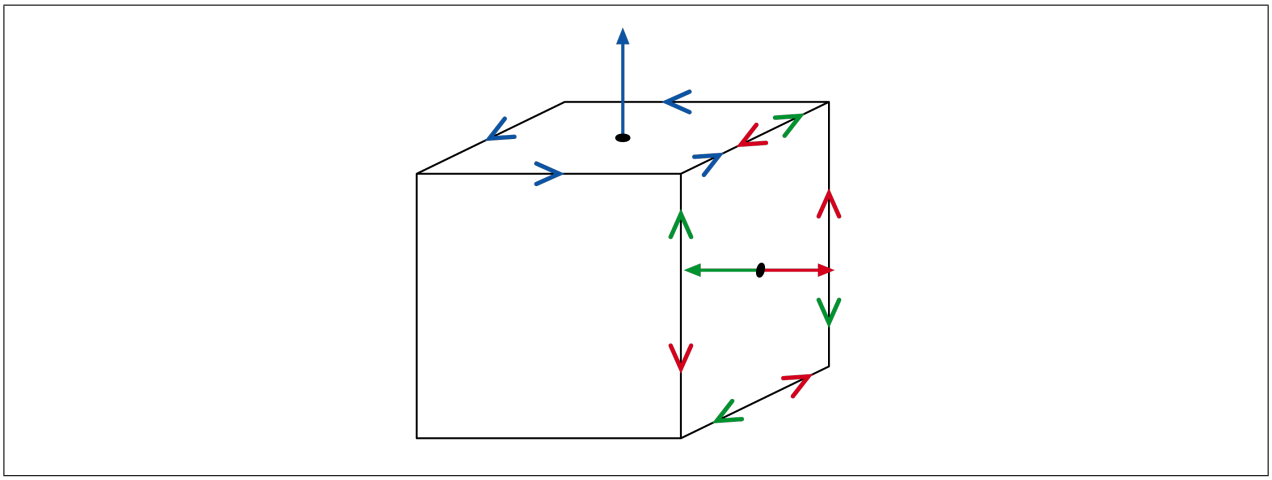


Figura 3.22: Dos caras de un cubo. En la cara superior, la orientación hacia fuera del cubo y la orientación inducida en su borde (flechas azules). En una cara contigua, la orientación hacia fuera, con la que induce en su borde (flechas rojas), y la orientación hacia dentro con la que induce en su borde (flechas verdes). Obsérvese lo que ocurre en la arista común a las dos caras

que en el caso de que la de una cara apunte hacia fuera y la de otra apunte hacia dentro, entonces sobre la arista común el sentido de recorrido inducido por cada cara es el mismo. Por consiguiente, para que las orientaciones de dos caras que comparten la misma arista sean compatibles (las dos hacia fuera del cubo o las dos hacia dentro del cubo), lo que tiene que ocurrir es que las orientaciones inducidas sobre la arista sean opuestas.

La principal dificultad para formalizar la anterior justificación es que la regla del sacacorchos (o del tornillo, o de la mano derecha, etc.) no es independiente del sistema de referencia en el que estemos, mientras que en el modelo matemático necesitamos expresarla de manera que se entienda y se aplique igual aunque no se tenga una referencia común ([135]). Recurriremos a la *orientación positiva* que introdujimos en la fórmula de Green-Riemann.

[135] Tuvimos ocasión de comentar el mismo inconveniente en la introducción al teorema de Green-Riemann; tampoco la regla del sacacorchos la podríamos explicar a unos seres inteligentes residentes en un lugar del universo con el que no tuviéramos ninguna referencia común.

Expresaremos lo anterior en términos de las parametrizaciones de la siguiente manera ([136]). Empezaremos por llamar **arista de la parametrización $\boldsymbol{\Phi}$** a una parte (o el total) de algún $\boldsymbol{\Phi}(\partial D_i)$.

97. Cuidado con el nombre de "arista". Estas aristas son propias de la parametrización, no de la superficie. Así que no esperemos reconocerlas a través de la representación gráfica, ya que es perfectamente posible que al cambiar de parametrización lo que eran aristas deje de serlo ([137]).

Si en cada borde ∂D_i tomamos una parametrización $\boldsymbol{c_i}$ con la orientación positiva ([138]) y la componemos con $\boldsymbol{\Phi}$, a cada punto de $\boldsymbol{\Phi}(\partial D)$ le habremos asociado un vector tangente a la trayectoria $\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{c_i}$. Un mismo punto puede tener asociados varios vectores tangentes, bien porque pertenezca a $\boldsymbol{\Phi}(\partial D_i) \cap \boldsymbol{\Phi}(\partial D_j)$, con $i \neq j$, o bien porque se recorra varias veces por un solo camino $\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{c_i}$. A través de la relación entre estos vectores tangentes podemos relacionar entre sí las orientaciones de dos caras contiguas.

Habremos de admitir la posibilidad de que haya un número finito de puntos, los vértices, en los que estos vectores tangentes no existan (porque las trayectorias $\boldsymbol{c_i}$ sólo necesitan ser de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos), o sean nulos, o no estén alineados unos con otros.

Definición 3.26 *Diremos que la superficie Σ está* ***orientada por su parametrización $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{D = D_1 \cup \ldots \cup D_m \longrightarrow \Sigma}$*** *(notaciones como en la definición 3.10) cuando se cumplan las dos condiciones siguientes:*

1. *Existe una normal unitaria continua definida sobre todos los puntos regulares de Σ y que sobre la imagen de $\operatorname{Int} D_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Int} D_m$ coincide con el vector normal unitario $\frac{\boldsymbol{n_\Phi}}{\|\boldsymbol{n_\Phi}\|}$. La función que a cada punto regular asigna esta normal unitaria se llama* ***orientación de $\boldsymbol{\Sigma}$****.*
2. *En cada uno de los puntos de $\boldsymbol{\Phi}(\partial D_1) \cup \cdots \cup \boldsymbol{\Phi}(\partial D_m)$, salvo a lo más los de un cierto conjunto finito, se cumple que existe algún vector tangente asociado a $\boldsymbol{\Phi}$ y que*
   - *o bien entre sus vectores tangentes asociados a $\boldsymbol{\Phi}$ no hay más que uno que sea no nulo,*
   - *o bien existen exactamente dos vectores tangentes asociados a $\boldsymbol{\Phi}$ que sean no nulos, y además sus orientaciones son opuestas (es decir, están alineados y su producto escalar es negativo).*

En el caso de que una superficie admita alguna parametrización que la oriente, diremos que es ***orientable****.*

98. Los puntos excepcionales que aparecen en la definición 3.26, de los que se permite que haya un número finito, son los **vértices de la parametrización $\boldsymbol{\Phi}$**. Hay que tener con el nombre de "vértice" la misma precaución que con el de arista.

Todas las superficies que han aparecido en los ejemplos puestos hasta ahora están orientadas por sus respectivas parametrizaciones. Obsérvese en particular el caso del cubo descrito en el ejemplo 3.5, con las orientaciones inducidas por la parametrización en cada una de las aristas.

Ejemplo 3.27 Cualquier superficie obtenida como imagen de una función inyectiva y regular sobre la totalidad (interior y borde) de una región simple ([139]), es orientable ([140]). Las superficies en forma explícita, cuyas orientaciones hemos estudiado en el apartado 3.3.2, son un caso particular de éste. ■

---

[136] Siguiendo parcialmente a [2].

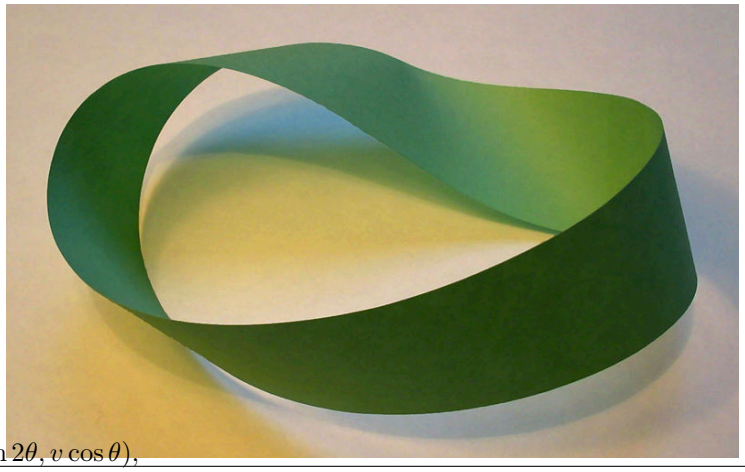
[137] Ver las figuras 3.26 y 3.27.

[138] Cada ∂D_i es una curva cerrada simple, por lo que tiene dos y sólo dos orientaciones. Llamamos positiva a la orientación para la que es válida la fórmula de Green-Riemann, ver el apartado 2.5.3(3).

[139] Ver la nota a pie de página nº 126.

[140] En efecto, basta observar que si $\boldsymbol{\Phi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de Σ con estas condiciones, $\boldsymbol{n_\Phi}$ es una normal continua no nula sobre todo Σ. Además, al ser $\boldsymbol{\Phi}$ inyectiva y regular, y al ser ∂D una curva cerrada simple, todos los puntos de $\boldsymbol{\Phi}(\partial D)$ (salvo quizás un número finito, que serán aquellos en los que, eventualmente, la parametrización de ∂D que estemos usando no sea derivable) cumplen automáticamente la condición de que no tienen más que un vector tangente asociado a $\boldsymbol{\Phi}$ que sea no nulo.

Pero el hecho de que haya *una parametrización cuyo dominio de parámetros sea una única región simple y que sea de clase $\mathscr{C}^1$ y regular en todos los puntos de su dominio* (ahora no suponemos que la parametrización sea inyectiva), no garantiza que la superficie sea orientable:



Ejemplo 3.28 La **cinta de Möbius** es la superficie M dada por la parametrización $\mathbf{\Phi}$ definida sobre $D = [0, \pi] \times [-1, 1]$ por

$$\mathbf{\Phi}(\theta, v) = ((a - v\sin\theta)\cos 2\theta, (a - v\sin\theta)\sin 2\theta, v\cos\theta),$$

done a es una cierta constante estrictamente positiva. Ver una demostración de que no es orientable en el apartado (K.16). (La foto que acompaña a este texto procede de wikipedia.) ■

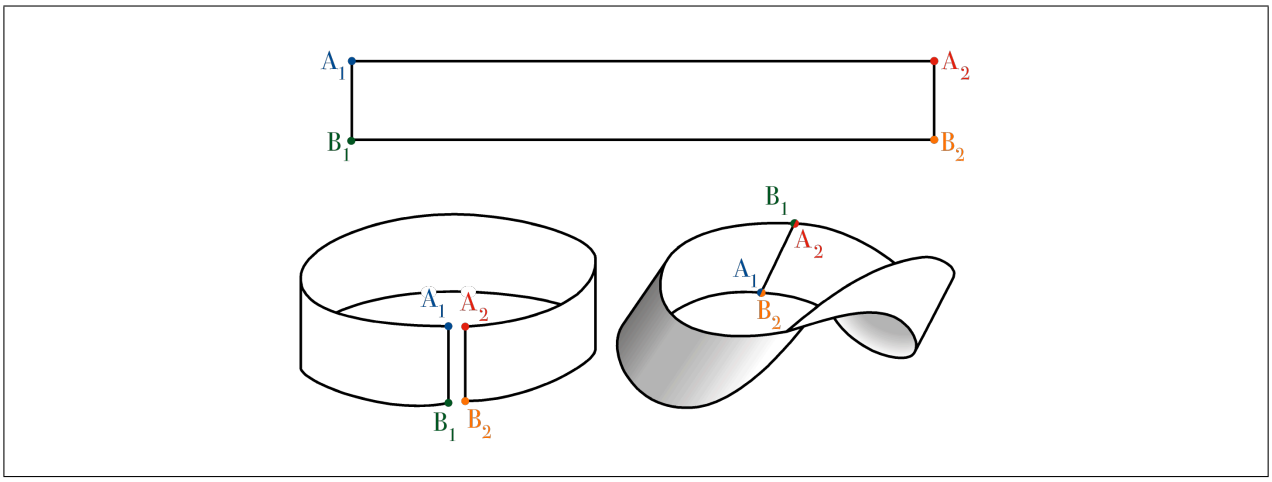


Figura 3.23: Para obtener una cinta de Möbius hay que retorcer 180° el rectángulo, de lo contrario se obtendría un cilindro

Definición 3.29 *Una* ***superficie orientada****, Σ^+ o Σ^-, es una superficie Σ para la que se ha elegido una parametrización que la oriente. Y si llamamos Σ^+ (respectivamente, Σ^-) a la superficie orientada, denotaremos con Σ^- (respectivamente, Σ^+) a la misma superficie con su orientación opuesta (dos orientaciones de la misma superficie son* ***opuestas*** *cuando a cada punto regular le asignan vectores normales unitarios opuestos).*

99. La definición 3.29 es coherente con la que dimos de superficie orientada cuando la superficie viene dada en forma explícita (definición 3.25), sólo que allí además fijamos una de las dos orientaciones como "la positiva".

Una superficie definida explícitamente tiene dos y sólo dos orientaciones (ver teorema 3.24), pero en general una superficie puede no tener ninguna (cinta de Möbius), tener exactamente dos o tener más de dos, aunque para esto último ha de ser una superficie un poco peculiar: considérese, por ejemplo, una superficie formada por dos rectángulos con un solo vértice en común. (En realidad, superficies como la última citada no serán relevantes para nosotros, en parte debido a que en las generalizaciones a variedades diferenciables se definen de otra manera, ver la observación 84.)

3.3.4. Integral de un campo vectorial sobre una superficie orientada

Ahora estamos en condiciones de hablar de integrales de campos vectoriales que sean independientes de la parametrización, como hicimos con las de campos escalares. La diferencia fundamental reside en que para que la integral de un campo vectorial sea la misma al cambiar de parametrización, ambas representaciones paramétricas han de inducir la misma orientación sobre la superficie.

Teorema 3.30 *Si $\boldsymbol{\Phi_1}$ y $\boldsymbol{\Phi_2}$ son parametrizaciones que sirven para definir y para orientar una misma superficie y $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial continuo sobre esa superficie, entonces*

$$\iint_{\boldsymbol{\Phi_2}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \pm \iint_{\boldsymbol{\Phi_1}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S},$$

según que las orientaciones asociadas a las dos parametrizaciones sean iguales u opuestas.

DEMOSTRACIÓN: (PARCIAL) *Consultar el apartado (K.15).*

Definición 3.31 *Sea Σ^+ una superficie orientada (definiciones 3.25 o 3.29), y $\boldsymbol{F} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo sobre ella. La* ***integral o flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de Σ^+*** *es*

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Phi}(u,v)) \cdot \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(u,v)\, du\, dv = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\, d\sigma,$$

donde $\boldsymbol{N}$ es la normal unitaria que define la orientación de Σ^+, y $\boldsymbol{\Phi} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización compatible con la misma.

Para que esta definición sea correcta hay que comprobar que la integral sobre D siempre existe (con el mismo argumento que para la definición 3.22, de integral de un campo vectorial sobre una parametrización) y que al cambiar a otra parametrización que tenga la misma orientación que la primera, no cambia la integral:

Corolario 3.32 *La definición anterior no depende de la parametrización utilizada, siempre que sea compatible con la orientación.*

DEMOSTRACIÓN: *Es consecuencia inmediata del teorema 3.30.*

Del teorema 3.30 se sigue también inmediatamente que al cambiar una orientación por su opuesta la integral cambia a su valor opuesto:

Corolario 3.33 *(Notaciones como en la definición 3.31.)*

$$\iint_{\Sigma^-} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

DEMOSTRACIÓN: *Es consecuencia inmediata del teorema 3.30.*

Para superficies definidas de forma explícita, es aplicable la fórmula del teorema 3.23,

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \left[-P\,\frac{\partial g}{\partial x} - Q\,\frac{\partial g}{\partial y} + R \right] dx\, dy.$$

También puede demostrarse que es válido para integrales de campos vectoriales un resultado análogo al que vimos para integrales de campos escalares sobre superficies que son la gráfica de una función cuyas derivadas se hacen infinitas en puntos del borde de su dominio de definición (teorema 3.19). Bajo ciertas condiciones estas integrales de campos vectoriales pueden calcularse mediante una integral impropia:

Teorema 3.34 *Supóngase que se tiene un campo vectorial continuo, $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, definido sobre una superficie orientada Σ^+ de manera que Σ coincide con la gráfica de una función $z = g(x, y)$ que cumple las condiciones que se exponen en el ejemplo 3.8. Entonces,*

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \left[-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right] dx\, dy$$

(donde la última integral puede ser propia o impropia, lo mismo que en el enunciado del teorema 3.19), siempre que el integrando de la segunda integral sea una función positiva en todos los puntos. ([141])

★ DEMOSTRACIÓN: (SUGERENCIA) *Puede demostrarse de manera similar al teorema 3.19.*

Notaciones. Es corriente llamar con la misma letra a las variables x, y, z y a las aplicaciones que las expresan en función de los parámetros u, v. Así, la parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ puede expresarse como

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & x(u,v) \\ y & = & y(u,v) \\ z & = & z(u,v) \end{array}\right\}.$$

Como el vector normal es el producto vectorial de las dos derivadas parciales de $\boldsymbol{\Phi}$, sus componentes son determinantes jacobianos de matrices 2×2 formadas por derivadas parciales de x, y, z, concretamente

$$\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right).$$

Debido a todo esto, es muy corriente la siguiente notación: si $\boldsymbol{F}$ es el campo vectorial (P, Q, R),

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy.$$

100. Observar el orden de las variables porque, al tratarse de una abreviatura de determinantes, el cambiar el orden implica un cambio de signo. Observar también el orden de las componentes de $\boldsymbol{F}$ y compararlo con la notación análoga para integrales de línea (observación 20).

Es una notación sugestiva porque la integral se calcula pasando al dominio de parámetros, poniendo P, Q y R en función de los mismos y sustituyendo el producto formal $dy\, dz$ por el jacobiano $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, etc.

101. El origen de la notación es que lo que se hace a escala infinitesimal es, en esencia, sumar infinitos términos que están formados por los productos de las componentes del campo vectorial por los elementos infinitesimales de superficie.

En el anexo E daremos otra interpretación, más abstracta, tanto de los productos formales de diferenciales, $dy\, dz$, etc., (ver definición E.1) como del diferencial de superficie $d\boldsymbol{S}$ (ver definición E.14.)

Ejemplo 3.35 ([15], ejercicio 7.6.1.) Sea la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$, suponiendo que la constante calorífica es $k = 1$.

Según la teoría del calor, el intercambio de calor se produce en la dirección del gradiente de temperatura, en el sentido de la temperatura descendente, es decir, según el campo $-k\boldsymbol{\nabla} T$ para una cierta constante k positiva que depende de los materiales, y que en nuestro caso es igual a 1, luego el campo vectorial cuyo flujo se nos pide es $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (-6x, 0, -6z)$.

[141] Igual que ocurría en el teorema 3.19, la tesis de este teorema es cierta también si el integrando es una función negativa, pero puede no serlo cuando el integrando toma valores positivos y valores negativos en puntos infinitamente próximos al borde de D.

- La superficie cilíndrica Σ puede parametrizarse mediante la función $\mathbf{\Phi}$ descrita por

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{2}\cos\theta \\ y & = & y \\ z & = & \sqrt{2}\sin\theta \end{array}\right\} (\theta, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2],$$

cuyo vector normal $\mathbf{\Phi}_\theta \times \mathbf{\Phi}_y = (-\sqrt{2}\cos\theta, 0, -\sqrt{2}\sin\theta)$ apunta hacia el interior de la superficie ([142]), como vamos a justificar a continuación. Puesto que es una función continua, basta con comprobarlo en un punto cualquiera, por ejemplo en el punto $(0, 0, \sqrt{2})$, que corresponde a los valores de los parámetros $\theta = \pi/2$, $y = 0$; entonces el vector es $(\mathbf{\Phi}_\theta \times \mathbf{\Phi}_y)(\pi/2, 0) = (0, 0, -\sqrt{2})$. Llamaremos Σ^+ al cilindro orientado según este vector normal. Entonces el flujo pedido es

$$\iint\limits_{\Sigma^+} (-6x, 0, -6z) \cdot d\boldsymbol{S} =$$

$$= \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,2]} (-6\sqrt{2}\cos\theta, 0, -6\sqrt{2}\sin\theta) \cdot (-\sqrt{2}\cos\theta, 0, -\sqrt{2}\sin\theta)\, d\theta\, dy = 48\pi.$$

Observar que la elección de la orientación (hacia dentro del cilindro) ha sido arbitraria, el enunciado no lo dejaba claro. El flujo hacia fuera del cilindro resultaría ser de -48π.

- También podríamos haber descrito el cilindro de manera explícita con la z despejada y aplicar la fórmula del teorema 3.23 ([143]). Para ello partimos el cilindro en dos mitades ([144]) mediante $z = \pm\sqrt{2 - x^2}$, donde las variables independientes x, y recorren $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ y $[0, 2]$, respectivamente. Entonces $\partial z/\partial x = \mp x/\sqrt{2 - x^2}$, $\partial z/\partial y = 0$.

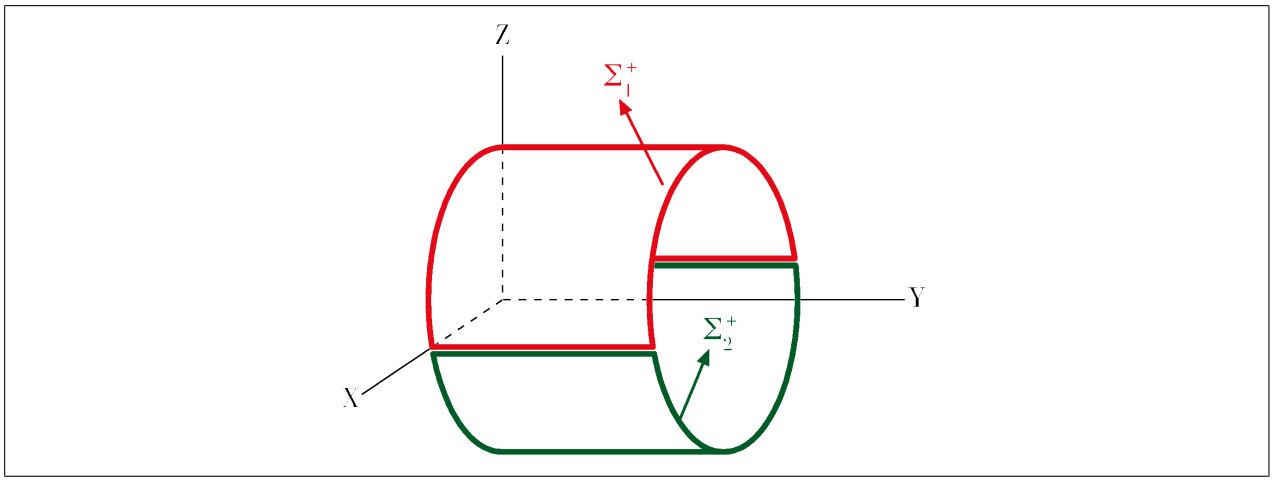


Figura 3.24: Las dos superficies orientadas, Σ_1^+ y Σ_2^+, en las que hemos dividido el cilindro

Llamamos Σ_1 a la mitad superior y Σ_2 a la mitad inferior. Recuérdese que en el caso de superficies en forma explícita, llamamos orientación positiva a la que apunta en el sentido creciente de la variable despejada, en este caso en el sentido de las z crecientes, hacia arriba.

[142] Nótese el orden en el que hemos escrito los parámetros y compárese con el contenido de la observación 80.

[143] En realidad, lo que vamos a aplicar va a ser el teorema 3.34, puesto que al despejar z nos queda una función que en el borde del dominio no es derivable (o, si se prefiere decirlo así, su derivada parcial respecto de x toma valores infinitos), así que no estamos en las condiciones del ejemplo 3.6, sino del 3.8. Éste es el motivo por el que nos aparecerá una integral impropia.

[144] Esto de dividir una superficie en dos partes y sumar las integrales lo haremos a menudo en los problemas y en las aplicaciones. Para justificarlo nos apoyaremos en el teorema 2.30.

Hacemos los dos cálculos a la vez, teniendo cuidado con los signos ([145]):

$$\iint\limits_{\Sigma_i^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \text{(integral impropia)} \iint\limits_{(-\sqrt{2},\sqrt{2})\times[0,2]} \left(\mp\frac{6x^2}{\sqrt{2-x^2}} \mp 6\sqrt{2-x^2}\right)\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{-\sqrt{2}+\delta}^{\sqrt{2}-\delta}\int\limits_0^2 \frac{\mp 12}{\sqrt{2-x^2}}\,dy\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_0^{\sqrt{2}-\delta}\frac{\mp 48}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \mp 48\lim_{\delta\to 0}\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}-\delta} =$$

$$= \mp 48\lim_{\delta\to 0}\arcsin\left(1-\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right) = \mp 24\pi$$

(hemos utilizado la fórmula 31 del anexo M). Si Σ^+ es el cilindro completo con la orientación hacia dentro (para el cilindro tenemos total libertad a la hora de asignar el signo $+$ o el signo $-$ a las orientaciones, no como con sus mitades, porque a las mitades las consideramos como superficies dadas en forma explícita) se tiene que $\Sigma^+ = \Sigma_1^- \cup \Sigma_2^+$, luego $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = 48\pi$. ■

[145] Obsérvese que la función a integrar es, según los signos que sean aplicables, o siempre negativa o siempre positiva, por lo que se cumplen las hipótesis del teorema 3.34.

3.4 Teorema de Stokes (clásico)

El teorema de Stokes clásico es una generalización del de Green-Riemann consistente en incorporar recintos que sean superficies alabeadas, en lugar de admitir solamente recintos contenidos en un plano. Igual que ocurre con el teorema de Green-Riemann, las condiciones geométricas de los objetos sobre los que integraremos (la superficie y su borde) son las que concentran todas nuestras dificultades técnicas, más que las propiedades de diferenciabilidad de las funciones a integrar.

Nos limitaremos a probar el teorema en el caso más simple y, a continuación, explicar cómo se extendería el resultado a otros casos, pero sin dar para estos últimos los enunciados formalmente correctos.

102. Lo llamaremos teorema de Stokes *clásico* cuando queramos distinguirlo del teorema de Stokes *general* del apartado (E.5).

3.4.1. Fórmula de Stokes para superficies definidas explícitamente

Supondremos que Σ es una superficie dada en forma explícita, con la tercera variable despejada en función de las otras dos, $z = g(x, y)$ donde $(x, y) \in D$, g es de clase $\mathscr{C}^1(D)$, y que $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región simple en las dos direcciones, con lo que nos garantizamos que ∂D es una curva cerrada simple (ver la observación 65). Recordemos que en la definición 3.25 se introdujo para este caso el concepto de superficie orientada positivamente, Σ^+.

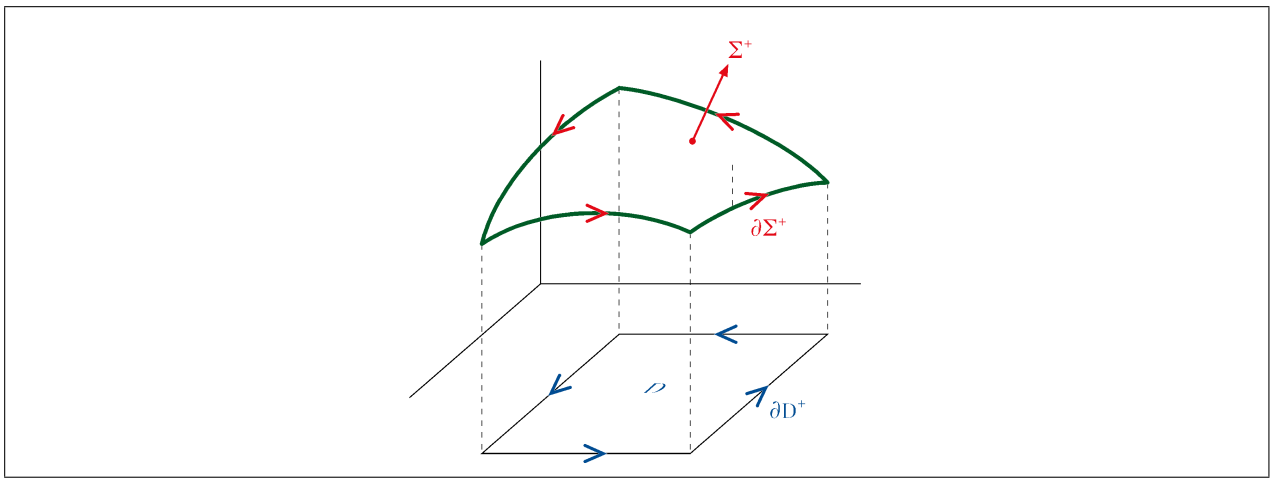


Figura 3.25: Orientación positiva del borde de una superficie que está definida explícitamente

Definición 3.36 *Llamaremos* ***borde de la superficie Σ, $\partial\Sigma$,*** *a la parte de Σ cuya proyección sobre el plano XY es el borde del dominio de parámetros, ∂D. Como es una curva cerrada simple* ([146]), *$\partial\Sigma$ admite dos orientaciones; llamaremos* ***orientación positiva de $\partial\Sigma$*** *al sentido de recorrido cuya proyección se corresponda con la orientación positiva de ∂D^+ tal como se define en el tmarkeorema 2.39.*

El borde orientado positivamente lo denotaremos como $\boldsymbol{\partial\Sigma^+ = (\partial\Sigma)^+ = \partial(\Sigma^+)}$.

103. Es importante tener en cuenta que, al contrario con lo que ocurría con las regiones simples bidimensionales (teorema 2.20), para superficies no coinciden los conceptos de borde, que acabamos de definir, y de frontera (definición 1.16), puesto que la frontera topológica de cualquier superficie es ella misma, $\operatorname{Fr}\Sigma = \Sigma$ ([147]).

[146] El borde de D es una curva cerrada simple, así que podemos tomar una parametrización suya $\boldsymbol{c}$. La composición de $\boldsymbol{c}$ con la aplicación que a cada $(x, y) \in D$ hace corresponder $(x, y, g(x, y))$ es una parametrización de la curva cerrada simple $\partial\Sigma$.

La orientación positiva que acabamos de definir sobre $\partial\Sigma$ y la orientación positiva sobre Σ (definición 3.25) están relacionadas por la "regla del sacacorchos".

Teorema 3.37 (de Stokes para superficies en forma explícita) *Sea Σ una superficie dada en forma explícita por una función de clase $\mathscr{C}^2$ sobre una región simple en las dos direcciones, y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$ sobre Σ. Entonces,*

$$\int\limits_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint\limits_{\Sigma^+} \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

DEMOSTRACIÓN: *Sean $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de clase $\mathscr{C}^2$ cuya gráfica $z = g(x,y)$ es la superficie Σ, y $\boldsymbol{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \rightsquigarrow (x(t), y(t))$, una parametrización de la curva cerrada simple orientada ∂D^+. Entonces $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $t \rightsquigarrow \big(x(t), y(t), z(t) = g(x(t), y(t))\big)$, es una parametrización de $\partial\Sigma^+$, luego, llamando $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$,*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Sigma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz &= \int\limits_a^b (Px' + Qy' + Rz')\ dt = \\
&= \int\limits_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial g}{\partial x}\right)x' + \left(Q + R\frac{\partial g}{\partial y}\right)y'\right]\ dt = \\
&= \int\limits_{\partial D^+} \left(P + R\frac{\partial g}{\partial x}\right)\ dx + \left(Q + R\frac{\partial g}{\partial y}\right)\ dy = \\
&= \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right]\ dx\,dy,
\end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos hecho uso de la fórmula de Green-Riemann, teorema 2.39.

Aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que al ser $g \in \mathscr{C}^2(D)$ sus derivadas cruzadas coinciden, la última integral es igual a ([148])

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \Bigg[D_1Q + D_3Q\frac{\partial g}{\partial x} + D_1R\frac{\partial g}{\partial y} + D_3R\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} - \\
- \left(D_2P + D_3P\frac{\partial g}{\partial y} + D_2R\frac{\partial g}{\partial x} + D_3R\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + R\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}\right)\Bigg]\ dx\,dy = \\
= \iint\limits_D \left[(D_2R - D_3Q)\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) + (D_3P - D_1R)\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right) + (D_1Q - D_2P)\right]\ dx\,dy = \\
= \iint\limits_{\Sigma^+} \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.
\end{aligned}$$

104. Tanto nuestro enunciado como nuestra demostración del teorema de Stokes están íntimamente relacionados con los corolarios 2.41 y 2.43 (la forma vectorial de la fórmula de Green-Riemann puede escribirse como $\int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F}^*\cdot d\boldsymbol{S}$).

[147] La última igualdad no es evidente, requiere una demostración. Ver el teorema J.4.

[148] Las funciones P, Q, R pueden considerarse como funciones de tres o de dos variables. Para distinguir las derivadas parciales en esta demostración, las notaciones del tipo $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial Q}{\partial y}$ indican derivadas parciales de la función de dos variables $Q(x, y, g(x,y))$; en cambio, las notaciones del tipo D_1Q, D_2Q, D_3Q indican derivadas parciales de la función de tres variables $Q(x,y,z)$.

3.4.2. Fórmula de Stokes para superficies más generales

Un resultado análogo sigue siendo válido sobre superficies mucho más generales, pero pueden aparecer importantes dificultades técnicas:

1. Cuando el único cambio en las hipótesis del teorema sea que el dominio D no es una región simple en ambas direcciones pero la fórmula de Green-Riemann sí que es válida sobre él ([149]), la tesis del teorema sigue siendo cierta, con prácticamente la misma demostración. La definición de $\partial\Sigma^+$ habrá que adaptarla a la forma que tenga ∂D en cada caso. Por ejemplo, cuando $D = D_1 \setminus \operatorname{Int} D_2$ el borde orientado de la superficie estará formado por dos curvas $\boldsymbol{\partial\Sigma^+ = \partial\Sigma_1^+ + \partial\Sigma_2^-}$.

2. En caso de que la superficie no esté dada en forma explícita pero sea imagen de una parametrización cuyo dominio sea una región simple en ambas direcciones y que además sea inyectiva y regular sobre la totalidad del dominio ([150]), un enunciado análogo es válido, y con una demostración también análoga. Puede consultarse en [2], teorema 9.4.1 ([151]).

   Una muestra de estas superficies es la semiesfera dada por $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sobre $x^2+y^2 \leq 1$, en cuya definición estamos utilizando una función que no tiene derivadas finitas en el borde del dominio ([152]), pero que admite otras parametrizaciones que son regulares en todos los puntos y biyectivas, como la estereográfica ([2], ejercicio 8.1.2).

★ 3. Si no tenemos ninguna parametrización de clase $\mathscr{C}^2$ pero sí de clase $\mathscr{C}^1$, el resultado sigue siendo válido, si bien la demostración se complica extraordinariamente. Una forma de demostrarlo es aproximarse con superficies que sí se describen mediante parametrizaciones de clase $\mathscr{C}^2$.

4. Si la parametrización deja de ser inyectiva o regular en el borde de su dominio, ∂D, entonces la primera dificultad se presenta al identificar el conjunto $\partial\Sigma$, que, como se ha señalado más arriba (observación 103), no coincide con la frontera topológica de Σ, $\operatorname{Fr}\Sigma$. Considérese, por ejemplo, el caso de una esfera (cf. ejemplo 3.2) para comprobar que la imagen de ∂D puede dejar de ser una curva cerrada simple, y puede incluso carecer de significado geométrico dentro de Σ. Aun así, si se interpreta la integral sobre $\partial\Sigma^+$, no como una integral sobre una *curva orientada* (que puede no tener sentido), sino como una integral a lo largo de una *trayectoria* (la definida por composición de $\boldsymbol{\Phi}$ con una parametrización de ∂D^+), la fórmula de Stokes sigue siendo cierta ([153]). Los comentarios que siguen son aplicación de esta extensión de la fórmula.

   a) Así, por ejemplo, la integral sobre una esfera orientada Σ^+ del rotacional de cualquier campo de clase $\mathscr{C}^1$ ha de ser nula, ya que, con esta interpretación, la imagen de ∂D^+ mediante la parametrización es un semimeridiano recorrido dos veces, una vez en cada sentido, por lo que necesariamente la integral a lo largo de una tal trayectoria ha de valer cero, sea cual sea el campo. Por tanto, desde este punto de vista no hay inconveniente en considerar $\partial\Sigma = \varnothing$, es decir, que la superficie esférica "no tiene borde".

   b) La integral del rotacional de un campo a través del cilindro del ejemplo 3.3 es igual a la integral de dicho campo a lo largo de las dos circunferencias que lo limitan (cada una con la orientación adecuada), ya que el resto de la imagen de ∂D es una generatriz que se recorre dos veces, una en cada sentido. Se toma entonces como "borde" del cilindro la unión de las circunferencias que lo limitan.

---

[149] Ver el apartado 2.5.3.

[150] Comparar con la nota a pie de página nº 126: se trataría de una superficie simple regular cuyo dominio de parámetros es una región simple en ambas direcciones.

[151] Hay que concretar qué es aquí el borde de la superficie Σ y cuáles son las orientaciones a utilizar en la fórmula: usando las notaciones habituales,

- Σ^+ es la superficie orientada tal como se describe en el ejemplo 3.27;
- $\partial\Sigma$ es la curva cerrada que se obtiene como imagen de la curva ∂D mediante $\boldsymbol{\Phi}$;
- la orientación de $\partial\Sigma^+$ es la inducida por la composición de $\boldsymbol{\Phi}$ con una parametrización de la curva orientada ∂D^+, donde ∂D está dotada de la orientación para la que es válida la fórmula de Green-Riemann (ver el teorema 2.39).

[152] Utilizamos también esta superficie en el ejemplo 3.8. Contrariamente a lo que ocurría en aquel ejemplo, ahora no hace

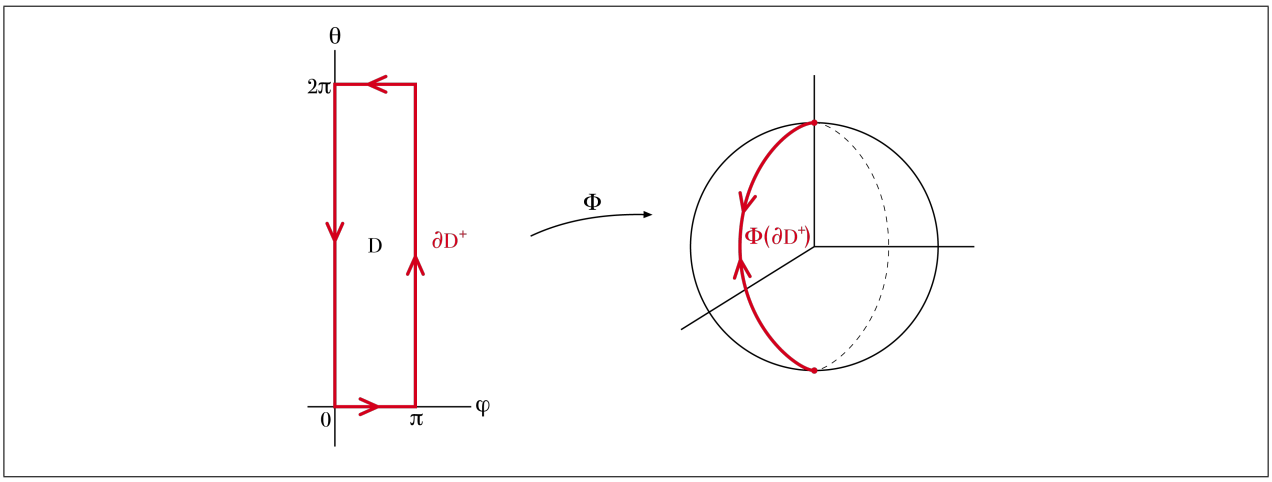


Figura 3.26: Imagen del borde del dominio de parámetros cuando Φ es la parametrización de la esfera utilizando las coordenadas esféricas

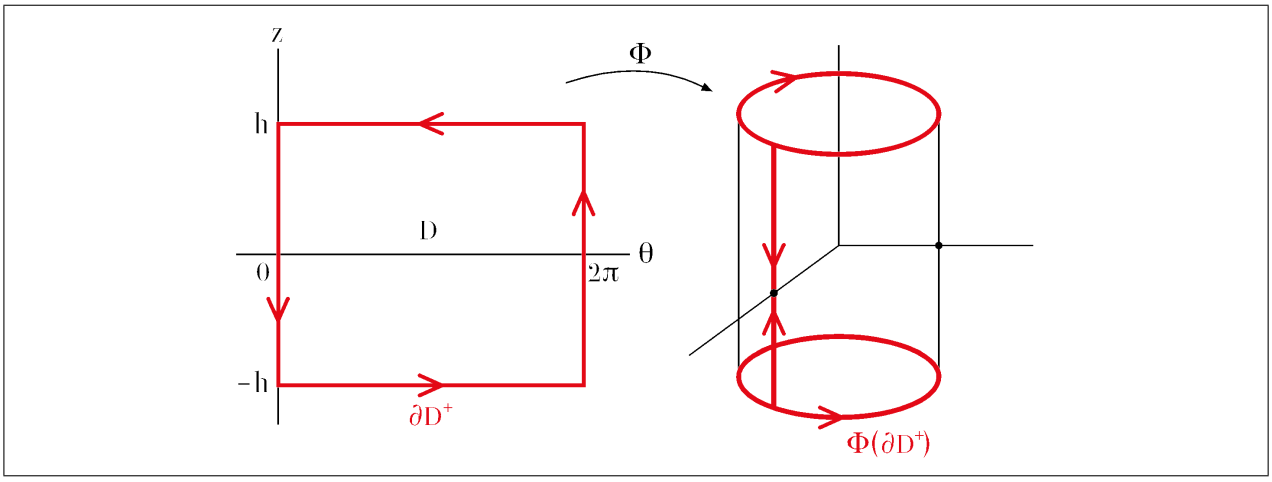


Figura 3.27: Imagen del borde del dominio de parámetros cuando Φ es la parametrización del cilindro utilizada en el ejemplo 3.3. En este caso, $\partial\Sigma^+$ pasa a ser solamente la unión de las dos circunferencias, cada una con su orientación

c) Si el dominio de parámetros puede descomponerse en unión de regiones que son simples en las dos direcciones y que no se solapan (cf. 2.5.3(4)), la fórmula de Stokes sigue siendo cierta, siempre que se sobrentienda que la integral de línea es ahora una suma de las integrales sobre cada uno de los "verdaderos" bordes, como en el caso del cilindro. Bastaría con descomponer las integrales en una suma y aplicar los resultados en cada sumando. Las condiciones de compatibilidad impuestas en la definición 3.26 son ahora cruciales, porque garantizan que los bordes que se recorran más de una vez no contribuyen al valor de la integral. Como consecuencia, razonando como en el caso de la esfera, probaríamos que la integral de un rotacional continuo sobre un cubo (ejemplo 3.5) es siempre nula: la superficie del cubo tampoco tiene borde, como ocurría con la esfera.

5. En los casos más generales, para que la fórmula de Stokes sea válida, la orientación de Σ^+ y la de $\partial\Sigma^+$ han de estar relacionadas por la siguiente "regla de la izquierda" *con todas las cautelas que nos merecen este tipo de reglas, como hemos comentado varias veces*: un caminante que recorra $\partial\Sigma$ en el sentido de $\partial\Sigma^+$ y que se posicione ortogonalmente a Σ en el sentido de Σ^+ (es decir, ocupando con el cuerpo el lugar de la normal unitaria y con los pies tocando la superficie Σ), siempre va viendo la superficie a

falta recurrir a las integrales impropias para darle una solución.

[153] Con una demostración similar a la del teorema 3.37, ver el teorema 9.4.1 de [2].

su izquierda. En cambio, la "regla del sacacorchos" a la que nos hemos referido antes ([154]), nos puede llevar a confusión cuando la apliquemos en el borde de un agujero de Σ.

105. Todas estas reglas que para aplicarse necesitan apelar a conocimientos ajenos a nuestro modelo matemático (funcionamiento de un sacacorchos, funcionamiento de un reloj analógico, identificación de la izquierda o la derecha, etc.) no son más que ayudas a la intuición. Cuando queramos argumentar evitando toda referencia ajena a nuestro modelo matemático, habremos de tomar una parametrización concreta y calcular la integral de línea sobre la imagen del borde, como hemos hecho para una esfera o para un cilindro.

3.4.3. Aplicaciones del teorema de Stokes

Como aplicación del teorema de Stokes podemos dar una justificación (no una demostración, que requeriría de más aparato matemático) de que en caso de que el dominio de un campo vectorial tridimensional de clase $\mathscr{C}^1$ sea el espacio total menos un conjunto finito, la condición 4 implica la condición 1' (notaciones como en el enunciado del teorema 1.33).

JUSTIFICACIÓN: *Supongamos que* $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \backslash X \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *donde* X *es un conjunto finito, es un campo vectorial de clase* $\mathscr{C}^1$ *cuyas derivadas cumplen la condición 4, es decir, tal que* $\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.

Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ *cualquier curva cerrada simple, sobre la que queremos saber si la integral de* $\boldsymbol{F}$ *es nula (la orientación de la que dotemos a* C *será irrelevante). Considérese una superficie orientable* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \backslash X$ *de forma que* $\partial\Sigma^+ = C^+$. *La existencia de una tal superficie puede resultar intuitivamente aceptable, pero es en realidad un problema nada trivial en el que no entraremos (por esto es por lo que no estamos haciendo una demostración sino una justificación).*

Aplicando el teorema de Stokes concluimos que $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$.

Consultar en el anexo G algunas de las múltiples aplicaciones del teorema de Stokes.

[154] En dos dimensiones coinciden ambas reglas, la del sacacorchos y la de la izquierda.

CAPÍTULO 4

Integrales de tres variables

4.1 Introducción

Consideremos un subconjunto W de $\mathbb{R}^3$, acotado, y una función real definida sobre W y acotada, $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$. El concepto y las propiedades de la **integral (triple) de Riemann de f sobre W** son totalmente análogos al caso de dos variables, con el único cambio de introducir una variable adicional, z. La integral de Riemann de f sobre W la denotaremos con $\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ o con $\iiint_W f\,dV$ ("dV" lo leeremos como "diferencial de volumen"). Como ocurría en el caso de una o dos variables, también aquí la notación tiene su origen en que lo que significa la operación de integrar una función es sumar infinitos términos que se obtienen multiplicando el valor de la función por unos volúmenes infinitesimales. De los productos infinitesimales $dx\,dy\,dz$ y del elemento de volumen dV daremos una interpretación formalista en el anexo E, ver las definiciones E.1 y E.2).

Los teoremas, definiciones y comentarios de las secciones 2.1 a 2.6 son válidos para tres variables, con adaptaciones que generalmente serán obvias (en lugar de rectángulos consideraremos **paralelepípedos**, que serán producto de tres intervalos cerrados y acotados, etc.). Dedicaremos la sección siguiente a dar detalles de aquellas adaptaciones que lo merezcan, por no ser tan obvias o porque aporten algo adicional.

Finalizaremos el capítulo con el teorema de la divergencia.

4.2 INTEGRABILIDAD, TEOREMA DE FUBINI Y REGIONES TRIDIMENSIONALES SIMPLES

El hecho de que un conjunto sea despreciable para la integración triple, así como la condición suficiente de integrabilidad, son adaptación de los mismos conceptos para dos variables:

Definición 4.1 *Diremos que un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3$ es* ***despreciable para la integración (triple)*** *cuando sea unión finita de conjuntos que son*

- *o bien gráficas de funciones continuas de dos variables,*
- *o bien subconjuntos de superficies.*

Teorema 4.2 (Condición suficiente de integrabilidad sobre paralelepípedos) *Es integrable cualquier función de dos variables definida sobre un rectángulo, siempre que sea acotada y que sus discontinuidades formen un conjunto despreciable para la integración triple.*

Para integrales triples se cumplen resultados análogos al teorema de Fubini y su corolario. En este caso la integral triple puede descomponerse en tres integrales sencillas (de $3! = 6$ maneras diferentes) o en una sencilla y una doble (de otras 6 maneras diferentes), con un total de 12 posibilidades. Por ejemplo, si $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces se cumplen las siguientes igualdades (donde además está garantizada la existencia de todas la integrales):

$$\iiint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x_1,x_2,x_3)\,dV = \iint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\right) dA =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint\limits_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_2\,dx_3\right) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\right) dx_2\right] dx_1.$$

También el concepto de integral triple se amplía a funciones que sean acotadas pero que no estén definidas sobre paralelepípedos, con un procedimiento totalmente análogo al de la definición 2.18.

Para definir las regiones simples tridimensionales utilizamos las mismas ideas que para el caso bidimensional: pensamos en conjuntos acotados en $\mathbb{R}^3$ para los que cuando lanzamos una recta en la dirección de uno de los ejes coordenados, por ejemplo $x = x_0$, $y = y_0$, al recorrerla desde $-\infty$ a $+\infty$ entramos y salimos en el interior del conjunto una sola vez (o ninguna). Para la definición formal exigiremos además que la correspondiente proyección sea una región simple bidimensional.

Definición 4.3 *Diremos que un subconjunto acotado $W \subset \mathbb{R}^3$ es una* ***región simple tridimensional en la dirección de las z*** *cuando la proyección de W sobre el plano $z = 0$ sea una región simple bidimensional y además W esté limitada verticalmente por dos gráficas de funciones continuas. Es decir, cuando W pueda expresarse de la siguiente manera:*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ \alpha(x, y) \le z \le \beta(x, y)\},$$

donde D es una región simple bidimensional y α, β son dos funciones continuas definidas sobre D y con la condición de que para todo punto (x, y) de D, $\alpha(x, y) \le \beta(x, y)$.

De manera análoga se definen las ***regiones tridimensionales simples en la dirección de las x o de las y****.*

Un conjunto $W \subset \mathbb{R}^3$ se dice que es una ***región tridimensional simple*** *cuando lo es alguna dirección.*

Cuando W es una región tridimensional simple, es cierto un resultado análogo al del teorema 2.20, y se utiliza el nombre de **borde de W, ∂W** para denominar a la frontera de W.

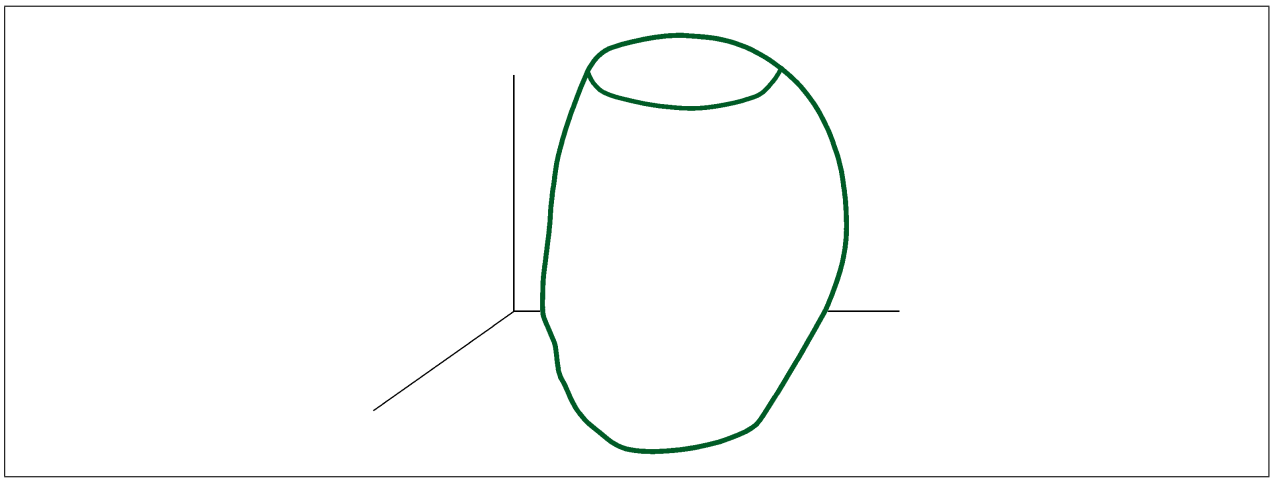


Figura 4.1: Región tridimensional simple en las z

Teorema 4.4 *Sea $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde W es una región tridimensional simple en la dirección de las z. Entonces las siguientes integrales existen y son iguales:*

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right] dx$$

(donde estamos utilizando las notaciones de las definiciones 2.19 y 4.3, así como suponiendo que D es simple en la dirección de las y).

JUSTIFICACIÓN: *Una demostración de este resultado se obtiene de manera muy similar a la del teorema 2.21.*

Naturalmente, todo lo dicho para regiones simples en la dirección de las z puede adaptarse de manera inmediata a regiones simples en la dirección de las y o de las x. De modo que para un región que sea simple en las tres direcciones disponemos de $3! = 6$ maneras diferentes de plantear el cálculo de una integral triple como tres integrales sucesivas de una variable, siempre que conozcamos o seamos capaces de obtener las desigualdades que expresan la región en cualquier orden. También podemos descomponer la integral triple en una doble y una sencilla, o en una sencilla y una doble, lo que nos da otras 6 posibilidades. Volveremos sobre este tema en los ejemplos.

Nuestra definición de volumen de un conjunto tridimensional admite las mismas explicaciones que las que dimos para definir el área de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (definición 2.24):

Definición 4.5 *Llamaremos* ***volumen de un subconjunto acotado $W \subset \mathbb{R}^3$*** *a $V(W) = \iiint_W dV$, cuando exista. Cuando la integral no exista, diremos que W* ***no tiene volumen****.*

Las fórmulas del teorema 4.4 justifican la validez, bajo ciertas condiciones, del principio enunciado por Cavalieri a mediados del siglo XVII:

Corolario 4.6 (principio de Cavalieri) *Si al cortar dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^3$ con todos los planos paralelos a uno fijo se obtienen secciones cuyas áreas están siempre en la misma proporción (para cualquiera de los cortes), entonces los volúmenes de ambos conjuntos están en la misma proporción.*

JUSTIFICACIÓN: *Llamemos W_1 y W_2 a los dos conjuntos y tomemos los ejes de coordenadas de manera que los cortes sean paralelos al plano $z = 0$. Entonces existen dos valores a, b, de forma que por debajo de $z = a$*

y por encima de $z = b$ las intersecciones con planos horizontales son vacías, por lo que podemos limitarnos a $a \leq z \leq b$.

Aplicando el teorema 4.4,

$$V(W_i) = \iiint\limits_{W_i} dV = \int\limits_a^b \left(\iint\limits_{W_i \cap \text{plano a la altura } z} dx\,dy \right) dz =$$

$$= \int\limits_a^b A(W_i \cap \text{plano a la altura } z)\,dz.$$

Y como las áreas de las intersecciones guardan una cierta proporción constante, $A(W_2 \cap$ plano a la altura $z) = k\,A(W_1 \cap$ plano a la altura $z)$, al integrarlas entre a y b la constante k sale fuera de la integral y los volúmenes están también en la misma proporción, $V(W_2) = k\,V(W_1)$.

En el apartado (F.2) puede consultarse una generalización de este principio a los casos en los que los cortes de W no se hagan con planos paralelos sino con otros haces de superficies (esferas concéntricas, conos con el mismo vértice y con el mismo eje, ...).

También las propiedades elementales, el teorema del valor medio y el teorema del cambio de variable para integrales dobles tienen su reflejo en integrales triples:

Teorema 4.7 (propiedades elementales para integrales triples) *Los teoremas 2.28 y 2.30, así como el corolario 2.31, siguen siendo válidos si en sus enunciados se sustituyen las integrales dobles por integrales triples y las regiones simples bidimensionales por regiones simples tridimensionales.*

En particular, supóngase que W es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3$ que puede descomponerse en una unión finita de conjuntos, $W = W^1 \cup \cdots \cup W^m$, que ***no se solapan****, es decir, tales que $\operatorname{Int} W^i \cap \operatorname{Int} W^j = \varnothing$ siempre que $i \neq j$. Suponemos adicionalmente que las fronteras de los W^i son conjuntos despreciables para la integración triple (esta última hipótesis se cumple siempre que los W^i son regiones tridimensionales simples).*

Entonces se cumple la siguiente propiedad aditiva: si $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada e integrable sobre cada uno de los W^i, también es integrable sobre W; y viceversa, si es integrable sobre W, también es integrable sobre cada W^i; además, en este caso

$$\iiint\limits_W f = \iiint\limits_{W^1} f + \cdots + \iiint\limits_{W^m} f.$$

Teorema 4.8 (del valor medio para integrales triples) *Si $W \subset \mathbb{R}^3$ es una región simple tridimensional y $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe algún punto $\boldsymbol{c_0} \in W$ para el que*

$$\iiint\limits_W f = V(W) f(\boldsymbol{c_0}).$$

Teorema 4.9 (del cambio de variable para integrales triples) *Sean Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ cerrado y acotado, y N un subconjunto de Ω que contiene a la $\operatorname{Fr}\Omega$ y es despreciables para la integración. Supóngase además que $\boldsymbol{T} : \Omega \longrightarrow \boldsymbol{T}(\Omega) = W$ una aplicación de clase $\mathscr{C}^1$ tal que*

1. *$\boldsymbol{T}$ es inyectiva sobre $\Omega \backslash N$,*
2. *para todo $(u, v, w) \in \Omega \backslash N$, $\det J\boldsymbol{T}(u, v, w) \neq 0$.*

Entonces, si $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua sobre $\boldsymbol{T}(\Omega \backslash N)$, la función $f \circ \boldsymbol{T}\,|\det J\boldsymbol{T}|$ también es integrable sobre Ω y se verifica la igualdad

$$\iint\limits_{W = \boldsymbol{T}(\Omega)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Omega} (f \circ \boldsymbol{T})(u, v, w)\,|\det J\boldsymbol{T}(u, v, w)|\,du\,dv\,dw.$$

Aquí son trasladables comentarios análogos a los que siguen al teorema 2.35.

4.3 EJEMPLOS

Ejemplo 4.10 Calcular $\iiint_W z\,dV$, donde W es la región del octante positivo limitada además por el plano $z = 4$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Lo primero es traducir a términos técnicos la descripción que nos da el enunciado del conjunto W, identificando las desigualdades que describen a W.

106. Cuando la descripción pueda dar lugar a varios subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ (o de $\mathbb{R}^2$, si es el caso) y solamente sea acotado uno de ellos, se entenderá que el enunciado se refiere a ese conjunto acotado.

Como W está contenido en el octante positivo, todos sus puntos cumplen las inecuaciones $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$. Además hay dos alternativas, una es $z \geq 4$ o $z \leq 4$; y la otra $z \geq x^2 + y^2$ o $z \leq x^2 + y^2$. Por tanto hay en principio cuatro casos posibles, conjugando las desigualdades de las dos alternativas.

Hay tres de esos casos que no dan conjuntos acotados, lo que puede demostrarse comprobando que

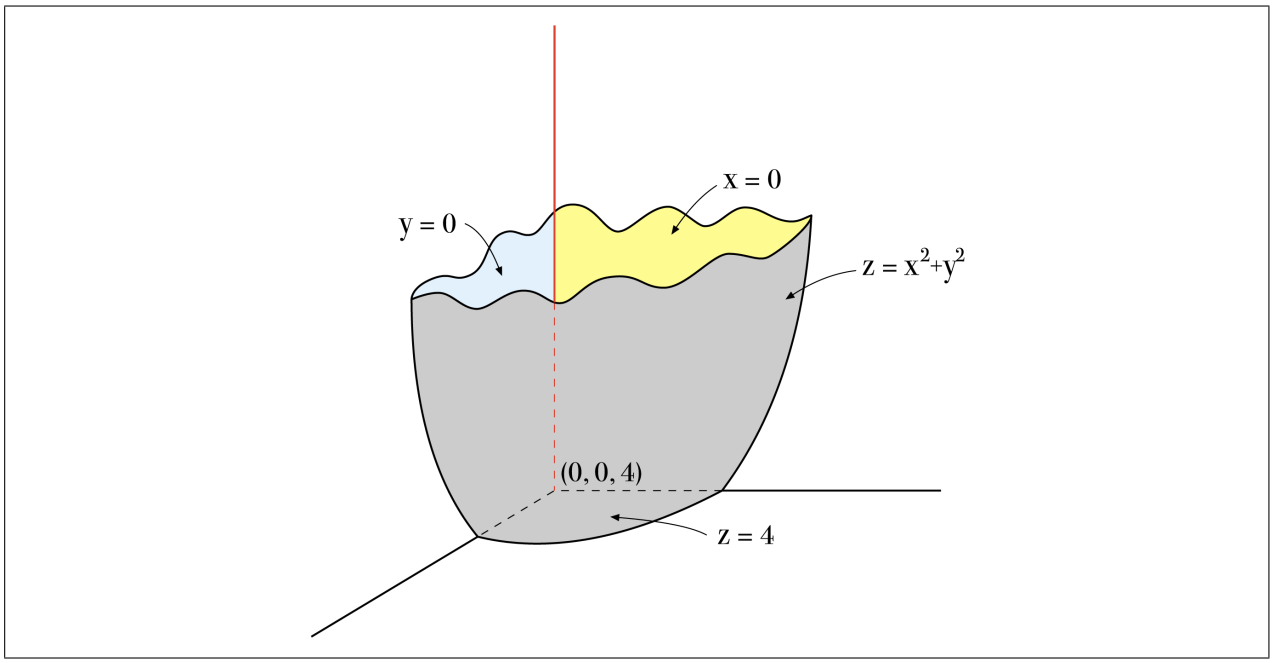


Figura 4.2: La semirrecta $x = 0$, $y = 0$, $z \geq 4$ (en rojo) en un conjunto no acotado contenido en el definido por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq x^2 + y^2$

contienen un conjunto que sepamos que no es acotado. Por ejemplo, el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 4,\ z \geq x^2 + y^2\}$$

contiene a todo la semirrecta $x = 0$, $y = 0$, $z \geq 4$.

En cambio,

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 4 \geq z \geq x^2 + y^2\},$$

es acotado. En efecto, la coordenada z está claramente acotada por 0 y por 4; además $0 \leq x \leq 2$, puesto que $x^2 \leq 4$, y con y ocurre lo mismo que con x. Por consiguiente, un punto cualquiera del espacio, (x, y, z), pertenece al W del enunciado si y sólo si $x \geq 0$, $y \geq 0$, $4 \geq z \geq x^2 + y^2$.

Pasamos ahora al cálculo de la integral pedida, haciendo uso del teorema 4.4. Tenemos varias posibilidades, concretamente 12, tal como se explica a continuación del teorema 4.4. Vamos a elegir dos de ellas para mostrar cómo hacer todos los cálculos.

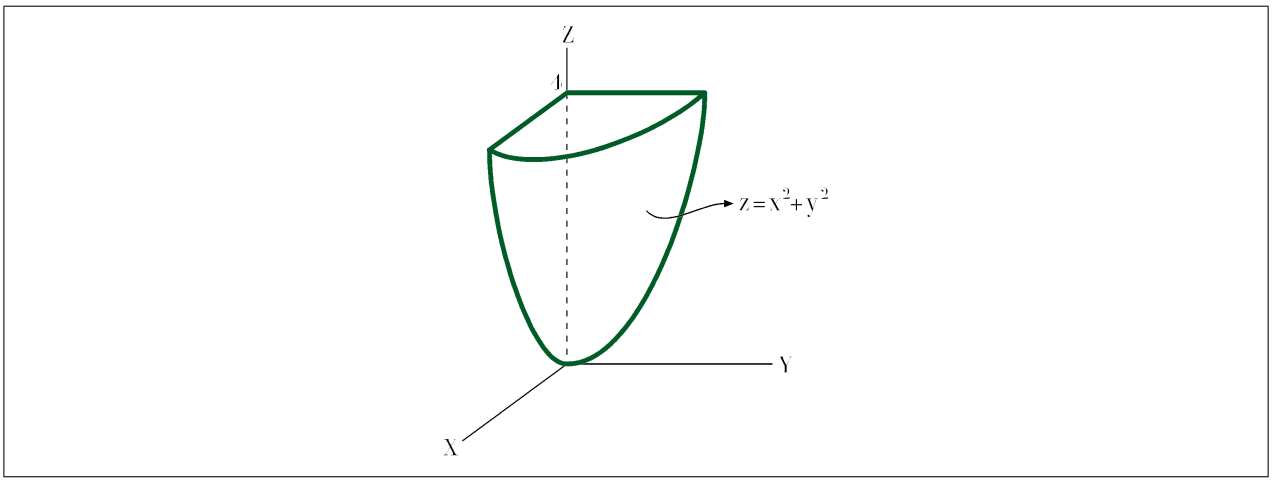


Figura 4.3: El conjunto W es la parte del octante positivo limitada por el plano $z = 4$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$

- Una integral doble y después una sencilla.

  Cortamos W con planos horizontales, $z = z_0$, para obtener las secciones

$$W_{z_0} = \{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z_0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\} \quad (\text{para } z_0 \in [0, 4]),$$

  que son cuartos de círculo situados en el plano horizontal $z = z_0$ y de radio igual a $\sqrt{z_0}$. Podemos

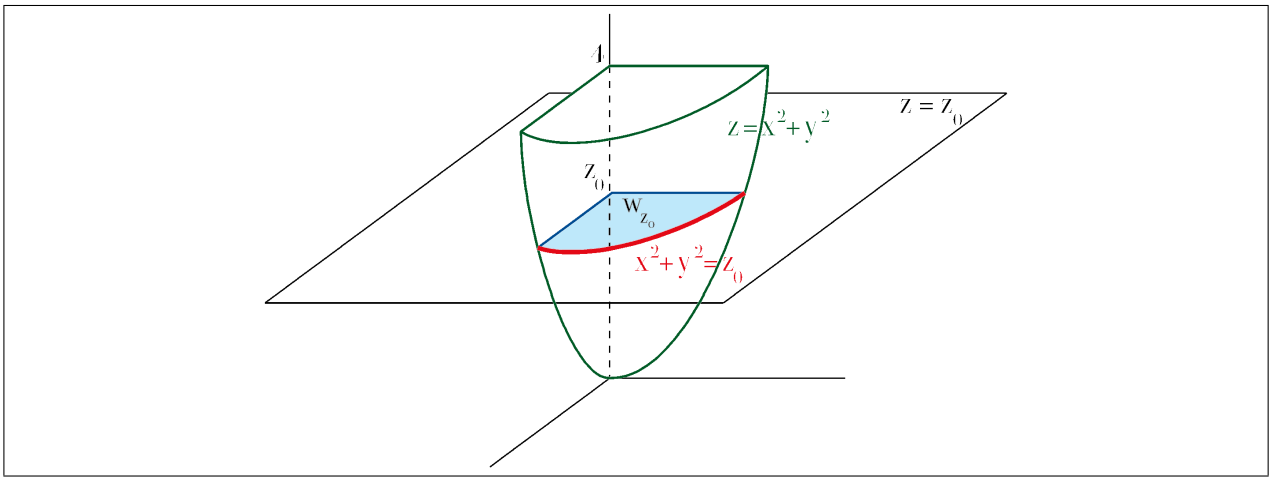


Figura 4.4: La parte curva que limita a W_{z_0} (en rojo) está contenida en el paraboloide, por lo que sus puntos cumplen la ecuación $x^2 + y^2 = z_0$

  calcular el área de cada uno de estos W_{z_0}, que nos dará $\pi z_0/4$.

  Entonces

$$\iiint_W z\, dV = \int_0^4 \left(\iint_{W_z} z\, dx\, dy \right) dz = \int_0^4 z A(W_z)\, dz = \int_0^4 \frac{\pi z^2}{4}\, dz = \frac{16}{3}\pi.$$

- Tres integrales sencillas.

  Pretendemos hacer una descripción de W mediante desigualdades, tal como establece la definición 4.3. Es claro que una descripción equivalente de W viene dada por

$$a = 0 \leq x \leq 2 = b$$
$$\varphi_1(x) = 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} = \varphi_2(x)$$
$$\alpha(x, y) = x^2 + y^2 \leq z \leq 4 = \beta(x, y).$$

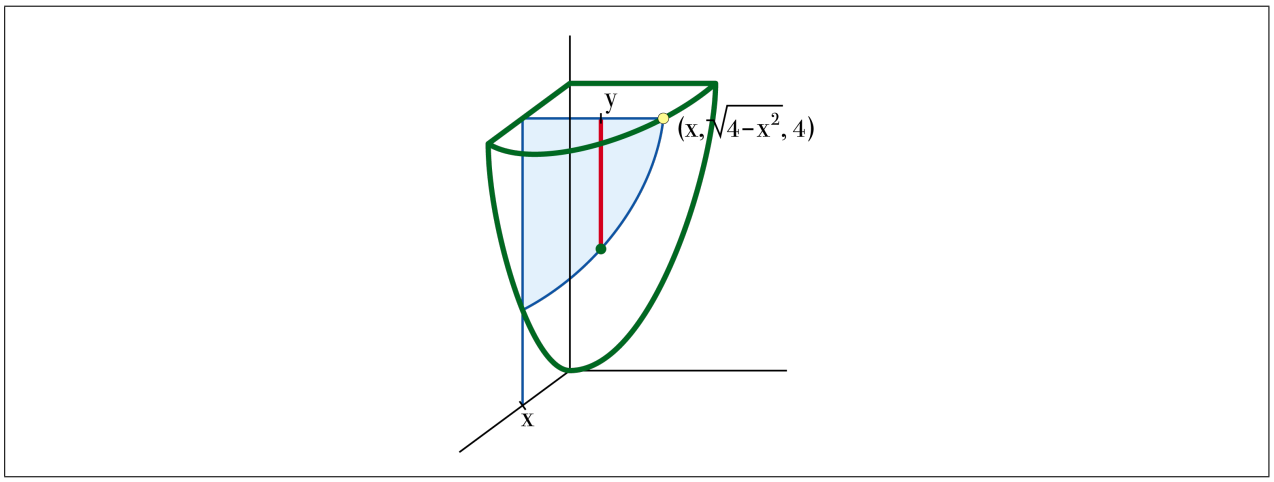


Figura 4.5: Una vez fijado x, el corte con W es la región señalada en azul. Entonces el valor mínimo de y es 0 y el máximo se alcanza en el punto amarillo. Si a continuación elegimos un y entre 0 y $\sqrt{4-x^2}$, el corte con la región azul es el segmento rojo, luego z, cuyo máximo es 4, alcanza su mínimo en el punto verde. El punto verde está sobre el paraboloide, luego ha de cumplir la igualdad $x^2+y^2=z$

Se comprueba de manera rutinaria que efectivamente este sistema de seis inecuaciones es equivalente al de cuatro inecuaciones que definen a W; que las funciones φ_1, φ_2, α y β son continuas (son polinomios o raíces cuadradas de polinomios); y que $a \le b$ (trivial), $\varphi_1 \le \varphi_2$ (trivial), $\alpha \le \beta$ (α y β sólo se aplican a puntos (x,y) que cumplan las cuatro primeras desigualdades, entre ellas $y \le \sqrt{4-x^2}$, por lo que $x^2+y^2 \le 4$ también es trivial). Entonces

$$\iiint_W z\,dV = \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^4 z\,dz \right) dy \right] dx = \frac{16}{3}\pi,$$

según cálculo obtenido directamente por Sage. Observamos a continuación lo largo que resulta hacer las operaciones a mano, con un considerable consumo de tiempo y el consiguiente riesgo de errores. Al final tenemos que recurrir a las fórmulas de recurrencia para las primitivas de $\sin^n t \cos^m t$ (anexo M), tras haber introducido el cambio de variable $x = 2\sin t$:

$$\begin{aligned}
\iiint_W z\,dV &= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^4 z\,dz \right) dy \right] dx = \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2}\left[16-(x^2+y^2)^2\right] dy \right) dx = \\
&= \int_0^2 \left[8y - \frac{x^4 y}{2} - \frac{x^2 y^3}{3} - \frac{y^5}{10} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx = \\
&= \int_0^2 \left[8(4-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^4(4-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^2(4-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{10}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} \right] dx = \\
&= \int^{2\pi} \left[32\cos^2 t - 32\sin^4 t\cos^2 t - \frac{64}{3}\sin^2 t\cos^4 t - \frac{32}{5}\cos^6 t \right] dt = \frac{16}{3}\pi.
\end{aligned}$$

■

107. Dada una región simple de la que se conocen las ecuaciones que definen sus límites, no siempre es evidente cómo obtener las desigualdades necesarias para calcular una integral sobre ella en un determinado orden.

Ejemplo 4.11 (Ejemplo 5.6.6 de [15], cambiando los órdenes de integración en todas sus posibilidades.) Calcular el volumen del conjunto W definido por las desigualdades

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x, \quad x^2 + y^2 \le z \le 2.$$

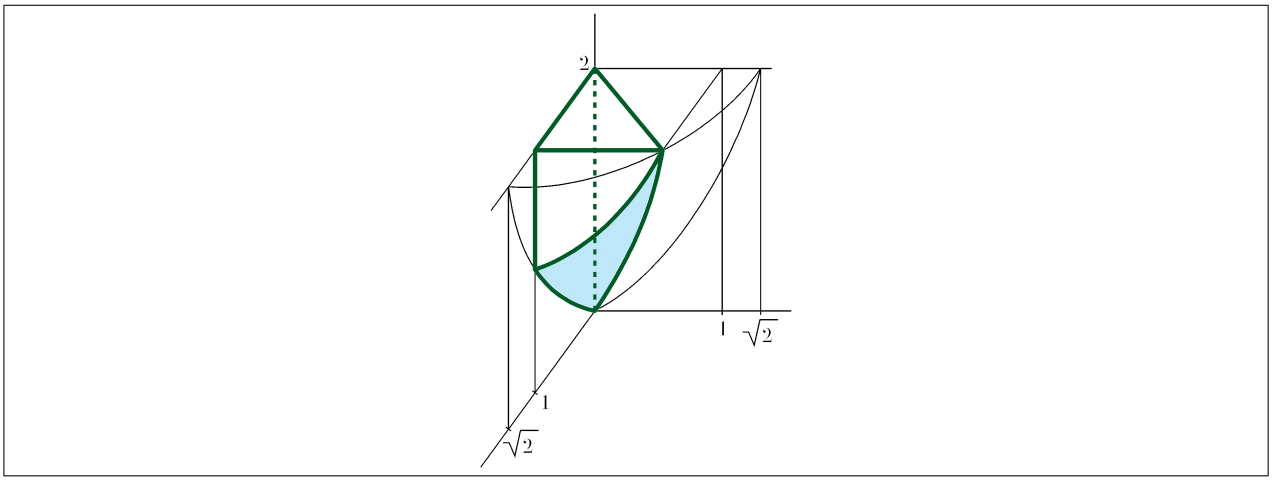


Figura 4.6: Cuatro de las caras del W son planas. La quinta (en azul) forma parte del paraboloide

Plantearemos el cálculo en varias formas, con todas las ordenaciones posibles de las tres variables.

- orden de integración (z, y, x):

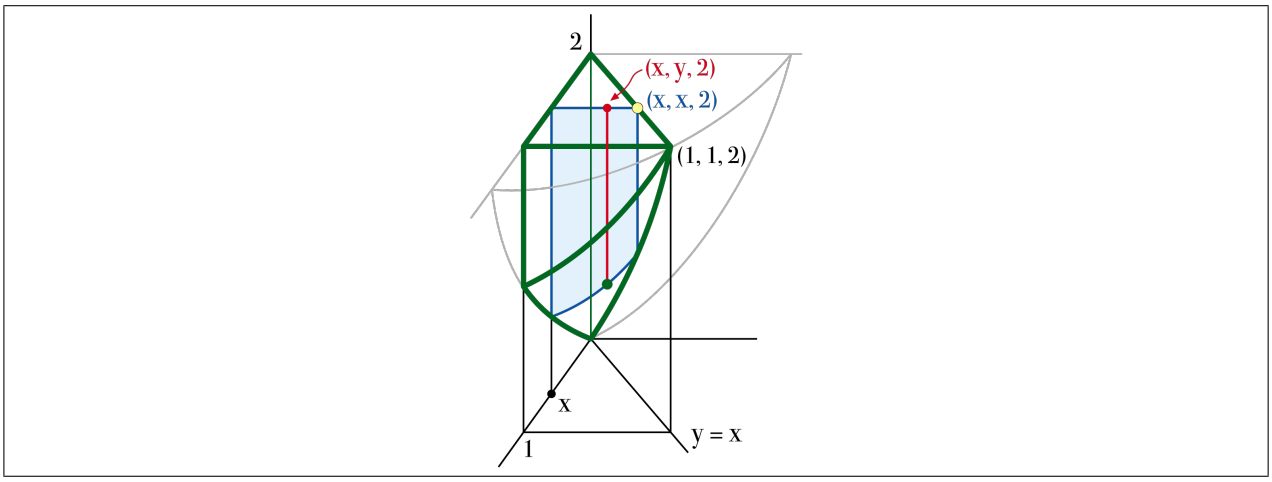


Figura 4.7: Una vez fijado x, el corte con W es la región señalada en azul. Entonces el valor mínimo de y es siempre 0 y el máximo se alcanza en el punto amarillo ($y = x$). Si a continuación elegimos un y entre 0 y x, el corte es el segmento rojo, luego z, cuyo máximo es siempre 2, alcanza su mínimo en el punto verde. El punto verde está sobre el paraboloide, luego ha de cumplir la igualdad $x^2 + y^2 = z$

$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\} \subset \mathbb{R}^2$, que es la proyección de W sobre el plano XY, es una región simple 2-dimensional. La integral se calcula fácilmente y se obtiene el valor $2/3$:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_{x^2+y^2}^2 dz = \int_0^1 dx \int_0^x (2 - x^2 - y^2)\, dy = \int_0^1 \left(2x - \frac{4}{3}x^3\right) dx = \frac{2}{3}.$$

- orden de integración (x, z, y):

  Una forma de calcular los extremos de integración es razonando sobre el dibujo, tal como se hace en la figura 4.8. Suele ser muy útil siempre que dispongamos de un dibujo que nos ayude a visualizar la forma de las secciones. No obstante, hay que tener presente que las figuras pueden ser de una gran ayuda pero también pueden dar lugar a equívocos.

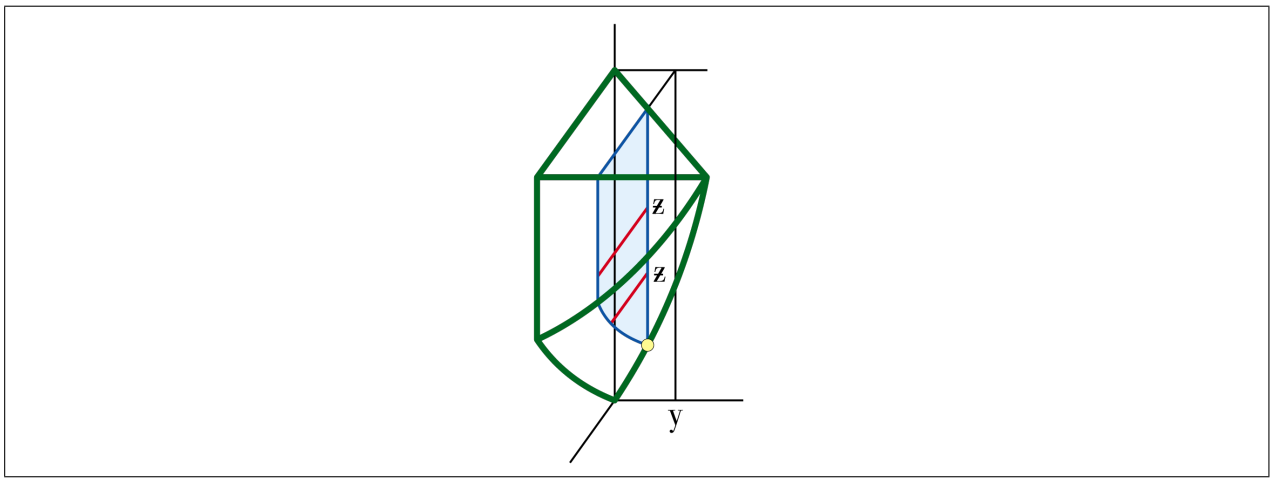


Figura 4.8: Una vez fijado y, el corte con W es la región señalada en azul. Entonces el valor máximo de z es 2 y el mínimo se alcanza en el punto amarillo ($y = x$, $z = x^2 + y^2$, luego $z = 2y^2$). Si a continuación elegimos un z entre $2y^2$ y 2, el corte es uno de los segmentos rojos, donde el mínimo valor de x es siempre y, pero el máximo valor de x tiene dos posibilidades bien diferenciadas: es o 1 (para los z altos) o es $\sqrt{z - y^2}$ (para los z bajos).
El argumento sobre la figura ayuda a encontrar los extremos de integración, pero no constituye una demostración.

108 . Los argumentos rigurosos deben pasar siempre por verificar las desigualdades, para asegurarnos de que la vista no nos está engañando. Y, a la inversa, los dibujos nos ayudan a comprobar que no hemos cometido errores en los cálculos con desigualdades.

Del sistema original de inecuaciones que describe a D se deduce inmediatamente este otro:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \\ x^2 + y^2 \le z \le 2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le z \le 2 \\ y \le x \le \sqrt{z - y^2} \end{array}\right.$$

pero del segundo no se recupera el primero: la desigualdad $x \le 1$ no se puede obtener.

109 . Recurrimos a la expresión $y \le \min\{\dots,\dots\}$ porque necesitamos obtener una única desigualdad de la forma "y menor o igual que una función continua de x, z", y sabemos que el mínimo de dos funciones continuas es otra función continua.

Por tanto, para tener equivalencia entre los dos sistemas hay que sustituir la última inecuación por $x \le \min\{1, \sqrt{z - y^2}\}$.

110 . Ahora ambos sistemas son equivalentes, pero todavía queda otro problema si queremos que el nuevo sistema de desigualdades cumpla las condiciones previstas (las de la definición 4.3).

Resulta que sobre la región simple 2-dimensional $D_1 = \{(y, z) : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le z \le 2\}$ la función $\varphi_1(y, z) = y$ no es siempre menor o igual que la función $\varphi_2(y, z) = \min\{1, \sqrt{z - y^2}\}$. Dicho de otra forma: las desigualdades $y \le x \le \sqrt{z - y^2}$ llevan implícita la desigualdad $2y^2 \le z$, que es más exigente que $y^2 \le z$.

Lo que está ocurriendo es que la proyección de W sobre el plano YZ no es toda la región D_1, sino solamente una parte de ella. En efecto, proyectando la curva

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = z \\ y = x \end{array}\right\}$$

sobre el plano YZ no se obtiene la curva $z = y^2$, sino la curva $z = 2y^2$.

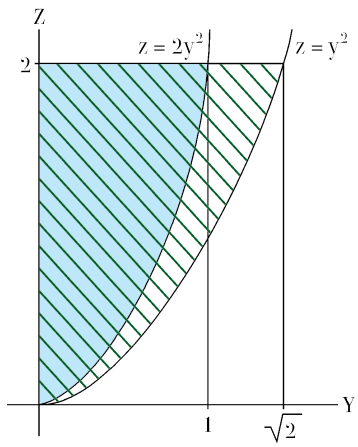


Figura 4.9: Regiones D_1 (trama verde) y D (en azul), ambas en el plano YZ

Para corregirlo sustituimos $y^2 \leq z \leq 2$ por $2y^2 \leq z \leq 2$, con lo que la definición de la región simple 2-dimensional queda así: $D = \{(y, z) : 0 \leq y \leq 1,\ 2y^2 \leq z \leq 2\}$, y sobre este conjunto sí es cierto que $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

El sistema de desigualdades que necesitábamos es, por tanto,

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq y \leq 1 \\ 2y^2 \leq z \leq 2 \\ y \leq x \leq \min\left\{1, \sqrt{z - y^2}\right\} \end{array}\right\}.$$

La figura 4.9 ayuda a visualizar que la proyección de W sobre el plano YZ es efectivamente el conjunto D, y no el que se obtendría con la desigualdad $y^2 \leq z$ en lugar de la desigualdad $2y^2 \leq z$.

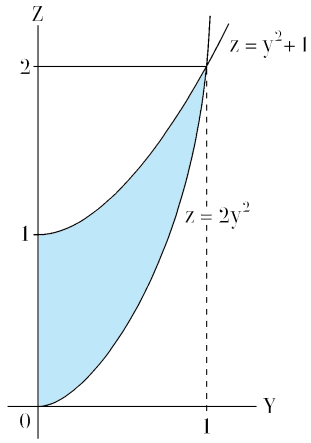


Figura 4.10: El conjunto D dividido según el valor máximo de x. La parte coloreada en azul es la proyección de la parte azul de la figura 4.6, en la que x es menor que 1

Como

$$1 \geq \sqrt{z - y^2} \quad \Leftrightarrow \quad z \leq y^2 + 1 \qquad (\text{puesto que } z \geq y^2),$$

la integral dada es igual a (ver la figura 4.10)

$$\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{y^2+1} dz \int_y^{\sqrt{z-y^2}} dx + \int_0^1 dy \int_{y^2+1}^{2} dz \int_y^1 dx = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{2}{3}.$$

- Orden de integración (y, z, x):

  En primer lugar deducimos la equivalencia

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \\ x^2 + y^2 \le z \le 2 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le z \le 2 \\ 0 \le y \le \min\left\{x, \sqrt{z - x^2}\right\} \end{array}\right.$$

  (observar que en las desigualdades de la derecha no podemos prescindir ni de $y \le x$ ni de $y \le \sqrt{z - x^2}$, ambas las necesitamos para demostrar la implicación hacia la izquierda).

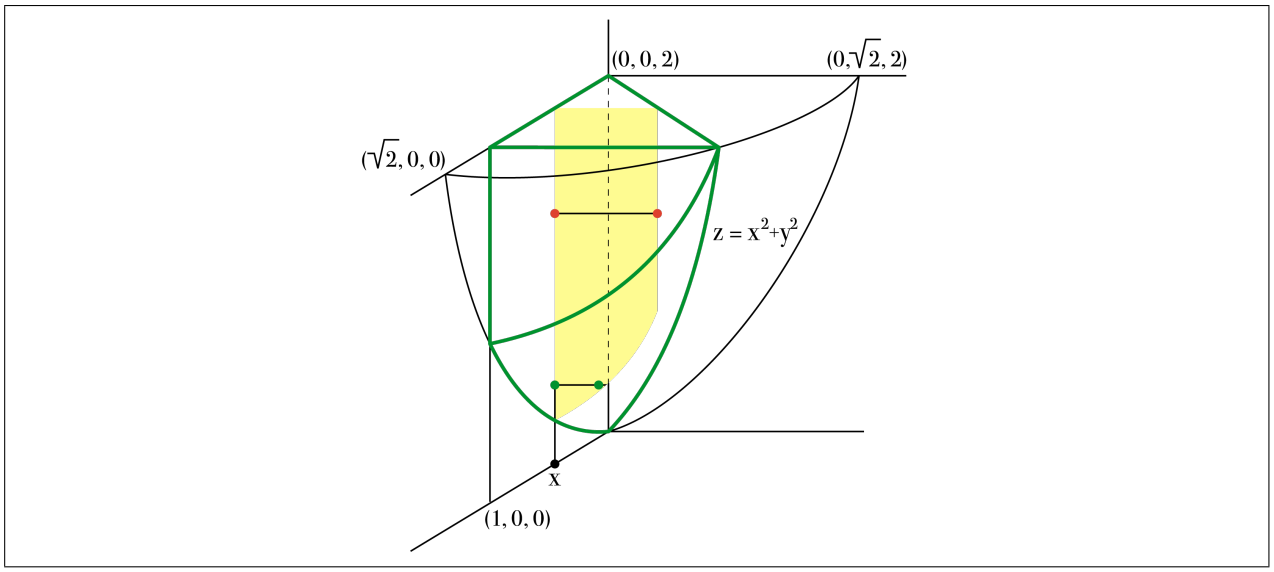


Figura 4.11: Nuestro razonamiento sobre el dibujo es el siguiente:
1. Elegimos un valor x comprendido entre 0 y 1, que es para los que existe algún punto del conjunto W. Elegir el valor x equivale a quedarnos con el corte de W con un plano paralelo al del papel (en la figura este corte aparece en amarillo). Dentro de este corte, los valores de z están limitados por $x^2 \le z \le 2$.
2. Ahora elegimos un valor para la altura z. En la figura hemos señalado dos, uno menor que $2x^2$ (en verde) y otro mayor que $2x^2$, (en rojo).
3. A partir de cada uno de estos dos puntos, trazamos el segmento paralelo al eje Y contenido en W. El rojo termina al encontrarse con el plano $y = x$ (punto rojo de la derecha), mientras que el verde sale de W cuando el segmento alcanza al paraboloide, es decir, cuando $y = \sqrt{z - x^2}$ (punto verde de la derecha).

  Para calcular la integral hemos de descomponerla en una suma y para ello distinguir claramente los casos en que se alcanza el $\min\{x, \sqrt{z - x^2}\}$ en cada una de sus dos posibilidades. Como $x \le \sqrt{z - x^2}$ equivale a $2x^2 \le z$ (gracias a que $x \ge 0$), nuestra integral es igual a

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x^2} dz \int_0^{\sqrt{z-x^2}} dy + \int_0^1 dx \int_{2x^2}^{2} dz \int_0^{x} dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

- Resto de los órdenes de integración:

  Razonando del mismo modo se obtiene los siguientes sistemas de desigualdades (para cada caso, dibújense figuras análogas a la última):

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le z \le 2 \\ 0 \le x \le \min\{1, \sqrt{z}\} \\ 0 \le y \le \min\{x, \sqrt{z - x^2}\} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \\ x^2 + y^2 \le z \le 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq z \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{\dfrac{z}{2}} \\ y \leq x \leq \min\{1, \sqrt{z - y^2}\} \end{array}\right\}.$$

■

4.4 Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas permiten representar cualquier punto del espacio tridimensional mediante unas nuevas variables inspiradas en la distancia al origen y las coordenadas geográficas sobre la superficie terrestre,

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}$$

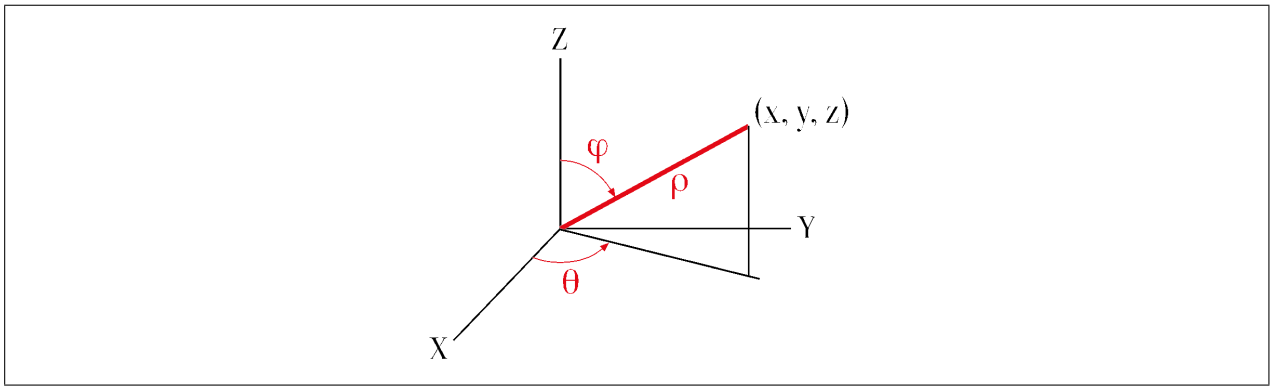


Figura 4.12: Coordenadas esféricas

Hay que advertir que en los libros que tratan de coordenadas esféricas existen algunas variantes, según desde qué ejes se midan los ángulos φ y θ. Al aplicarlas a una situación concreta quizá convenga introducir alguna de esas variantes, como, por ejemplo, cambiar los papeles de x y z, o tomar el ángulo φ a partir del eje de las z negativas, etc.

Por motivos similares a los expuestos para las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$, nos limitaremos a valores positivos de ρ y restringiremos, para empezar, los valores que tomen los ángulos θ y φ a intervalos de amplitud 2π, tomando $[0, 2\pi]$. Pero estas restricciones no son suficientes para evitar duplicidades, todavía hay que reducir más el rango de los ángulos, puesto que, por ejemplo, las nuevas coordenadas del punto $(0, -2, 0)$ son $\rho = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, pero también son $\rho = 2$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Para que estemos en condiciones de aplicar el teorema del cambio de variable será suficiente con que de los dos intervalos donde varían los ángulos θ y φ, uno lo reduzcamos a una amplitud π. Convendremos en llamar **cambio a coordenadas esféricas** a una aplicación definida por las fórmulas expuestas más arriba, $(\rho, \varphi, \theta) \rightsquigarrow (x, y, z)$, con dominio una unión de regiones simples $\Omega \subset [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. En el apartado (K.17) puede consultarse una demostración de que con estas limitaciones se cumplen las hipótesis del teorema del cambio de variable.

Ejemplo 4.12 Cálculo del volumen de la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ (donde a es un número real estrictamente positivo) pasando la integral a coordenadas esféricas.

Queremos calcular $\iiint_W dV$, donde W viene definido por la desigualdad del enunciado. Al pasar a coordenadas esféricas la desigualdad equivale a $\rho^2 \leq a^2$, lo que a su vez equivale a $0 \leq \rho \leq a$, una vez introducida la restricción de que ρ no sea estrictamente negativo. En cuanto a θ y φ, quedan totalmente libres, lo cual significa (tener siempre presentes estas restricciones para los ángulos) que $0 \leq \varphi \leq \pi$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

El jacobiano es

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\varphi,$$

que es siempre positivo gracias la elección que hicimos de recortar φ al intervalo $[0,\pi]$, con lo que en los cambios a esféricas nos podemos olvidar de poner el valor absoluto en el jacobiano, siempre que mantengamos el convenio sobre φ que hicimos más arriba. Ya estamos en condiciones de terminar el cálculo pedido:

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint\limits_W dx\,dy\,dz = \int_0^a \left[\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\varphi\, d\theta \right) d\varphi \right] d\rho = \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^a \Big[-\cos\varphi \Big]_0^\pi = \frac{4}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

■

4.5 COORDENADAS CILÍNDRICAS

Las coordenadas cilíndricas vienen a ser las polares para uno de los planos coordenados a las que se les ha añadido la tercera variable cartesiana. En esta exposición tomaremos la z como esa tercera coordenada, en el bien entendido que según cuál sea el problema que queramos modelizar puede convenirnos que sea alguna de las otras dos variables la que juegue el papel de la z:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

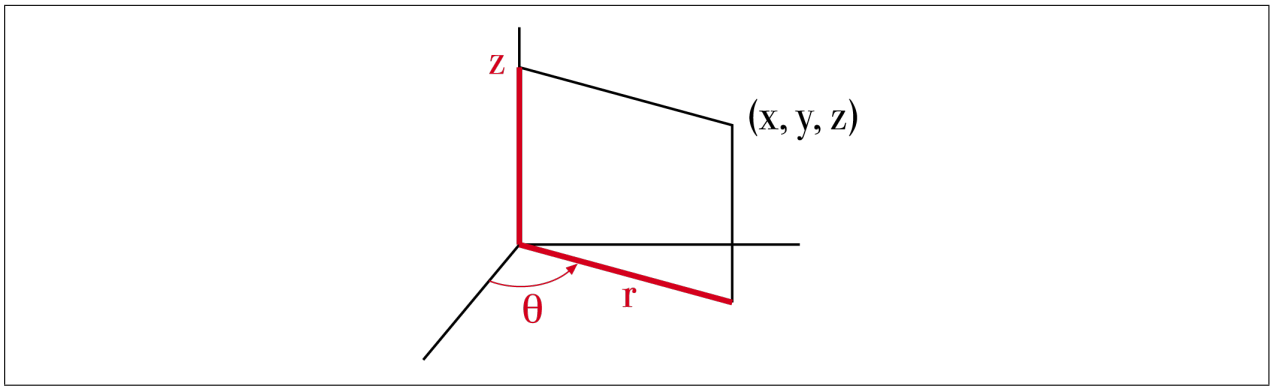


Figura 4.13: Coordenadas cilíndricas

Tal como se explicó al hablar de las coordenadas polares en el plano, utilizaremos algunas restricciones generales en el rango donde varían nuestra nuevas coordenadas. Llamaremos **cambio a coordenadas cilíndricas** a una aplicación definida por las fórmulas de más arriba, $(r, \theta.z) \rightsquigarrow (x, y, z)$, con dominio en una unión finita de regiones simples $\Omega \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.

El jacobiano es

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

que nunca es estrictamente negativo. Se demuestra que se satisfacen las hipótesis del teorema del cambio de variable con razonamientos análogos a los utilizados para demostrarlo para los cambios a polares en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.13 Calcular $\iiint_W z\log(1+x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ sobre el cilindro W definido por las desigualdades $x^2+y^2 \le 9$, $0 \le z \le 1$.

Al pasar a coordenadas cilíndricas (con las cotas que hemos dicho más arriba para r y θ), la descripción del cilindro W es

$$0 \le r \le 3, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 1,$$

luego el valor de la integral es

$$\int_0^3\int_0^1\int_0^{2\pi} z\log(1+r^2)r\;d\theta\,dz\,dr = \Big[\theta\Big]_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_0^1\int_0^3 \log(1+r^2)r\,dr = \pi\int_1^{10}\log t\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}(10\log 10 - 9),$$

donde hemos hecho el cambio $t = 1+r^2$ y después hemos aplicado la fórmula 5 de la tabla de integrales del anexo M. ■

111. En el caso de tres variables, un comentario similar a la observación 61 es válido: un cambio de coordenadas $(u, v, w) \rightsquigarrow (x, y, z)$ consiste, en esencia, en sustituir los tres haces de planos paralelos asociados a las coordenadas cartesianas mediante $x =$ una constante, $y =$ una constante, $z =$ una constante, por tres haces de *superficies* (pueden ser conjuntos no acotados, por lo que no siempre son superficies en el sentido de nuestras definiciones), cada uno de ellos definido por $u =$ una constante, $v =$ una constante, $w =$ una constante.

Para las coordenadas esféricas, los tres haces son

- esferas de centro el origen ($\rho =$ una constante);
- conos de una sola hoja, con vértice en el origen y cuyo eje de rotación es el eje Z ($\varphi =$ una constante);
- semiplanos verticales, con borde en el eje Z ($\theta =$ una constante).

Y para las coordenadas cilíndricas,

- cilindros cuyo eje de rotación es el eje Z ($r =$ una constante);
- planos horizontales ($z =$ una constante);
- semiplanos verticales, con borde en el eje Z ($\theta =$ una constante).

4.6 Teorema de la Divergencia

El teorema de la Divergencia, también llamado de Gauss, o de Ostrogradski, proporciona una fórmula que relaciona una integral triple sobre un subconjunto en $\mathbb{R}^3$ con una integral de superficie sobre la frontera del conjunto. Es, pues, un resultado del tipo de la regla de Barrow o de la fórmula de Green-Riemann, pero en dimensión 3.

La fórmula no es difícil de demostrar... una vez que se han precisado las condiciones para que todos los elementos que aparecen en la misma estén correctamente definidos.

Seguiremos un esquema análogo al que aplicamos para el teorema de Green-Riemann. Primero probaremos la fórmula bajo hipótesis que nos faciliten la demostración pero que serán muy restrictivas en cuanto a los dominios de integración, para después ampliar la validez de la fórmula a otras muchas regiones, pero sin hacer las demostraciones, sino dando una referencia o explicando cómo actuar llegado el caso.

4.6.1. Fórmula de la Divergencia

Comenzamos considerando un conjunto $W \subset \mathbb{R}^3$ que sea un paralelepípedo o, más en general, una región simple en las direcciones de los tres ejes coordenados y *cuya frontera ∂W sea en su totalidad una superficie* de las descritas en la definición 3.10 ([155]) con la condición adicional de que las seis gráficas que limitan a W, dos en cada dirección, sean superficies dadas en forma explícita, tal como se describen en el ejemplo 3.6.

Como es simple en la dirección de las z, el conjunto W puede escribirse de la forma $W = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$, donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región simple bidimensional. Pero $\alpha, \beta : D \longrightarrow \mathbb{R}$, (con $\alpha \leq \beta$) son funciones no solamente continuas, como exigíamos en la definición 4.3, sino que ahora *vamos a suponer que son de clase $\mathscr{C}^1$*, para que las igualdades $z = \alpha(x, y)$, $z = \beta(x, y)$ definan superficies en forma explícita mediante las funciones α y β, ver ejemplo 3.6. Todavía impondremos una condición más: que *sobre* $\operatorname{Int} D$ *se tenga siempre $\alpha < \beta$, estrictamente.*

Entonces, por el teorema análogo al 2.20, $\partial W = \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \cup \Sigma_0$, donde

$$\begin{aligned}
\Sigma_\alpha &= \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ z = \alpha(x, y)\} \\
\Sigma_\beta &= \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ z = \beta(x, y)\} \\
\Sigma_0 &= \{(x, y, z) : (x, y) \in \partial D,\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},
\end{aligned}$$

Estas tres partes de ∂W no tienen por qué ser disjuntas, pero sus intersecciones dos a dos resultarán despreciables para la integración de superficies, puesto que son curvas, o subconjuntos de curvas, en $\mathbb{R}^3$.

Insistamos en que una de las exigentes hipótesis que estamos imponiendo es que los conjuntos Σ_α y Σ_β son superficies explícitas descritas por las funciones α y β, respectivamente.

Definición 4.14 *Con las notaciones anteriores, si $\boldsymbol{p}$ es un punto de Σ_β la* ***normal exterior a ∂W en $\boldsymbol{p}$*** *es la normal unitaria que tiene la tercera coordenada positiva (es decir, corresponde a la orientación positiva de la definición 3.25). Y si $\boldsymbol{p} \in \Sigma_\alpha$, la* ***normal exterior a ∂W en $\boldsymbol{p}$*** *es la normal unitaria que tiene la tercera coordenada negativa (es decir, corresponde a la orientación negativa de la definición 3.25).*

El nombre de normal "exterior" hace referencia a que desde el punto $\boldsymbol{p}$ esta normal unitaria apunta hacia fuera del conjunto W. Lo mismo ocurría en la definición 2.44, donde introdujimos la normal exterior para puntos del borde de un conjunto bidimensional.

★ **112**. Supondremos, sin demostrarlo, que la definición 4.14 aplicada sobre las seis superficies, dos en cada dirección, induce una orientación sobre la superficie total ∂W, que llamaremos **orientación exterior (o positiva) de ∂W, ∂W^+**.

El siguiente resultado resulta obvio en una figura, pero no es tan obvio en el razonamiento formal, por lo que necesita ser demostrado.

[155] Esta condición es la equivalente tridimensional a la impuesta en la observación 65.

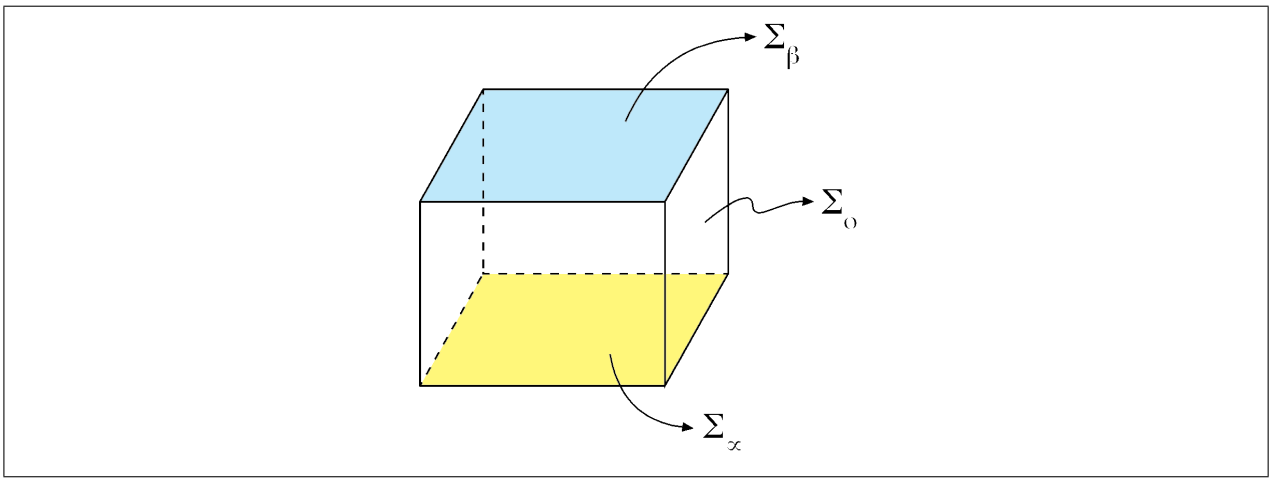


Figura 4.14: Conjunto W, en el que se han coloreado la cara superior Σ_β (en azul) y la cara inferior Σ_α (en amarillo). Las cuatro caras laterales forman Σ_0

Lema 4.15 *Tómese un punto $\boldsymbol{p} \in \partial W$ en el que exista recta normal a la superficie ∂W. Si $\boldsymbol{p}$ pertenece a $\partial W \backslash (\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta)$ entonces la recta normal es horizontal.*

★ DEMOSTRACIÓN: *Ver el apartado (K.18).*

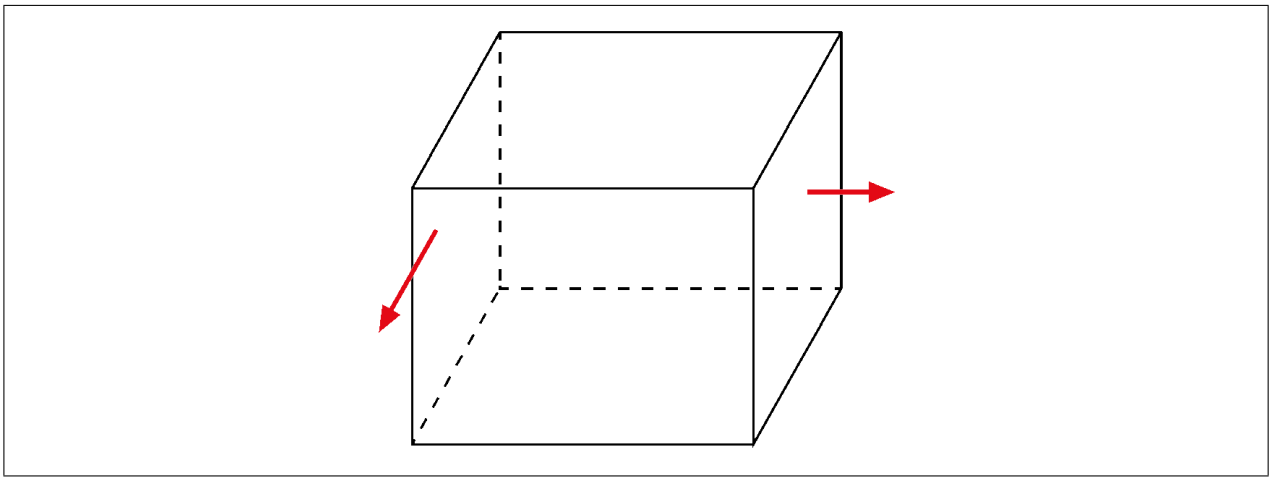


Figura 4.15: Rectas normales en puntos de Σ_0. Siempre son horizontales, pues de lo contrario el punto pertenecería a Σ_α o a Σ_β

113. Supondremos también sin demostrar que Σ_0 es orientable ([156]). Elegiremos sobre Σ_0 una orientación que sea compatible con la orientación exterior de ∂W, cosa que siempre es posible. En realidad, gracias al lema 4.15, la orientación que demos a Σ_0^+ será irrelevante.

Teorema 4.16 (de la Divergencia) *Sea W una región simple en $\mathbb{R}^3$ con todas las condiciones descritas en la introducción a este apartado, y sea $\boldsymbol{F} : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$ definido sobre W. Entonces*

$$\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_W \operatorname{div} \boldsymbol{F} \; dx\, dy\, dz = \iiint_W \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} \; dV \; .$$

[156] Mejor dicho, la parte de Σ_0 que forme una superficie, que contendrá a $\partial W \backslash (\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta)$. Obsérvese que este conjunto podría ser vacío, basta pensar en el conjunto W definido por $1 \leq x$, $1 \leq y$, $1 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

DEMOSTRACIÓN: *Demostraremos en primer lugar que*

$$\iint\limits_{\partial W^+} (0,0,F_3)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{W} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV.$$

De acuerdo con la descomposición de ∂W^+ que hemos explicado,

$$\iint\limits_{\partial W^+} (0,0,F_3)\cdot d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma_\beta^+} (0,0,F_3)\cdot d\boldsymbol{S} - \iint\limits_{\Sigma_\alpha^+} (0,0,F_3)\cdot d\boldsymbol{S} + \iint\limits_{\Sigma_0^+} (0,0,F_3)\cdot d\boldsymbol{S},$$

donde la última integral es nula puesto que, como se ha demostrado en el lema 4.15, sobre Σ_0 todas las normales que existan son ortogonales a $(0,0,F_3)$. En cuanto a las otras dos integrales, usamos las expresiones explícitas de Σ_β^+ y de Σ_α^- para obtener

$$\iint\limits_{\partial W^+} (0,0,F_3)\cdot d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{D} \left[F_3(x,y,\beta(x,y)) - F_3(x,y,\alpha(x,y))\right]\, dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{D} dx\, dy \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz = \iiint\limits_{W} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Una vez alcanzado nuestro primer objetivo, observamos que por simetría de las hipótesis, que no distinguen a la coordenada z de las otras dos, podemos concluir fórmulas análogas para las otras dos coordenadas,

$$\iint\limits_{\partial W^+} (0,F_2,0)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{W} \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dV$$

$$\iint\limits_{\partial W^+} (F_1,0,0)\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{W} \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dV,$$

y sumando las tres fórmulas obtendremos la de la divergencia.

★ La demostración puede adaptarse, con algo de trabajo, al caso de que α y β sean solamente continuas, igual que ocurre con la demostración del teorema de Green-Riemann (2.39), manteniendo, eso sí, la hipótesis de que ∂W sea una superficie orientada de acuerdo con nuestras definiciones 3.10 y 3.26. Entonces la orientación elegida tiene que seguir siendo la exterior a W, en el mismo sentido que antes, es decir, si desde un punto de ∂W nos movemos un infinitésimo ([157]) siguiendo la normal unitaria exterior a W, nos saldremos de W. ([158])

114. Estas hipótesis menos exigentes se dan, por ejemplo cuando W es una esfera ([159]). O cuando es un cilindro con tapas, como el del ejemplo 3.4.

La situación es muy similar a la que nos encontramos tras probar el teorema de Green-Riemann o el de Stokes. Al igual que hicimos tras demostrar la fórmula de Green-Riemann, nos limitaremos a explicar brevemente cómo actuar cuando queramos aplicar la fórmula sobre un conjunto que no cumpla todas las hipótesis del teorema 4.16:

Cuando Σ_α y Σ_β sean superficies del tipo de las del ejemplo 3.27, pero alguna de las funciones α o β (o las dos) carezcan de las propiedades de diferenciabilidad necesarias para que nos sirvan para parametrizarlas, la fórmula de la divergencia todavía puede probarse con una ligera modificación de la demostración

[157] Como ahora W podría no ser convexo, la condición de que la normal unitaria apunta hace fuera de W podría ser ambigua, por lo que solamente exigiremos que apunte hacia fuera una normal que sea de tamaño infinitesimal: $\forall \varepsilon \approx 0,\ \varepsilon > 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{p} + \varepsilon \boldsymbol{N_p} \notin W$.

[158] Para los detalles de la demostración ver [2], teorema 10.5.1.

[159] Si W es la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, las funciones β y α son $z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, que no son derivables en los puntos en los que $x^2+y^2=a^2$. Lo que no quita para que cada semiesfera sea una superficie (usar una parametrización mediante coordenadas esféricas o mediante una proyección estereográfica).

anterior ([160]).

115. La tesis del teorema de la divergencia se cumple bajo condiciones mucho menos restrictivas que las del enunciado, varias de las cuales se han introducido aquí con el único objetivo de simplificar la demostración.
Hay muy pocos conjuntos en $\mathbb{R}^3$ que cumplan todas las hipótesis que hemos puesto en el teorema de la divergencia, mientras que la fórmula es de amplia aplicación.

Pueden trasladarse aquí las generalizaciones que hicimos en el apartado 2.5.3, con las adaptaciones necesarias para pasar a una dimensión más ([161]).

Será especialmente útil el caso de que, mediante un número finito de cortes planos, un subconjunto $W \subset \mathbb{R}^3$ pueda descomponerse en regiones que verifican las hipótesis del teorema 4.16. Se aplica el teorema sobre cada región y sumando se obtiene la fórmula de la divergencia sobre W, para una cierta orientación de ∂W que se llama también orientación exterior. El motivo para que el procedimiento funcione es que sobre las superficies que surgen al dar los cortes integraremos dos veces, una en cada sentido, por lo que cuando se sumen todos los términos, se cancelarán (de manera similar a lo que vimos en el apartado 2.5.3(4)).

4.6.2. Aplicaciones del teorema de la divergencia

Como ocurre con los demás teoremas clásicos del cálculo vectorial, el de la divergencia tiene múltiples aplicaciones. Probaremos algunas y remitimos al anexo H para la exposición de otras más.

FÓRMULAS DE VOLÚMENES

Comenzamos con varias fórmulas sobre volúmenes. Si tomamos como campo vectorial la identidad, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$, la divergencia es constantemente igual a 3. En efecto, puesto que $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y, z)$,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Por consiguiente, si W es un conjunto sobre el que es válida la fórmula de la divergencia,

$$V(W) = \frac{1}{3} \iint_{\partial W^+} (x, y, z) \cdot d\boldsymbol{S},$$

que nos proporciona el volumen de W a través de un cálculo no sobre W, sino sobre su frontera ([162]). Por ejemplo, para una esfera de centro el origen y radio R, la normal unitaria exterior en un punto (x, y, z) de la superficie esférica es $(x/R, y/R, z/R)$, luego

$$V(\text{esfera de radio } R) = \frac{1}{3} \iint_{\partial W} (x, y, z) \cdot \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right) \, d\sigma = \frac{1}{3} \iint_{\partial W} \frac{\|(x, y, z)\|^2}{R} \, d\sigma =$$
$$= \frac{1}{3} \iint_{\partial W} R \, d\sigma = \frac{R}{3} \, A(\text{superficie esférica de radio } R).$$

Otro ejemplo similar al de la esfera, pero más interesante, es el de un cono o una pirámide. Considérese un conjunto $W \subset \mathbb{R}^3$ que pueda describirse mediante

$$W = \{(tx, ty, th) : 0 \le t \le 1, \ (x, y, h) \in B\},$$

donde B es un conjunto contenido en el plano $z = h$ y con un borde ∂B que es una curva cerrada simple. En estas condiciones, diremos que el conjunto W es **un cono (o una pirámide) con vértice el origen, con base B y con altura h**.

[160] Esta situación se da, por ejemplo, con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, como hemos comentado en la anterior nota a pie de página. Ver [2], Theorem 10.5.1.

[161] Si bien hay que reconocer que al incrementar la dimensión pueden aparecer algunas diferencias. Por ejemplo, no hará falta introducir una observación análoga a la 66, por la sencilla razón de que en nuestra definición de superficie caben objetos formados por lo que podríamos llamar dos partes separadas, cosa que no ocurría con las curvas cerradas simples.

[162] Esta fórmula es del mismo estilo que la del corolario 2.46, pero con una dimensión más.

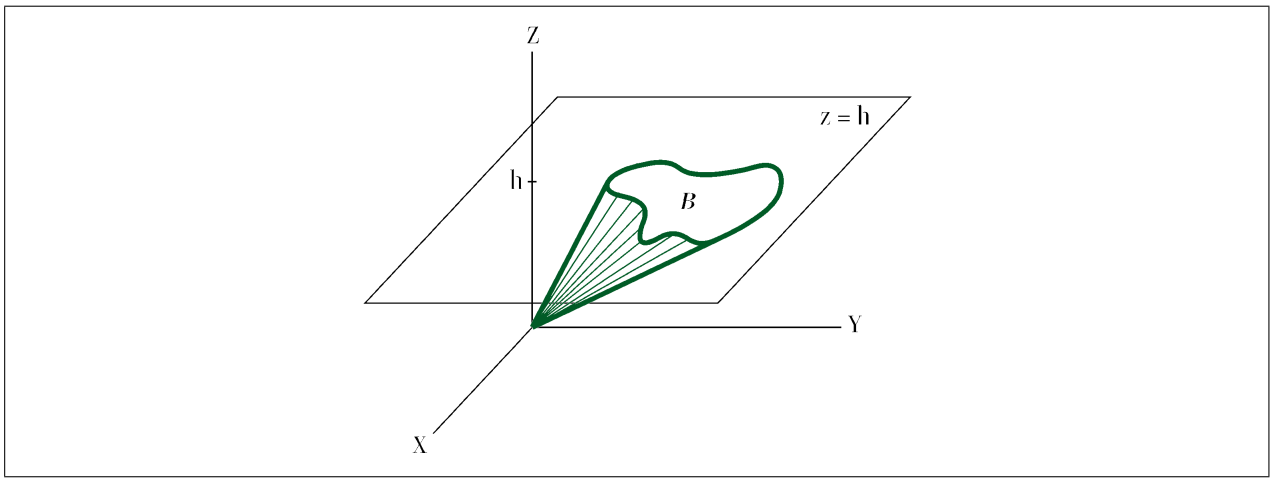


Figura 4.16: Cono de base B y altura h

Ahora podemos dar un paso más en la igualdad obtenida antes para el volumen, siempre bajo la hipótesis de que la fórmula de la divergencia es válida sobre W. Para ello observamos que $\partial W = B \cup L$ (esta afirmación requiere una demostración), donde B es la base del cono y L es la superficie lateral del cono generada por las rectas que unen el vértice con los puntos del borde de B como subconjunto del plano $z = h$, ∂B.

Tanto B como L son superficies ([163]), por tanto,

$$\iint_{\partial W^+} (x, y, z) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_B (x, y, z) \cdot \boldsymbol{N}_B \, d\sigma + \iint_L (x, y, z) \cdot \boldsymbol{N}_L \, d\sigma,$$

donde $\boldsymbol{N}_B$ y $\boldsymbol{N}_L$ son las normales unitarias exteriores. Ahora bien, sobre un punto $(x, y, z) \in L$ cualquier normal es ortogonal a la generatriz ([164]), luego la normal exterior es siempre ortogonal al vector (x, y, z), y en consecuencia el segundo sumando es nulo. En cuanto al primero, la normal exterior es perpendicular a B y tiene la tercera coordenada positiva. Por tanto todos los productos escalares $(x, y, z) \cdot \boldsymbol{N}_B$ coinciden con la distancia que hay desde el vértice hasta el plano $z = h$, es decir, son constantemente iguales a la altura del cono, h. Resumiendo,

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3} \, A(\text{base del cono}) \times \text{altura del cono}. \qquad ([165])$$

Lema de Gauss

Concluimos esta muestra de aplicaciones del teorema de la divergencia con un resultado que se debe a Gauss y que es útil en electromagnetismo.

Teorema 4.17 (lema de Gauss) *Sea W un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^3$ sobre el que es válida la fórmula de la divergencia y tal que $\mathbf{0} \notin \partial W$. Entonces*

$$\iint_{\partial W^+} \frac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|^3} \cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 4\pi & si \ \mathbf{0} \in W \\ 0 & si \ \mathbf{0} \notin W \end{cases}$$

[163] B es una superficie, con fórmula explícita $z = h$.
Y el conjunto L también lo es, al admitir la parametrización $[a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(s, t) \rightsquigarrow (tx(s), ty(s), th)$, donde $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $s \rightsquigarrow (x(s), y(s), h)$ es una parametrización de ∂B.

[164] Haciendo los cálculos pertinentes se comprueba que el vector normal a L en el punto $t(x(s), y(s), h)$ es $t(-hy'(s), hx'(s), x(s)y'(x) - x'(s)y(s))$.

[165] Esta fórmula, ya conocida por Demócrito, fue utilizada por Arquímedes para desarrollar una ingeniosa demostración de que *tanto el área como el volumen de una esfera son exactamente dos tercios del área y del volumen de un cilindro (con tapas) circunscrito a la esfera*. Arquímedes solicitó que en su lápida figurase un dibujo con una esfera inscrita en un cilindro, por considerar esta relación entre las áreas y los volúmenes de ambas figuras como el más importante de sus descubrimientos.

DEMOSTRACIÓN: *Antes de comenzar propiamente la demostración, nos fijamos en que el campo vectorial que queremos integrar,*

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \Big(x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},\ y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},\ z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\Big),$$

está definido y es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre todo el espacio menos el origen. A continuación calculamos su divergencia (donde exista, claro):

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x} &= (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\\ \frac{\partial F_3}{\partial z} &= (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2},\end{aligned}$$

luego

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y,z) = 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(x^2+y^2+z^2) = 0.$$

Empezamos ahora la demostración, suponiendo que $\mathbf{0} \notin W$. Entonces $\boldsymbol{F}$ es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre W, de modo que puede aplicarse el teorema de la divergencia y como $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$,

$$\iint\limits_{\partial W^+} \frac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|^3}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{W} \operatorname{div}\frac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|^3}\ dV = 0.$$

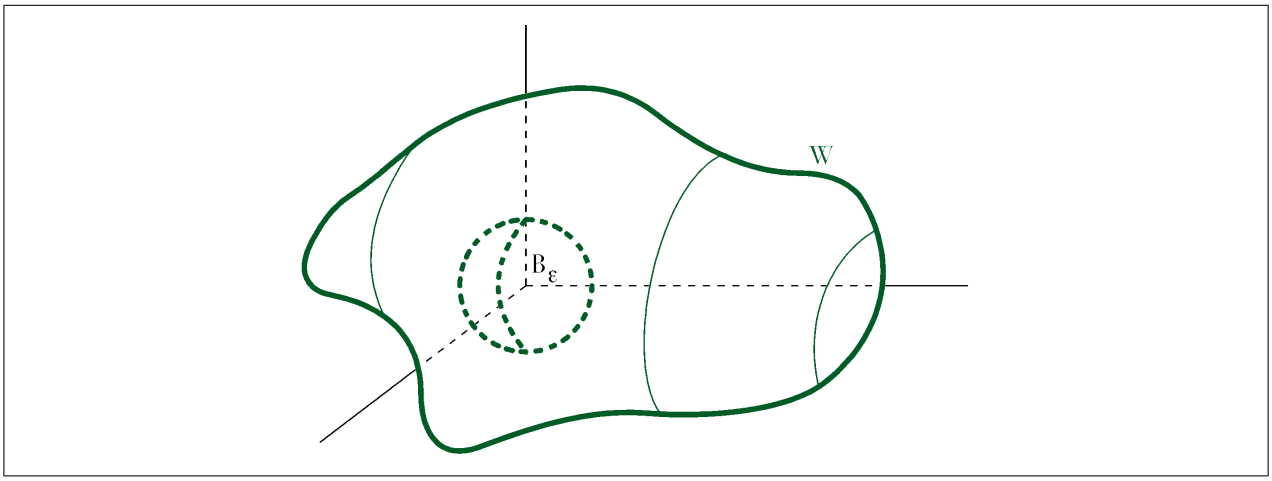


Figura 4.17: Bola cerrada B_ε contenida en el interior de W

Pasamos al caso de que $\mathbf{0} \in W$. Ahora $\boldsymbol{F}$ no es de clase $\mathscr{C}^1(W)$, así que no podemos aplicarle el teorema de la divergencia. Lo que hacemos es elegir una bola cerrada B_ε de centro el origen con la condición de que esté contenida en el interior de W, lo que es posible, puesto que el origen está en W pero no en su frontera ∂W, luego está en su interior ([166]). *A continuación construimos la diferencia conjuntista $W_0 = W \setminus \operatorname{Int} B_\varepsilon$. Sobre W_0 el campo $\boldsymbol{F}$ sí que es de clase $\mathscr{C}^1$ (y tiene divergencia nula).*

Entonces, $\partial W_0 = \partial W \cup \partial B_\varepsilon$ (teorema J.3) y las orientaciones exteriores son de tal manera que

- *sobre los puntos que pertenezcan a ∂W, la orientación exterior respecto a W_0 es la misma que la orientación exterior respecto a W;*
- *y sobre los puntos $\boldsymbol{p}$ que pertenezcan a ∂B_ε, la orientación exterior respecto a W_0 es la opuesta de la orientación exterior respecto a B_ε, que no era otra que $\boldsymbol{p}/\|\boldsymbol{p}\|$.*

[166] Ver el teorema J.5.

En consecuencia,

$$\iint\limits_{\partial W_0^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} - \iint\limits_{\partial B_\varepsilon^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

A continuación descomponemos W_0 en ocho subconjuntos, a base de cortarlo con los octantes en que los planos coordenados dividen al espacio total. Para cada uno de esos subconjuntos la fórmula de la divergencia es válida, luego lo es también para W_0, como se explica al final del apartado 4.6.1. Por tanto,

$$\iint\limits_{\partial W_0^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{W_0} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV = 0,$$

luego el valor de la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre ∂W^+ es el mismo que sobre ∂B_ε^+, que podemos calcular directamente,

$$\iint\limits_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|^3} \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|}\, d\sigma = \iint\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{1}{\|\boldsymbol{p}\|^2}\, d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} A(B_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi.$$

Epílogo

Definiciones alternativas de la integral de Riemann

Hay algunas variantes en la definición de función integrable, aparte de las de Riemann y de Darboux que hemos estudiado más arriba, que dan lugar a la misma integral y que son útiles en algunas demostraciones y también en algunas aplicaciones. Daremos una somera idea de algunas de ellas para funciones de tres variables. Para funciones de una o dos variables, los cambios que habría que introducir son obvios.

Al hablar de particiones $\mathscr{P}$ supondremos en todo este apartado que en cada variable la distancia entre dos puntos consecutivos de la partición no es necesariamente la misma, igual que hicimos al hablar de la integral de Darboux. Llamaremos suma de Riemann de la función acotada f relativa a la partición $\mathscr{P}$ y a la función ξ (que a cada subparalelepípedo $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ determinado por $\mathscr{P}$ le asocia un punto ξ_{ijk} de ese subparalelepípedo), a la suma

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{f}, \mathscr{P}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{ijk} f(\xi_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Y llamaremos **diámetro de la partición** $\mathscr{P}$ a la máxima diagonal de todos los subparalelepípedos $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$,

$$\operatorname{diam} \mathscr{P} = \max\{[(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2]^{1/2} : \\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m,\ 1 \le k \le \ell\}.$$

Las siguientes variantes de la forma de definir la convergencia de las sumas de Riemann dan lugar a una integral que es equivalente a la de Riemann ([167]) :

1. Hay una sucesión $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_s, \ldots,$ de particiones con diámetros tendiendo a cero, cuyas sumas de Riemann convergen a un número real I (la integral) que es el mismo para todas las elecciones de los puntos ξ_{ijk} en cada una de las $\mathscr{P}_s$:

$$\exists(\mathscr{P}_s),\ (\operatorname{diam} \mathscr{P}_s \to 0 \ \ \wedge \ \ \forall \xi,\ \mathscr{R}(f, \mathscr{P}_s, \xi) \to I).$$

2. Si $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_s, \ldots$ es cualquier sucesión de particiones cuyos diámetros tienden a cero, entonces las sumas de Riemann convergen a un número real I (la integral) que es el mismo para todas las elecciones de los puntos ξ_{ijk} en cada una de las $\mathscr{P}_s$:

$$\forall(\mathscr{P}_s),\ (\operatorname{diam} \mathscr{P}_s \to 0 \ \Rightarrow \ \forall \xi,\ \mathscr{R}(f, \mathscr{P}_s, \xi) \to I).$$

   Esta afirmación es aparentemente más fuerte que la anterior, pero puede demostrarse que ambas son equivalentes entre sí. Es decir, que en cuanto existe una sucesión de particiones como en la condición 1, cualquier otra sucesión de particiones cuyos diámetros tiendan a cero también cumple la convergencia de las sumas de Riemann al valor de la integral.

3. Similar el enunciado anterior, pero de manera que no sea válido solamente para sucesiones de particiones sino para cualquier forma de elegir particiones con diámetros tendiendo a cero:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \mathscr{P},\ (\operatorname{diam} \mathscr{P} < \delta \ \ \Rightarrow \ \ \forall \xi,\ |I - \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, \xi)| < \varepsilon).$$

   Si una integral existe en este sentido es fácil probar que también existe en el anterior. El recíproco también es cierto, pero algo más complicado de demostrar.

4. Como el anterior pero de manera que solamente se garantiza la aproximación de la suma de Riemann al valor de la integral para una función ξ especial: la función ξ^0 que asocia a cada paralelepípedo una de sus esquinas, es decir, $\xi^0_{ijk} = (x_i, y_j, z_k)$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \mathscr{P},\ (\operatorname{diam} \mathscr{P} < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |I - \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, \xi^0)| < \varepsilon).$$

[167] Es decir, la integral que se obtiene de esta manera tiene exactamente las mismas funciones integrables que la de Riemann y, además, para cada función integrable los valores de ambas integrales son el mismo.

Algunas de las implicaciones son obvias, otras son difíciles de probar. No daremos referencias a todas estas demostraciones, baste decir que suele ser útil apelar a la condición necesaria y suficiente de Darboux (teorema 2.6) o, también, a la condición necesaria y suficiente para la integral de Riemann ideada por Lebesgue, que hace uso del concepto de conjunto de medida nula. ★

5. Las sumas de Riemann convergen a un número real (el valor de la integral, I) a medida que se les añaden puntos nuevos a las particiones: dado $\varepsilon > 0$, existe siempre alguna partición $\mathscr{P}_\varepsilon$ tal que si $\mathscr{P}$ es cualquier partición que contenga entre sus puntos de división a todos los puntos de división de $\mathscr{P}_\varepsilon$, entonces $|I - \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, \xi)| < \varepsilon$, para cualquier elección de los puntos ξ_{ijk}, es decir,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathscr{P}_\varepsilon,\ \forall \mathscr{P},\ \forall \xi,\ (\mathscr{P} \supset \mathscr{P}_\varepsilon \ \Rightarrow\ |I - \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, \xi)| < \varepsilon).$$

6. Usando infinitésimos se puede dar otra definición alternativa del siguiente modo: *cuando las particiones tienen diámetro infinitesimal, todas las sumas de Riemann están infinitamente próximas entre sí, independientemente de los puntos donde se evalúa la función*, es decir,
$$\forall \mathscr{P}, \mathscr{P}',\ (\operatorname{diam} \mathscr{P} \approx 0 \ \wedge\ \operatorname{diam} \mathscr{P}' \approx 0 \ \Rightarrow\ \forall \xi, \xi',\ \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, \xi) \approx \mathscr{R}(f, \mathscr{P}', \xi')),$$
y la parte estándar de estas sumas de Riemann, que existe, es la integral.

   Esta convergencia recuerda a la condición de Cauchy para la convergencia de sucesiones, en el sentido de que para comprobarla no es preciso conocer previamente el valor del límite.

Otras integrales diferentes de la de Riemann

Integral de Lebesgue

A principios del siglo XX Henri Lebesgue propuso una manera alternativa de aproximar el área de los conjuntos $\Omega(f)$. La idea consiste, en palabras del propio Lebesgue, en hacer las particiones en el conjunto imagen de f, en lugar de hacerlas en el dominio.

Se demuestra que todas las funciones integrables Riemann son también integrables Lebesgue, y con el mismo valor. Y que hay funciones no integrables en el sentido de Riemann pero sí en el de Lebesgue, entre las cuales está la del ejemplo 2.7, que no es integrable Riemann pero sí que tiene integral de Lebesgue (su valor es cero).

Aparte de servir para integrar más funciones acotadas (o para medir más conjuntos acotados, si se quiere) que la integral de Riemann, la de Lebesgue sirve también para integrar sobre conjuntos no acotados, de modo que engloba a algunas integrales impropias de Riemann, aunque no a todas. También disfruta de cómodas propiedades de paso al límite, mucho mejores que las de la integral de Riemann.

Por último, la versión abstracta de la integral de Lebesgue tiene trascendentales aplicaciones en la teoría de probabilidades.

Existen abundantes publicaciones de varios niveles que explican con detalle la integral de Lebesgue.

Integral de Kurzweil-Henstock

La integral de Kurzweil-Henstock, que en algunos textos se denomina integral de Riemann generalizada, es una ligera modificación de la integral de Riemann, introducida por J. Kurzweil en 1957, que permite integrar bastantes más funciones que la de Riemann, en particular muchas funciones no acotadas sin necesidad de pasos al límite como tuvimos que hacer en la sección 2.6.

Para simplificar la exposición nos limitaremos a funciones de una variable.

Dada una función real definida sobre un intervalo $[a, b]$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, considérese una partición de $[a, b]$, $\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ y un punto en cada subintervalo, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. De acuerdo con una de las definiciones alternativas enunciadas al comienzo de este epílogo en el caso de que f sea acotada, para que la integral de f en el sentido de Riemann tenga el valor I es necesario y suficiente que
$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \mathscr{P},\ \forall \xi,\\ &\big(\forall i,\ x_{i-1} - x_i < \delta \quad \Rightarrow \quad |I - \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, \xi)| < \varepsilon\big).\end{aligned}$$
Pues bien, si se permite que el δ sea variable se obtiene la integral de Kurzweil:

Definición 4.18 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera (acotada o no). Se dice que f es* ***integrable en el sentido de Kurzweil-Henstock, con integral I,*** *cuando*
$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta : [a, b] \longrightarrow (0, +\infty),\ \forall \mathscr{P},\ \forall \xi,\\ &\big(\forall i,\ x_i - x_{i-1} < \delta(\xi_i) \quad \Rightarrow \quad |I - \mathscr{R}(f, \mathscr{P}, \xi)| < \varepsilon\big).\end{aligned}$$

Se define también la integral de Kurzweil-Henstock sobre todo tipo de intervalos, cerrados o no, acotados o no.

Es trivial observar que cualquier función integrable Riemann es también integrable Kurzweil-Henstock, y con el mismo valor para la integral. Y que es posible que haya funciones no integrables Riemann pero integrables en el sentido de Kurzweil-Henstock (de hecho, las hay: la función del ejemplo 2.7 es también integrable Kurzweil-Henstock).

Resumen de las relaciones entre las integrales de Riemann, Lebesgue y Kurzweil-Henstock:

116.

- La integral de Lebesgue es intermedia entre la de Riemann y la de Kurzweil-Henstock. La de Lebesgue y la de Kurzweil-Henstock coinciden para funciones positivas.
- La generalización de la integral de Lebesgue a espacios abstractos tiene aplicaciones muy importantes en el campo de la probabilidad.
- La de Lebesgue y la de Kurzweil-Henstock pueden integrar algunas funciones no acotadas o definidas sobre conjuntos no acotados.
- La de Lebesgue y la de Kurzweil-Henstock tienen buenas propiedades de paso al límite, pero la de Kurzweil-Henstock las tiene mejores que la de Lebesgue. La de Riemann en cambio tiene un comportamiento muy restrictivo en pasos al límite.
- La de Kurzweil-Henstock incluye a las integrales impropias de Riemann, mientras que la de Lebesgue incluye a algunas, pero no a todas.
- La integral de Kurzweil-Henstock permite la más amplia formulación posible de la regla de Barrow, sin imponer ninguna condición a la función derivada.

Un estudio detallado y comparado de las distintas teorías de integración, incluyendo las que aquí hemos visto y otras más, puede consultarse en [5] y en [9].

¿Hasta dónde puede ampliarse el concepto de integral?

Nuestras integrales las introdujimos con el objetivo inmediato de medir áreas de conjuntos planos, volúmenes de conjuntos tridimensionales, etc. A lo largo de este curso hemos visto que hay varias formas de dar una definición rigurosa de estos conceptos y que algunas de ellas, aunque aparentemente sean distintas, al final resulta que son equivalentes entre sí. Afortunadamente, todos los procedimientos que hemos descrito asignan el mismo número (área o volumen, según las dimensiones) a un mismo conjunto... en caso de que le asignen alguno. Los métodos de Riemann, de Lebesgue y de Kurzweil-Henstock integran cada vez más funciones, pero ninguno de ellos las integra todas.

117. ¿Por qué no llegar hasta el final y dotarnos de un concepto de integral que nos permita integrar todas las funciones, así como asignar una medida a cualquier subconjunto?

Pues bien, esta especie de ampliación total del concepto de integral no es posible en algunas dimensiones, ni siquiera limitándonos a conjuntos acotados y funciones acotadas.

Concretamente, en el caso del plano es posible asignar un *área* a cada subconjunto, entendiendo por área una función positiva y definida sobre todos sus subconjuntos, $A : \mathscr{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0, +\infty]$, con las condiciones de que (a) $A([0,1]\times[0,1]) = 1$; (b) para todo par de conjuntos disjuntos $S, T \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$, $A(S \cup T) = A(S) + A(T)$; y (c) si podemos pasar desde $S \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ a $T \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ mediante giros y traslaciones, entonces $A(S) = A(T)$ ([168]).

Algo similar ocurre en la recta real, puede definirse una *longitud* L para todos y cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de modo que $L([0,1]) = 1$, $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$ siempre que $S \cap T = \varnothing$ y, por

[168] Pero no existe ninguna tal función área $A : \mathscr{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow [0, +\infty]$ si sustituimos la propiedad (b) por

$$\text{(b')} \qquad A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} A(S_i) \quad \text{siempre que los } S_i \text{ sean disjuntos dos a dos.}$$

último, $L(S) = L(T)$ siempre que T sea una traslación de S. Puede consultarse una construcción en [26], teorema 11.5 ([169]).

En cambio, no es posible hacer algo similar con los volúmenes en el espacio tridimensional, es decir, no existe ninguna función $V : \mathscr{P}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow [0, +\infty]$ de modo que $V([0,1]^3) = 1$, que para todo par de conjuntos disjuntos $S, T \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^3)$, $V(S \cup T) = V(S) + V(T)$ y que $V(S) = V(T)$ siempre que podamos pasar de S a T mediante giros y traslaciones. Que este objetivo es inalcanzable lo demostró en 1924 la *paradoja de Banach-Tarski*, cuyo desarrollo supera ampliamente las posibilidades de este curso. Consultar, por ejemplo, [27] o [29].

[169] Igual que en el plano, tampoco existe una función longitud L definida sobre todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ si añadimos la condición de que la longitud de la unión de una cantidad numerable de conjuntos disjuntos sea igual a la suma de la serie de sus longitudes.

Anexos

A

Anexo A: Axiomas de $\mathbb{R}$

(A.1). Nuestros axiomas para $\mathbb{R}$

La estructura matemática sobre la que trabajamos en el curso está formada por

- un conjunto $\mathbb{R}$, cuyo elementos llamamos **números reales**;
- dos operaciones binarias sobre $\mathbb{R}$, internas, la primera de las cuales llamamos **suma**, denotada con el signo $+$ y la segunda **multiplicación** o **producto**, denotada con el signo . o mediante yuxtaposición;
- una relación binaria sobre $\mathbb{R}$, que llamamos **orden**, denotada por $\leq$;

y damos por supuesto que se cumplen las siguientes propiedades, que agrupamos en 13 conjuntos de axiomas. Estos axiomas, junto con los conceptos y cálculos de un curso básico de Cálculo Diferencial, han de ser suficientes, salvo aviso en sentido contrario, para comprender todas nuestras definiciones y todas las demostraciones que aparecen en el cuerpo del curso.

$(\mathbb{R}, +, .)$ **es un cuerpo conmutativo.** Es decir:

1. Para cualesquiera números reales x, y, z, se cumple que $x + (y + z) = (x + y) + z$; $x(yz) = (xy)z$.
2. Para cualesquiera números reales x, y, se cumple que $x + y = y + x$; $xy = yx$.
3. Para cualesquiera números reales x, y, z, se cumple que $x(y + z) = xy + xz$.
4. Existe un número real, que designamos por 0, tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = x$; además, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$ existe un número real, que llamamos **opuesto a x** y denotamos por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.
5. Existe un número real distinto de 0, que designamos por 1, tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $x1 = x$; además, para todo $x \in \mathbb{R}$ que sea distinto de 0, existe también un número real, que llamamos **inverso de x** y denotamos por $1/x$, tal que $x(1/x)$=1.

La relación $\leq$ es un orden total sobre $\mathbb{R}$. Es decir, cualesquiera que sean los números reales x, y, z, se cumple que:

6. $x \leq x$.
7. Si $x \leq y$ y además $y \leq x$, entonces $x = y$.
8. Si $x \leq y$ y además $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
9. Si no se cumple que $x \leq y$, entonces $y \leq x$.

La relación $x < y$ es una abreviatura de $x \leq y$ y $x \neq y$ ([170]). Las relaciones $x < y$ y $x \leq y$ pueden escribirse también como $y > x$ e $y \geq x$, respectivamente.

$(\mathbb{R}, +, ., \leq)$ **es un cuerpo ordenado.** Es decir, además de las propiedades 1–8 se cumple que cualesquiera que sean los números reales x, y, z,

10. $x \leq y$ implica que $x + z \leq y + z$.
11. $x \leq y$ y $z \geq 0$ implica que $xz \leq yz$.

Axioma del supremo.

[170] Leemos $x < y$ como **x menor que y**; y $x \leq y$ como **x menor o igual que y**. Cuando queremos resaltar que $x \leq y$ pero $x \neq y$, decimos que **x es estrictamente menor que y**. En cambio, cuando decimos que un número x es **negativo** normalmente queremos decir que $x \leq 0$; a los números que cumplen $x < 0$ los llamamos **estrictamente negativos**. Aplicamos análogas convenciones para las desigualdades contrarias, $>$, $\geq$ y las expresiones **mayor, estrictamente mayor, positivo** y **estrictamente positivo**.

12. Todo subconjunto X de $\mathbb{R}$ que no sea vacío y que esté acotado superiormente tiene un **supremo** en $\mathbb{R}$. En otras palabras, si

$$\varnothing \neq X \subset \mathbb{R} \quad \wedge \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ x \leq M,$$

entonces existe un $s \in \mathbb{R}$ tal que si r es un número real mayor o igual que todos los números de X, necesariamente $s \leq r$. Notación: **sup X** significa supremo del conjunto X.

Existencia de las funciones elementales. Nuestro último grupo de axiomas postula la existencia de una colección de funciones entre subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se utilizan muy a menudo en las aplicaciones y que gozan de unas propiedades que usamos con frecuencia en los ejemplos y en los problemas del curso.

13. Las funciones cuyas propiedades se describen en el anexo B están bien definidas.

A partir de estos axiomas se definen fácilmente los conjuntos **$\mathbb{N}$ de los números naturales** ([171]), **$\mathbb{Z}$ de los números enteros** ([172]), y **$\mathbb{Q}$ de los números racionales** ([173]).

A continuación damos respuesta a algunas preguntas que pueden plantearse acerca de esta colección de axiomas (en realidad, deben plantearse sobre cualquier otra colección de axiomas que se use en una teoría matemática).

(A.2). ¿Son compatibles entre sí?

La respuesta puede resultar sorprendente a primera vista. Lo cierto es que no se sabe de manera concluyente si el sistema formado por todos los axiomas contenidos en los puntos del 1 al 13 encierra entre sus consecuencias alguna contradicción o no. Por ahora no se ha encontrado ninguna, pero esto, por sí solo, no garantiza que no se pueda encontrar alguna en el futuro. Hace más de 100 años que los matemáticos tratan esta cuestión, sin terminar de resolverla. Se han logrado avances parciales, pero sigue siendo objeto de discusión; lo que sí se ha podido demostrar, en cambio, es que nunca se podrá demostrar, con una prueba interna al sistema de las llamadas *finitarias*, que el conjunto de axiomas es compatible ([174]). No es un resultado precisamente satisfactorio, pero es lo que hay.

Por si sirve de consuelo, avisemos de que la carencia de una demostración universalmente aceptada de la consistencia interna de los axiomas no es específica de la estructura de $\mathbb{R}$. Lo mismo ocurre con la estructura de los números racionales, $\mathbb{Q}$, e incluso con la de los números naturales, $\mathbb{N}$, que constituyen la base de cualquier argumento matemático en el que intervengan una infinidad de elementos. La axiomática (o relación de axiomas) que con más frecuencia se utiliza para describir $\mathbb{N}$ es la formada por los axiomas de Peano, en los que aquí no entraremos.

Es más, está demostrado que la axiomática de $\mathbb{R}$ es compatible si y sólo si lo es la axiomática de $\mathbb{N}$. Esta equivalencia entre la consistencia de un grupo de axiomas y la consistencia de otro grupo de axiomas se prueba a base de suponer que existe una estructura en la que se verifican todos los axiomas de uno de los grupos y entonces deducir que existe otra estructura en la que se verifican todos los axiomas del otro grupo ([175]).

Por consiguiente, en el caso hipotético de que se probase que los axiomas de los números reales son inconsistentes, entonces quedaría también demostrada la inconsistencia de los axiomas que se utilizan para trabajar con los números naturales, con lo que las matemáticas quedarían drásticamente reducidas, puesto que habría que limitarse a razonamientos finitarios aplicados a conjuntos finitos.

---

[171] Sumando 1 consigo mismo repetidamente.

[172] Añadiendo a $\mathbb{N}$ todos los opuestos de sus miembros y el 0.

[173] Añadiendo a $\mathbb{Z}$ todos los cocientes entre sus miembros no nulos.

[174] Para una primera aproximación a estos conceptos, consultar [36].

[175] Concretando más: Se trata de identificar primero un subconjunto de $\mathbb{R}$ que tiene todas las propiedades de $\mathbb{N}$ (ésta es la parte fácil, en la nota a pie de página de página nº 171 hemos indicado cómo comenzar a hacerlo) y después, supuesta la existencia de la estructura de $\mathbb{N}$, construir otro conjunto con una estructura que tenga las propiedades de $\mathbb{R}$, es decir, las 1–13. Hay varias formas de hacer esta segunda parte, entre las que se encuentran las que se basan en las *cortaduras de Dedekind* o en las *sucesiones de Cauchy* (ver, por ejemplo, [33]).

(A.3). ¿Hay alguno que se deduzca de los demás?

Sobran muchos de los axiomas. El grupo más llamativo entre los que "sobran", en el sentido de que desde el punto vista lógico no hacen falta, es el de las funciones elementales. De hecho, no se incluyen como axiomas en los textos más habituales de Cálculo, que suelen limitarse a los axiomas 1–12. Todas las funciones elementales pueden construirse a partir de los axiomas de los 12 primeros grupos. Hay varias maneras de hacerlo ([176]), mediante series de potencias, mediante integrales de una variable, etc. Todas ellas requieren bastante trabajo y no tienen cabida en este curso, por lo que las añadimos a la lista de axiomas.

Pero ¿por qué incluimos el axioma 13, si no es estrictamente necesario? El principal motivo es que introducir estas propiedades como axiomas nos es muy útil para mantener la coherencia entre el rigor de la teoría propiamente dicha, donde las funciones elementales no aparecen, y la utilización de funciones elementales que sí aparecen en los ejemplos y en los problemas (ver la observación 6), sin por ello dedicar mucho tiempo a demostrar que el axioma 13 de deduce de los 12 anteriores.

Por si esto fuera poco, no sólo la existencia de las funciones elementales puede deducirse del resto de axiomas. También entre los axiomas 1–12 los hay redundantes, como por ejemplo el que garantiza la conmutatividad del producto, ver [14], Théoréme 1.8.5. Por consiguiente, conceptualmente no supone un cambio importante postular la existencia y las propiedades de las funciones elementales, ya que aunque no lo hiciéramos así y nos limitásemos a los axiomas 1–12, tampoco tendríamos un conjunto minimal de axiomas.

(A.4). ¿Hasta qué punto definen un único conjunto y una única estructura?

Ésta es la pregunta más sutil. La respuesta es negativa en cuanto a la primera parte de la pregunta y afirmativa en cuanto a la segunda parte. En la nota a pie de página nº 175 se ha comentado que hay varios modelos o realizaciones de la estructura, por lo que el *conjunto* $\mathbb{R}$ no es único. Pero la estructura sí que es única, en el sentido de que dos estructuras con todas estas propiedades son necesariamente *isomorfas*.

Si sólo impusiéramos la condición de *cuerpo conmutativo*, es decir, los axiomas 1–5, la estructura no sería única: es conocido que hay cuerpos conmutativos que son distintos, con propiedades muy diferentes (para empezar, los hay finitos e infinitos). No hay forma de establecer una biyección entre dos cuerpos conmutativos arbitrarios, y mucho menos de manera que se conserven las dos operaciones (isomorfía). Y lo mismo puede decirse si, en lugar de los grupos 1–5, de los anteriores axiomas entresacamos los grupos 6–9, o incluso los axiomas 1–11, que corresponden a un *cuerpo conmutativo totalmente ordenado*. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ también es un cuerpo totalmente ordenado, pero no es isomorfo a $\mathbb{R}$, dado que la ecuación $x^2 = 2$ tiene solución en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{Q}$.

En cambio, entre las estructuras dotadas de dos operaciones binarias internas y un orden, todas las que cumplen los axiomas 1–12 (y, por tanto, también el 13, como se ha explicado en el apartado (A.3)) son isomorfas, con lo que todas tienen exactamente las mismas propiedades, con una biyección entre ellas ([177]).

Por este motivo hablamos de "el" conjunto de los números reales: porque, aunque hay varios, desde el punto de vista operativo *son todos indistinguibles*. Nos da igual que pensemos en los elementos de $\mathbb{R}$ como puntos de una recta ideal; o como números en base 10 con infinitas cifras decimales; o como números con otra base distinta de 10; o como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números reales; o como miembros de cualquier otro modelo de la estructura; *las propiedades que podamos deducir de las operaciones y del orden son las mismas para todos ellos.*

[176] En este contexto, *construir* las funciones elementales significa probar la existencia y las propiedades de todas las funciones descritas en el anexo B. En internet pueden encontrarse múltiples referencias a estas construcciones.

★ [177] Al menos cuando aceptamos para la teoría de conjuntos el sistema de axiomas ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice), que es aceptado por una abrumadora mayoría de matemáticos.

B

Anexo B: Funciones elementales (grupo de axiomas nº 13)

En el Cálculo Diferencial e Integral se conocen informalmente como **funciones elementales** a las funciones reales de variable(s) real(es) que se pueden formar por aplicación reiterada de sumas y restas, productos y cocientes, potencias y raíces, senos y cosenos, exponenciales y logaritmos. ([178])

La existencia de las funciones suma, resta, multiplicación y división, junto con sus principales propiedades, están garantizadas por los axiomas 1–5 y 10–11 del anexo A. Dedicamos este anexo B a exponer las principales propiedades de las demás funciones elementales, terminando así el enunciado del axioma 13. *Recuérdese que en nuestra construcción lógica la existencia de las funciones de las que vamos a tratar en este anexo la consideramos un axioma.* Bien es cierto que es un axioma redundante (y que no es el único redundante, como se señaló en el apartado (A.3)), pero no entraremos aquí en cómo demostrar que lo es. Además, siguiendo el mismo espíritu de los enunciados de los axiomas 1–12, también en el grupo 13 de axiomas incluimos propiedades redundantes, es decir, que pueden deducirse de las demás.

Las gráficas de las principales funciones elementales las reproducimos porque son de gran ayuda para recordar algunas de sus propiedades.

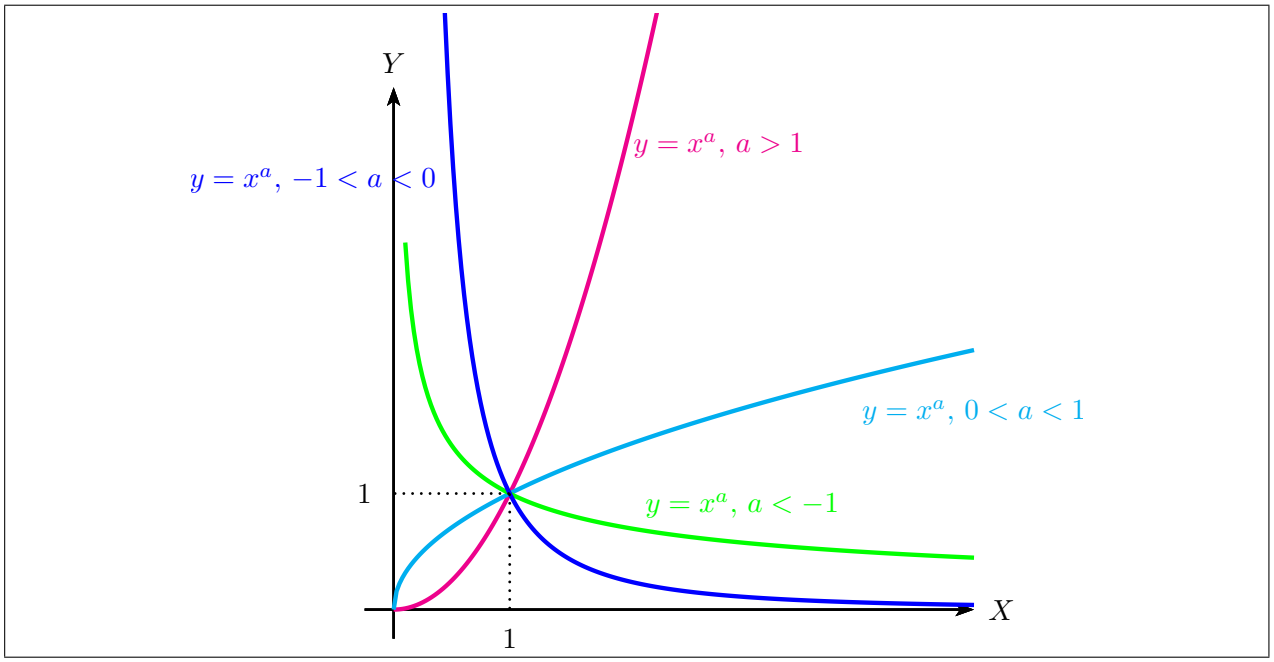


Figura B.1: *Gráficas de varias funciones x^a. Los ejes son asíntotas cuando $a < 0$.*

(B.1). Potencias de cualquier exponente real

Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, existe una **función potencia de exponente a**,

$$(0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty), \qquad x \rightsquigarrow x^a$$

con las siguientes propiedades:

[178] Las funciones elementales no son, ni mucho menos, las únicas funciones cuyas propiedades son bien conocidas. Citemos, por ejemplo, la que aparece en la observación 51; o las funciones eurlerianas, *gamma* (íntimamente relacionada con la función que a cada número natural n asocia su factorial $n!$) y *beta* (muy relacionada con los números combinatorios), que son también muy útiles en el cálculo de algunas integrales ([34] y [35]).

- Extiende la multiplicación de un número finito de factores iguales: Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $x^a = \overbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{a \text{ veces}}$. Y si $a = -1$, entonces $x^a = 1/x$.
- Extiende las raíces n-ésimas: Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ (raíz n-ésima no negativa).
- Si $a = 0$, es una función constante: $\forall x > 0,\ x^0 = 1$.
- Si $a \neq 0$, entonces es biyectiva, y su inversa es una función del mismo tipo: la inversa de x^a es $x^{1/a}$.
- Si $a > 0$, es estrictamente creciente. Y si $a < 0$, es estrictamente decreciente.

118. Obsérvese que para las funciones potencia sólo estamos tratando con dominios y con imágenes que sean estrictamente positivos. El análisis sistemático del resto de los casos, incluso aunque sólo involucren números reales (por ejemplo, la raíz cuadrada negativa de un número positivo, o la raíz cúbica negativa de un número negativo), es mejor llevarlo a cabo en el cuerpo de los números complejos.

(B.2). Funciones exponenciales y logarítmicas

Para cualquier $b > 0$, existe una **función exponencial de base b**,

$$\exp_b : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty), \qquad x \rightsquigarrow b^x$$

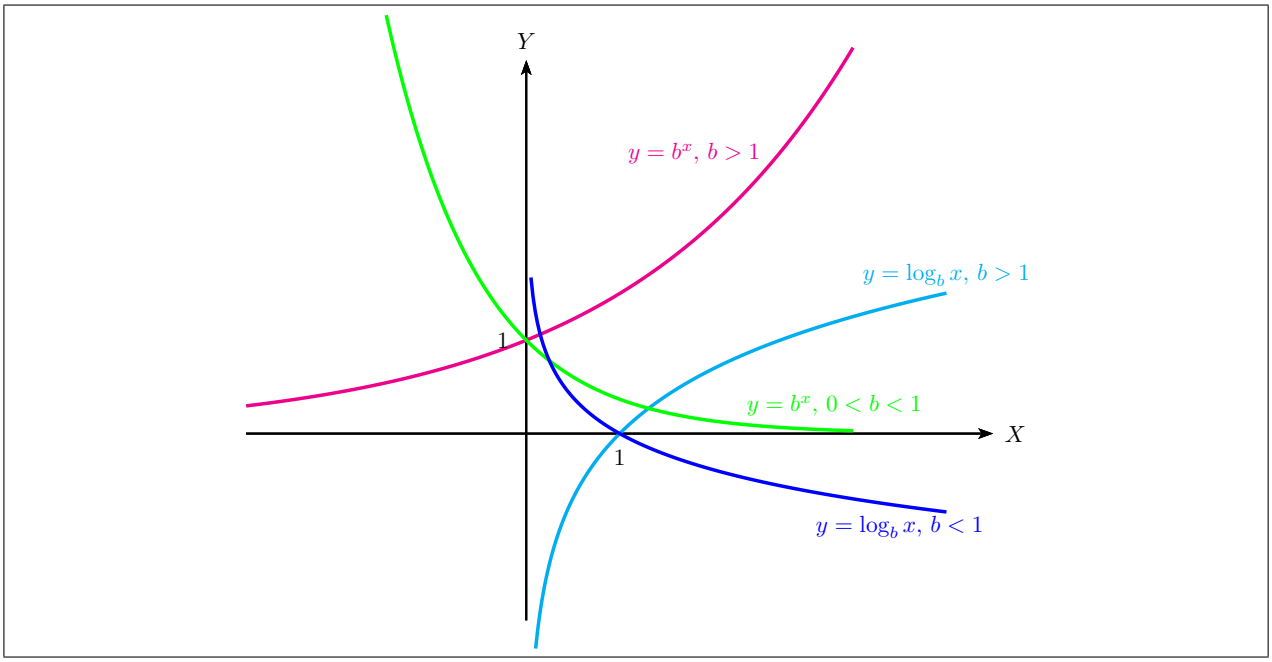


Figura B.2: *Gráficas de varias funciones exponenciales y logarítmicas. El eje vertical es una asíntota para las funciones logarítmicas.*

con las siguientes propiedades:

- Cuando tanto la base b como el exponente a son positivos, b^a puede interpretarse indistintamente como resultado de aplicar la función potencia x^a sobre b o como el resultado de aplicar la función exponencial b^x sobre a.
- Si $b = 1$, entonces es la función constante 1: $\forall x \in \mathbb{R}$, $1^x = 1$.
- Si $b \neq 1$, entonces es una función biyectiva. Para $b > 1$ es estrictamente creciente; y para $b < 1$ es estrictamente decreciente.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $b^{x+y} = b^x b^y$.

- Otras propiedades: cualesquiera que sean $b, b_1 > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$b^{xy} = (b^x)^y\,, \quad b^{x-y} = \frac{b^x}{b^y}, \quad (bb_1)^x = b^x b_1^x, \quad b^0 = 1.$$

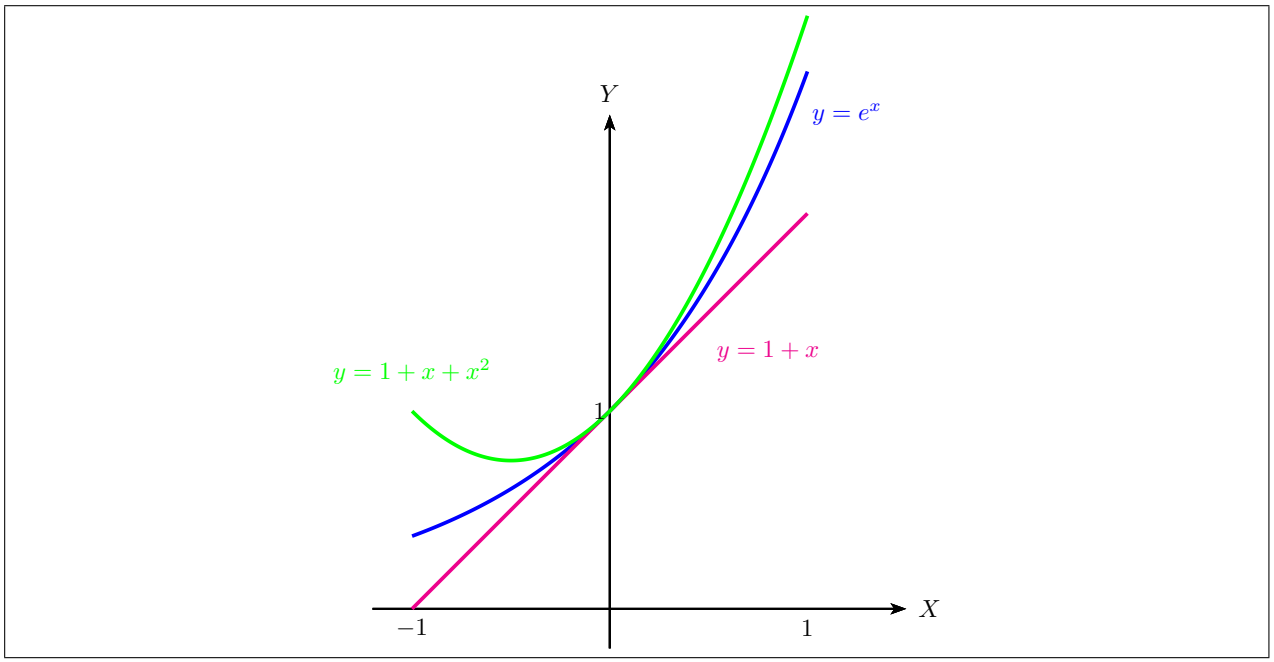


Figura B.3: *Axioma: acotaciones de la función e^x para $-1 \le x \le 1$*

Además, existe un **número e** para el que la función exponencial de base e cumple que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad 1 + x \le e^x \le 1 + x + x^2.$$

La función exponencial de base e se llama simplemente **función exponencial: $\exp(x) = e^x$**.

Considérese ahora un número real estrictamente positivo y distinto de 1, $b \in (0, +\infty)\backslash\{1\}$. Entonces la inversa de la exponencial de base b se llama **función logarítmica de base b**, o **logaritmo de base b**:

$$(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow \log_b x.$$

El logaritmo de base e se llama también **logaritmo neperiano** o, simplemente, **logaritmo: $\log_e x = \log x = \ln x = Lx$**.

Por definición,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \log_b(b^x) = x; \qquad \text{y si } x > 0,\ b^{(\log_b x)} = x.$$

Otras propiedades de los logaritmos:

- Si $b > 1$, entonces $\log_b$ es estrictamente creciente; y si $b < 1$, es estrictamente decreciente.
- $\forall x, y > 0$, $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$.
- Relación con la función potencia: si $0 < b \neq 1$, $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\log_b a^x = x \log_b a, \quad a^x = b^{x \log_b a}.$$

  En particular, $a^x = e^{x \log a}$ para cualquier $a > 0$ y cualquier $x \in \mathbb{R}$.

- Cualesquiera que sean $x, y, a, b > 0$, con $a \neq 1 \neq b$,

$$\log_b 1 = 0, \quad \log_b\left(\frac{y}{x}\right) = \log_b y - \log_b x, \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

(B.3). Funciones trigonométricas

Existen dos funciones, que llamaremos **seno, sin**, y **coseno, cos**,

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow \sin x, \qquad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \rightsquigarrow \cos x,$$

y un número real positivo, $\boldsymbol{\pi}$, con las siguientes propiedades:

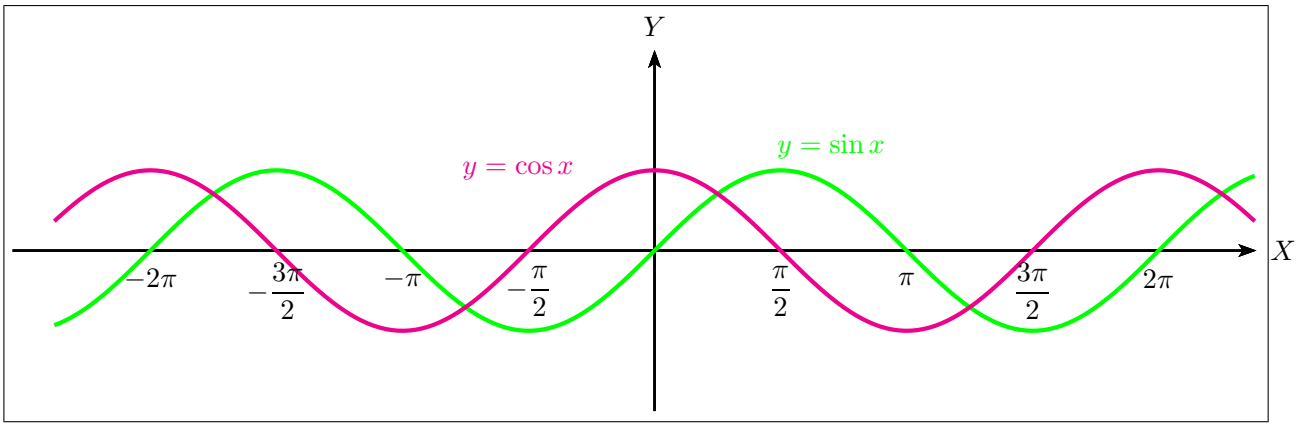


Figura B.4: *Gráficas de las funciones* $\sin x$ *y* $\cos x$

- Ambas son periódicas, con periodo 2π. Además,

$$\sin x = \sin y \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = (2k+1)\pi & \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \\ \vee & \\ x - y = 2k\pi & \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\cos x = \cos y \Longleftrightarrow x \pm y = 2k\pi \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}$$

- No son suprayectivas: su imagen es el intervalo cerrado $[-1, 1]$.
- Sobre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, sin es estrictamente creciente y su imagen es $[-1, 1]$. Además, $\sin 0 = 0$.
- Sobre el intervalo $[0, \pi]$, cos es estrictamente decreciente y su imagen es $[-1, 1]$. Además, $\cos \pi/2 = 0$.
- Si $x > 0$,

$$x > \sin x > x - \frac{1}{6}x^3; \qquad 1 > \cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

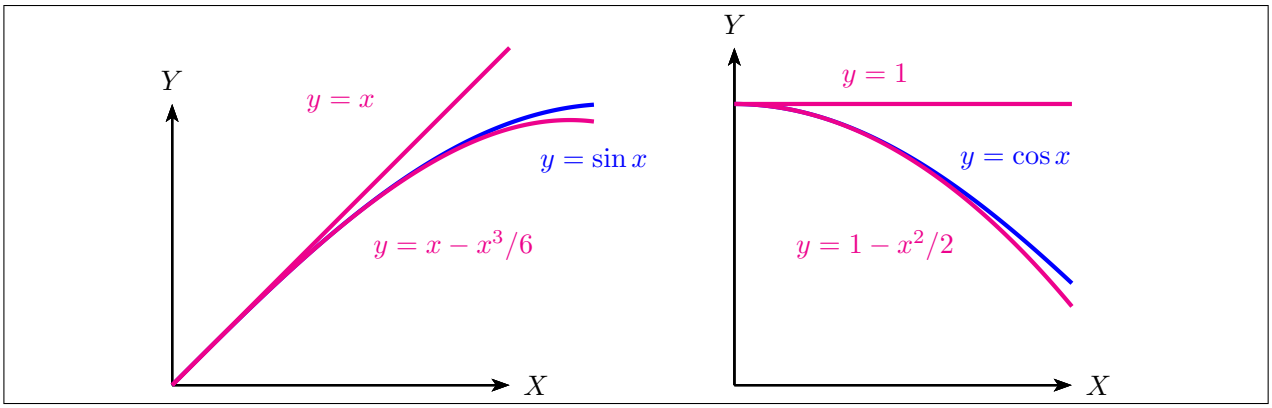


Figura B.5: *Axioma: acotaciones de las funciones* $\sin x$ *y* $\cos x$ *para* $x > 0$

- Otras relaciones trigonométricas: para cualesquiera valores de $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x \\
&\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\
&\sin(2x) = 2 \sin x \cos x; \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x
\end{aligned}$$

- Una de las relaciones más importantes es que para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Y que, recíprocamente, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 = 1$ entonces existe un número $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\cos\theta = a, \quad \sin\theta = b.$$

Otras funciones trigonométricas se definen multiplicando o dividiendo senos y cosenos: llamando A al conjunto $\{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ y B al conjunto $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,

tangente: $\tan = \operatorname{tg} : \mathbb{R}\backslash A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow \tan x = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x};$

cotangente: $\cot = \operatorname{ctg} : \mathbb{R}\backslash B \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow \cot x = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x};$

secante: $\sec : \mathbb{R}\backslash A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow \sec x = \dfrac{1}{\cos x};$

cosecante: $\csc : \mathbb{R}\backslash B \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightsquigarrow \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}.$

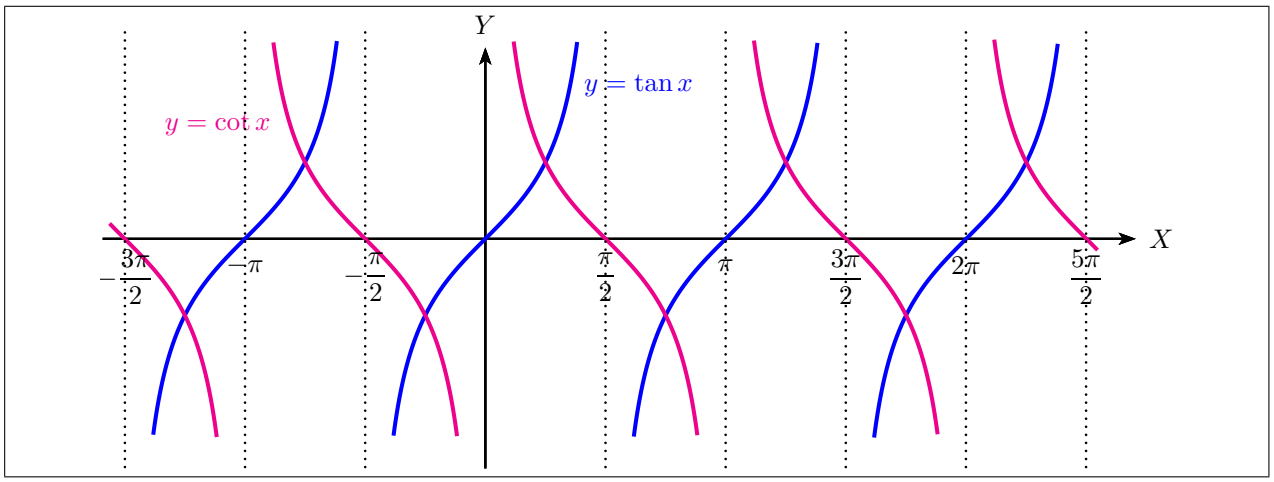


Figura B.6: *Gráficas de las funciones* $\tan x$ *y* $\cot x$. *Las líneas verticales son asíntotas.*

Las dos primeras son suprayectivas, mientras que las dos últimas no lo son (su imagen es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$). Ninguna de las cuatro es inyectiva:

$$\begin{aligned}
\tan x = \tan y &\Longleftrightarrow x - y = k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \quad (x, y \in \mathbb{R}\backslash A) \\
\cot x = \cot y &\Longleftrightarrow x - y = k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \quad (x, y \in \mathbb{R}\backslash B) \\
\sec x = \sec y &\Longleftrightarrow x \pm y = 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \quad (x, y \in \mathbb{R}\backslash A) \\
\csc x = \csc y &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + y = (2k+1)\pi & \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \\ \vee & \\ x - y = 2k\pi & \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}, \qquad (x, y \in \mathbb{R}\backslash B).
\end{aligned}$$

Fórmula para la tangente de una suma y de una diferencia:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \quad (x, y, x \pm y \in \mathbb{R}\backslash A).$$

Por último, las inversas de las funciones trigonométricas. Como las funciones seno, coseno y tangente no son inyectivas, antes de definir *una* inversa suya resulta necesario restringir el dominio de cada función, de manera que pase a ser inyectiva pero su imagen siga siendo la misma que para la función original: la función

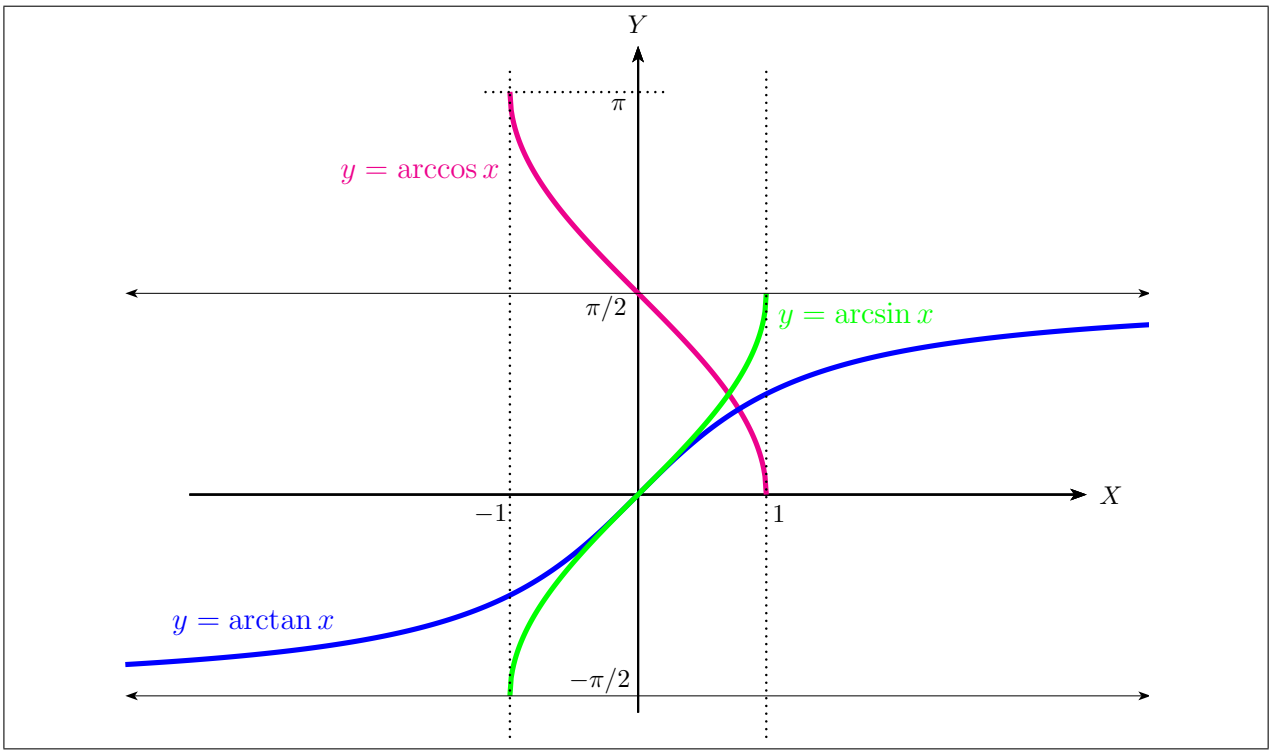


Figura B.7: *Gráficas de las funciones* $\arcsin x$, $\arccos x$ *y* $\arctan x$. *Las líneas sólidas horizontales (distintas del eje* X*)son asíntotas de la gráfica del arcotangente.*

seno es biyectiva entre $[-\pi/2, \pi/2]$ y $[-1, 1]$; la función coseno es biyectiva entre $[0, \pi]$ y $[-1, 1]$; y la función tangente es biyectiva entre $(-\pi/2, \pi/2)$ y $\mathbb{R}$ (ver las figuras B.4 y B.6): ([179])

arcocoseno: $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi], \quad x \rightsquigarrow \arccos x,$

arcoseno: $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2], \quad x \rightsquigarrow \arcsin x,$

arcotangente: $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2), \quad x \rightsquigarrow \arctan x,$

definidas mediante:

$$\sin(\arcsin x) = x, \ \forall x \in [-1, 1], \qquad \arcsin(\sin x) = x, \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos(\arccos x) = x, \ \forall x \in [-1, 1], \qquad \arccos(\cos x) = x, \ \forall x \in [0, \pi]$$

$$\tan(\arctan x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan(\tan x) = x, \ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

[179] Podrían considerarse otras inversas utilizando intervalos de definición diferentes. Por ejemplo, la inversa de la función coseno entre $[3\pi, 4\pi]$ y $[-1, 1]$. Pero las definiciones que más se utilizan son las que aquí damos.

C

Anexo C: Infinitésimos.

(C.1). Introducción

Para un desarrollo mucho más detallado ver [12] o [21]. Y también [24].

El cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ no admite la presencia de "números infinitamente pequeños" o infinitésimos, porque la suposición de que exista un ε estrictamente positivo que sea menor que $1/n$ para cualquier número natural n lleva inmediatamente a una contradicción con la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$. A pesar de ello, durante 300 años, desde la invención del cálculo infinitesimal, muchos científicos, incluyendo los matemáticos más eminentes, han usado infinitésimos en sus razonamientos para alcanzar resultados correctos. El manejo de los infinitésimos ha sido durante este tiempo objeto de controversia porque su utilidad era obvia pero su manejo correcto en las operaciones estaba sujeto más a la intuición que a reglas precisas, lo que daba lugar a errores.

Esta anómala situación fue corregida por Abraham Robinson en 1960 mediante la ampliación de $\mathbb{R}$ a un nuevo cuerpo ordenado ${}^*\mathbb{R}$ que incluye infinitésimos y para el que conocemos con precisión sus reglas de cálculo. Los elementos de ${}^*\mathbb{R}$ se llaman números **hiperreales** y los de $\mathbb{R}$ considerados como hiperreales se llaman también números **estándar** ([180]). La clave de este descubrimiento está en identificar con claridad la forma de distinguir las propiedades que comparten $\mathbb{R}$ y ${}^*\mathbb{R}$ de las que no comparten.

Los hiperreales y los reales comparten todas las propiedades que son **de primer orden**, es decir, aquellas que se expresan formalmente con los cuantificadores $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe al menos un) aplicados sobre elementos que recorren todo el conjunto de números. Esto permite que los cálculos con hiperreales se hagan de manera muy similar a los cálculos con números reales. Por ejemplo la propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$, implica la misma propiedad en ${}^*\mathbb{R}$: $\forall x, y \in {}^*\mathbb{R},\ x + y = y + x$.

Pero no necesariamente comparten las propiedades en las que la variable de algún cuantificador recorre el conjunto de los conjuntos de números, como ocurre, por ejemplo, con la existencia de supremo para cualquier conjunto acotado superiormente (axioma 12 del anexo A), que se cumple en $\mathbb{R}$ pero no en ${}^*\mathbb{R}$: un enunciado formal del axioma 12 comenzaría con $\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \ldots$, por lo que no es una propiedad de primer orden. Esto permite evitar en ${}^*\mathbb{R}$ las contradicciones a las que se llega con los números reales estándar cuando suponemos que existe un infinitesimal no nulo.

(C.2). Resumen del formalismo

Lo sorprendente y fructífero del razonamiento ideado por Robinson es que aporta bastante más que descubrir las reglas para el cálculo con infinitésimos. Además de ampliar el conjunto $\mathbb{R}$ para formar ${}^*\mathbb{R}$, el procedimiento de Robinson amplía también de forma automática cualquier subconjunto de $A \subset \mathbb{R}^n$ a otro ${}^*A \subset ({}^*\mathbb{R})^n$. Como consecuencia, las funciones entre subconjuntos de varias variables también quedan ampliadas ([181]). Resulta entonces que las propiedades de primer orden que se expresan en términos de conjuntos de números o de conjuntos de vectores también son idénticas. Por ejemplo, existen unas funciones ${}^*\cos : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ y ${}^*\sin : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ que cumplen

$$ {}^*\cos(x + y) = {}^*\cos x\ {}^*\cos y - {}^*\sin x\ {}^*\sin y \qquad ([182]) $$

y también son ciertos en los números hiperreales los resultados análogos a todos los de primer orden que son ciertos en los naturales, como, por ejemplo, el análogo al teorema de Fermat:

$$ \forall x, y, z \in {}^*\mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \forall n \in {}^*\mathbb{N},\ n > 2\ \Rightarrow\ x^n + y^n \neq z^n. $$

[180] La parta de las matemáticas que trata con este tipo de ampliaciones se conoce con el nombre de **análisis no estándar**.

[181] Téngase en cuenta que, mediante la identificación de una función con su gráfica, una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ no es más que un tipo especial de subconjunto de $\mathbb{R}^{m+n}$.

[182] En esta expresión estamos utilizando las funciones suma, diferencia y producto ampliadas, sin poner los asteriscos * para denominarlas. Este abuso de notación no da lugar a confusiones y lo aplicaremos constantemente. En el futuro ya no escribiremos ${}^*\cos$ ni ${}^*\sin$, sino cos y sin, aunque estemos aplicando esas funciones a cualquier hiperreal.

Los elementos del conjunto ${}^*\mathbb{N}$, que además de los naturales contiene números infinitos ([183]), se llaman **hipernaturales**. Como la propiedad arquimediana es de primer orden,

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x > 0 \ \wedge\ y > 0 \ \Rightarrow\ \exists n \in \mathbb{N},\ nx > y,$$

sigue siendo cierta cuando se interpreta en ${}^*\mathbb{R}$, es decir,

$$\forall x, y \in {}^*\mathbb{R},\ x > 0 \ \wedge\ y > 0 \ \Rightarrow\ \exists n \in {}^*\mathbb{N},\ nx > y.$$

Lo que ocurre es que esta última propiedad ya no contradice la existencia de algún ε estrictamente positivo y que sea menor que $1/n$ para todos los números naturales n (lo que no es posible es que ese ε sea menor que $1/n$ no para todos los números *hipernaturales* n).

El trabajo inicial de Robinson demuestra la existencia de un cuerpo de números hiperreales con las características que acabamos de describir, mediante un profundo razonamiento lógico. Posteriormente han aparecido otras formas de hacerlo que precisan de menos aparato lógico, entre las que destacan la construcción mediante ultraproductos y la teoría interna de conjuntos ([184]). Para un uso elemental de los infinitésimos, que es el que aquí nos puede interesar, no es imprescindible conocer ninguna forma concreta de construirlos, del mismo modo que no es imprescindible conocer una construcción de $\mathbb{R}$ para trabajar con números reales. Basta con fijar de modo axiomático su existencia y las reglas de cálculo que le son aplicables, como se hace en [12].

Siguiendo este último texto, para fundamentar nuestras operaciones en ${}^*\mathbb{R}$ postularemos tres principios ([185]):

Extensión de $\mathbb{R}$, de la relación $\leq$ y de otras funciones reales. ${}^*\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{R}$ y está dotado de una relación de orden que entre elementos de $\mathbb{R}$ coincide con la de $\mathbb{R}$. Toda función real de una o más variables reales, f, tiene asociada una función hiperreal ${}^*f$ con el mismo número de variables hiperreales, que llamaremos **extensión natural** de f. Cuando no haya lugar a confusión utilizaremos también f para denotar a ${}^*f$.

Transferencia. Toda *propiedad* en la que aparezcan una o más funciones reales es también válida para las extensiones naturales de esas funciones. Las propiedades a las que será aplicable este principio serán las formadas por una combinación de igualdades, desigualdades y aserciones sobre la existencia o no de un número.

Parte estándar. Existe un número hiperreal que es estrictamente mayor que cero pero es menor que todos los números reales estrictamente positivos. Los hiperreales cuyo valor absoluto cumple esta propiedad se llaman **infinitésimos**. Cualquier hiperreal x cuyo valor absoluto sea menor que alguno real tiene un número real $\operatorname{st} x$ (**parte estándar** de x) del que se diferencia en un infinitésimo.

(C.3). Utilización de los infinitésimos

Una vez establecidos estos principios podemos pasar a operar con infinitésimos y a utilizarlos en los conceptos y en los razonamientos del cálculo infinitesimal. Damos a continuación una brevísima muestra, remitiendo para más detalles, así como para las demostraciones, a los textos ya citados. La notación $\boldsymbol{x \approx y}$ significa que la diferencia $x - y$ es infinitesimal. Un hiperreal se llama **infinito** cuando su valor absoluto es mayor que el de cualquier número real. En caso contrario se llama **finito**.

Algunos cálculos:

- El único infinitésimo estándar es el 0. Si $\varepsilon \approx 0$ es un infinitésimo no nulo y positivo, entonces $0 < \ldots < \varepsilon^3 < \varepsilon^2 < \ldots < \varepsilon/3 < \varepsilon/2 < \varepsilon < 2\varepsilon < 3\varepsilon < \ldots < \sqrt{\varepsilon} < \sqrt[3]{\varepsilon}$ son todos infinitésimos.

[183] Ver, por ejemplo, [3].

[184] No entraremos a describir, ni siquiera someramente, en qué consisten estas construcciones. Para la construcción con ultraproductos, ver, por ejemplo, el capítulo 0 de [23]. Y para la teoría interna de conjuntos, ver, entre otros, [17] o [25].

[185] Como es natural, en caso de que hiciéramos una construcción de ${}^*\mathbb{R}$ todos estos postulados pasarían a ser teoremas.

- Si H es infinito, entonces $1/H$ es infinitesimal. Y, recíprocamente, si ε es un infinitésimo no nulo, entonces $1/\varepsilon$ es infinito.

- La suma y el producto de finitos es siempre finita. Y el producto de un infinitésimo por un finito es infinitesimal.

- Si dos números son infinitamente próximos y se multiplican por un mismo número finito (o, lo que es lo mismo, se dividen por un mismo número que no sea infinitesimal), dan como resultado dos números que siguen siendo infinitamente próximos.

- Si x e y son finitos, $\mathrm{st}(x+y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$ y $\mathrm{st}(xy) = \mathrm{st}(x)\,\mathrm{st}(y)$. Y si, además, $x \leq y$, entonces $\mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$.

- Cualquier sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una extensión natural $(a_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$. Y la convergencia (en $\mathbb{R}$) $a_n \to \lambda$ equivale a que para cualquier subíndice infinito H, $a_H \approx \lambda$.

  Por tanto, una demostración de que $n^{1/n} \to 1$ puede hacerse probando que para cualquier hipernatural infinito H, $H^{1/H} \approx 1$. Para ello, llamamos $\varepsilon = H^{1/H} - 1$, que es mayor que 0 ([186]). Ahora hacemos las siguientes operaciones, todas ellas amparadas por nuestros postulados: como $H^{1/H} = 1 + \varepsilon$, elevando a H y aplicando la fórmula del binomio de Newton,

$$H = (1+\varepsilon)^H = 1 + H\varepsilon + \frac{H(H-1)}{2}\varepsilon^2 + \cdots + \binom{H}{k}\varepsilon^k + \cdots + \varepsilon^H,$$

  de donde deducimos que $H > \frac{H(H-1)}{2}\varepsilon^2$, luego $\varepsilon^2 < \frac{2}{H-1} \approx 0$, y por tanto $\varepsilon \approx 0$.

Algunos conceptos del cálculo diferencial: Considérese una función real definida sobre un intervalo real, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Si $a \in I$, entonces para que f sea continua en a es necesario y suficiente que para todo $x \in {}^*I$, $x \approx a \;\Rightarrow\; f(x) \approx f(a)$.

- Para que f sea uniformemente continua sobre I es necesario y suficiente que $\forall x, y \in {}^*I,\ x \approx y \;\Rightarrow\; f(x) \approx f(y)$.

- Si $a \in I$, para que f sea derivable en a es necesario y suficiente que para todo $x \in {}^*I$, $a \neq x \approx a \;\Rightarrow\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tenga siempre la misma parte estándar. Y entonces esa parte estándar es $f'(a)$. Como consecuencia, si en las proximidades del punto $(a, f(a))$ aplicamos un microscopio de potencia infinita, la gráfica de f no se distingue de una recta de pendiente $f'(a)$.

- Para que f sea de clase $\mathscr{C}^1$ sobre I es necesario y suficiente que $\forall x, y \in {}^*I,\ y \neq x \approx y \;\Rightarrow\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \approx f'(x)$.

Damos a continuación un ejemplo de cómo se utilizan los infinitésimos en las demostraciones ([187]), probando el teorema de los valores intermedios para funciones continuas (teorema de Bolzano). *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, con $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún número real $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Tomamos un hipernatural infinito H, formamos el infinitésimo $\varepsilon = (b-a)/H$ y consideramos los $H+1$ puntos a, $a+\varepsilon$, $a+2\varepsilon$, $\ldots$, $a+H\varepsilon = b$. Bastará con que nos fijemos en un par de puntos consecutivos en los que el valor de f pase de no ser estrictamente positivo a serlo; entonces la parte estándar de esos dos puntos nos servirá como número c.

Para concretar, nos fijamos en la primera vez que en estos puntos la función f toma un valor estrictamente positivo, es decir, definimos

$$n_0 = \min\{n \in {}^*\mathbb{N} : n \leq H,\ f(a+n\varepsilon) > 0\},$$

[186] Puesto que $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 1 \Rightarrow n^{1/n} > 1$, deducimos por el principio de transferencia, que $\forall n \in {}^*\mathbb{N},\ n > 1 \Rightarrow n^{1/n} > 1$, y en particular que $H^{1/H} > 1$.

[187] En el anexo D mostramos un desarrollo detallado del uso de estos argumentos con infinitésimos para calcular derivadas de funciones elementales.

que existe por el mismo motivo que existiría si H en lugar de ser infinito fuese finito ([188]).

Llamamos $c = \mathrm{st}(a + n_0\varepsilon)$, que existe por aplicación del principio de la parte estándar; terminaremos la demostración probando que $f(c) = 0$.

Como $a + n_0\varepsilon$ y $a + (n_0 - 1)\varepsilon$ sólo se diferencian en un infinitésimo, tienen la misma parte estándar, c. Y como f es continua en c ha de cumplir que

$$f(a + n_0\varepsilon) \approx f(c) \approx f(a + (n_0 - 1)\varepsilon).$$

Pero por la elección que hemos hecho de n_0, $f(a + n_0\varepsilon) > 0$ y $f(a + (n_0 - 1)\varepsilon) \leq 0$. Luego $f(c)$ (que es un número estándar) tiene que se nulo.

Señalemos, finalmente, que la ampliación de $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$ no sólo es útil para el cálculo diferencial o integral sino también para otras partes de las matemáticas. Y que tiene aplicaciones directas en otras ciencias donde se utilizan las matemáticas.

(C.4). Mismas preguntas para la estructura de ${}^*\mathbb{R}$ que para la de $\mathbb{R}$

Dado que algunos de los axiomas de $\mathbb{R}$ son redundantes, no hace falta insistir en que en la estructura que hemos descrito de ${}^*\mathbb{R}$ necesariamente tiene que haber, al menos, las mismas redundancias. En cambio, sí que debemos responder de manera específica a la consistencia y a la unicidad de ${}^*\mathbb{R}$.

Una de las bases de la construcción de ${}^*\mathbb{R}$ proporcionada por Robinson es el resultado que en la teoría de modelos lógicos se denomina teorema de compacidad y que garantiza que, gracias a la distinción que hemos hecho entre las propiedades de primer orden y las que no lo son, dentro de la axiomática ZFC (ver la nota al pie de página nº 177) la nueva estructura no es ni más ni menos consistente que la de $\mathbb{R}$. La idea básica, que a primera vista resulta paradójica, es en esencia la siguiente, simplificando mucho la cuestión ([189]):

Si al conjunto de propiedades de $\mathbb{R}$ que pueden enunciarse mediante una expresión de primer orden se añade la existencia de un elemento ε para el que son ciertas todas las (infinitas) propiedades

$$0 < \varepsilon < 1, \quad \varepsilon < 1/2, \quad \varepsilon < 1/3, \quad \varepsilon < 1/4, \quad \varepsilon < 1/5, \ldots$$

resulta que el nuevo conjunto de propiedades es igual de consistente que lo era el anterior, al menos en términos finitarios. ¿Por qué? Porque si a partir del nuevo conjunto de propiedades se pudiera deducir una contradicción finitaria, esa deducción se habría hecho en un número finito de pasos partiendo de un número finito de propiedades de primer orden de $\mathbb{R}$ y un número finito de propiedades de la lista anterior. Pero cualquier elección finita de desigualdades de entre las anteriores es también verdadera en $\mathbb{R}$ (para un cierto ε estándar), por lo que la contradicción la habríamos deducido dentro del propio $\mathbb{R}$.

En cambio, la unicidad no se cumple para números hiperreales de igual manera que para números reales. Existen muchas estructuras de ${}^*\mathbb{R}$ que no son isomorfas entre sí. Por ejemplo, hay modelos de ${}^*\mathbb{R}$ con distintos cardinales, por lo que entre ellos no existe ninguna biyección. Por consiguiente, hablar de *los* números hiperreales es un abuso de nomenclatura, que no está tan justificado como cuando hablamos de *los* números reales. No obstante, en el manejo operativo de infinitésimos este abuso no da lugar a confusión.

---

[188] Dicho de una manera más formal: aplíquese el principio de transferencia a la propiedad

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 \leq N \wedge \left[f\Big(a + n_0 \frac{b-a}{N}\Big) > 0 \wedge \left(\forall n \in \mathbb{N},\ n < n_0 \Rightarrow f\Big(a + n\frac{b-a}{N}\Big) \leq 0 \right) \right].$$

[189] Puede consultarse una versión más formal, que permite aclarar las paradojas, en varias fuentes. Ver, por ejemplo, [3], [4] y [32].

D

Anexo D: Funciones elementales (continuidad y derivabilidad)

Dedicamos este anexo a demostrar que todas las funciones cuya existencia se postula en el anexo B son continuas y son derivables salvo en algunos puntos excepcionales, así como a calcular sus derivadas en los puntos donde existan.

En todo el anexo hacemos un uso intensivo del principio de transferencia y de los cálculos con infinitésimos y demás números hiperreales, ver el apartado (C.3) para sus propiedades básicas y su relación con la convergencia de sucesiones, la continuidad y las derivadas.

Supondremos conocidas las principales propiedades de las funciones (definidas entre intervalos reales) continuas o derivables, entre ellas

- la composición, la suma, la diferencia, el producto y el cociente (en los puntos donde no se anule el denominador) de funciones continuas es una función continua;
- la composición, la suma, la diferencia, el producto y el cociente (en los puntos donde no se anule el denominador) de funciones derivables es una función derivable; y las reglas de derivación para estos casos;
- la inversa de una función inyectiva y continua es continua; y la inversa de una función inyectiva y derivable es también derivable (en los puntos donde no se anule la derivada de la función inicial) y su derivada es el recíproco de la derivada de la función inicial.

Lema D.1 *Para cualquier infinitésimo no nulo ε,*

$$\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \approx 1.$$

Demostración: *Al ser $\varepsilon \approx 0$, se cumplen en ε las desigualdades citadas en el apartado (B.2) para la función exponencial de base e (ver la figura B.3), es decir,*

$$1 + \varepsilon \leq e^\varepsilon \leq 1 + \varepsilon + \varepsilon^2, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \leq e^\varepsilon - 1 \leq \varepsilon + \varepsilon^2.$$

Dividiendo por ε y teniendo en cuenta que cuando se divide por un número negativo hay que cambiar el orden de la desigualdad,

$$\varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; 1 \leq \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon,$$
$$\varepsilon < 0 \;\Rightarrow\; 1 \geq \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \geq 1 + \varepsilon.$$

En ambos casos el cociente $(e^\varepsilon - 1)/\varepsilon$ está comprendido entre 1 y $1 + \varepsilon$, por lo que es infinitamente próximo a 1.

Teorema D.2 *La función* exp*, cuya existencia garantiza el axioma 13, es derivable. Y $\exp' x = \exp x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración: *Tomamos un x real cualquiera y un infinitésimo no nulo ε. Entonces*

$$\frac{e^{x+\varepsilon} - e^x}{\varepsilon} = \frac{e^x\, e^\varepsilon - e^x}{\varepsilon} = e^x\, \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \approx e^x,$$

donde la última aproximación se sigue del lema anterior y del hecho de que al multiplicar por un número finito (en este caso, e^x) dos números infinitamente próximos, los productos también son infinitamente próximos.

Corolario D.3 *Todas las funciones exponenciales y logarítmicas, así como las funciones potencia, introducidas en el axioma 13 son derivables en todos los puntos de sus dominios. Sus derivadas son:*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in (0,+\infty), \quad (x^a)' = ax^{a-1}.$$
$$\forall b, x \in (0,+\infty),\ b \neq 1, \quad (\log_b)'x = \frac{1}{x \log b}; \quad \log' x = \frac{1}{x}.$$
$$\forall b \in (0,+\infty), \forall x \in \mathbb{R}, \quad (b^x)' = e^x \log b\,.$$

DEMOSTRACIÓN: *Solamente necesitamos demostrar lo relativo al logaritmo neperiano. Todo lo demás se deduce inmediatamente, gracias a las fórmulas del apartado (B.2).*

Como log *es la función inversa de* exp*, por el teorema anterior y las propiedades de las derivadas de funciones inversas,* log *es derivable y*

$$\log' x = \left[\exp^{-1}\right]'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

Teorema D.4 *Sea ε un infinitésimo no nulo. Entonces*

$$\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \approx 1, \quad y \quad \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} \approx 0.$$

Equivalentemente, la función seno es derivable en el origen, con derivada igual a 1; y la función coseno es derivable en el origen, con derivada igual a 0.

DEMOSTRACIÓN: *Basta aplicar desigualdades del apartado (B.3), como exponemos a continuación.*

En primer lugar observamos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ε es positivo, dado que $\sin\varepsilon = -\sin(-\varepsilon)$ y $\cos\varepsilon = \cos(-\varepsilon)$.

Y cuando ε sea positivo,

$$1 \approx 1 - \varepsilon^2/6 = \frac{\varepsilon - \varepsilon^3/6}{\varepsilon} < \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1; \quad 0 < \frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon} < \frac{\varepsilon^2/2}{\varepsilon} = \varepsilon/2 \approx 0,$$

de donde se sigue el resultado del enunciado.

Corolario D.5 *Todas las funciones trigonométricas introducidas en el axioma 13 son derivables en todos los puntos de sus dominios, con la excepción de que las inversas del seno y del coseno en los extremos de sus intervalos de definición son solamente continuas. Las derivadas de las principales funciones son:*

$$\begin{aligned}
\sin' x &= \cos x \\
\cos' x &= -\sin x \\
\tan' x &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\
\cot' x &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x \\
\arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arctan' x &= \frac{1}{1+x^2}\ .
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN:

seno y coseno *Para cualquier x real y cualquier infinitésimo no nulo ε,*

$$\frac{\sin(x+\varepsilon) - \sin x}{\varepsilon} = \frac{\sin x \cos\varepsilon + \cos x \sin\varepsilon - \sin x}{\varepsilon} = \sin x \frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} + \cos x \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \approx \cos x,$$
$$\frac{\cos(x+\varepsilon) - \cos x}{\varepsilon} = \frac{\cos x \cos\varepsilon - \sin x \sin\varepsilon - \cos x}{\varepsilon} = \cos x \frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} - \sin x \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \approx -\sin x,$$

donde las últimas aproximaciones se siguen del teorema anterior.

tangente y cotangente *Las derivadas de la tangente y de la cotangente se deducen de las del seno y el coseno utilizando la regla para derivar un cociente.*

trigonométricas inversas

- *Arcoseno. Sea* $x \in [-1, 1]$, *con* $\sin\alpha = x$ *y* $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$. *Por la propiedad de la derivabilidad de la función inversa,*

$$\arcsin \text{ es derivable en } x \iff \sin'\alpha = \cos\alpha \neq 0 \iff x \in (-1, 1).$$

  Y para $x \neq 1, -1$ *su derivada es*

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

  donde la raíz cuadrada hay que tomarla positiva porque al ser $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos\alpha$ *es positivo (el signo es fácil de recordar teniendo en cuenta que la función* arcsin *es creciente, ver la figura B.7).*

- *Arcocoseno. Se demuestra de manera análoga al caso anterior.*
- *Arcotangente. Es similar a los dos anteriores pero más sencillo porque* arctan *es derivable en todos los puntos de su dominio, que ahora es toda la recta real: si* $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, *con* $x = \tan\alpha$,

$$\arctan \text{ es derivable en } x \iff \tan'\alpha = 1 + \tan^2\alpha \neq 0, \text{ que es siempre cierto.}$$

  Y además,

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'\alpha} = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+x^2}.$$

E

Anexo E: Otras dimensiones. Integración de formas diferenciales sobre cadenas

(E.1). Introducción

En los capítulos 1 al 4 del curso hemos ido exponiendo definiciones y propiedades de las integrales sobre objetos de una, dos o tres variables que estaban sumergidos en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$. Algunas de esas definiciones y propiedades son fácilmente generalizables a más variables; piénsese, por ejemplo, en la definición de integral de Riemann para una función de dos o de tres variables, que no hay dificultad en extender a cualquier número finito de variables. Para otros conceptos, en cambio, resulta más problemático aventurar cómo se van a tratar con más variables, como por ejemplo las integrales sobre conjuntos análogos a las superficies cuando estemos en un ambiente de más de tres dimensiones.

En este anexo daremos las herramientas matemáticas imprescindibles para definir integrales sobre objetos k-dimensionales que estén sumergidos en un espacio n-dimensional, con $1 \leq k \leq n$. Estas definiciones recuperarán las dadas para integrales sobre caminos (cuando $k = 1$) o sobre parametrizaciones de superficies (cuando $k = 2$ y $n = 3$), así como las integrales de una, dos o tres variables (cuando $k = n = 1, 2, 3$, respectivamente). ([190])

Conviene resaltar que nuestra presentación es del mismo nivel elemental que el resto del curso y, por tanto, con un alcance limitado. Para desarrollar una teoría más ambiciosa resulta obligado recurrir a otros conceptos más profundos, como las variedades diferenciales o las particiones de la unidad ([191]).

El formalismo que desarrollaremos nos permitirá, además de generalizar a dimensiones cualesquiera el lenguaje, los conceptos, las fórmulas y los resultados más importantes que se han obtenido hasta ahora en una, dos o tres variables, dar una forma unificada a los operadores gradiente, divergencia y rotacional, así como resumir en un solo resultado los teoremas más importantes del cálculo vectorial (el de Green-Riemann, el de Stokes, el de la divergencia y el fundamental del cálculo generalizado).

119. El objetivo central de este anexo es dar las definiciones necesarias para poder enunciar el *teorema general de Stokes*, que engloba en un solo resultado todos los teoremas clásicos del cálculo vectorial.

Usaremos integrales múltiples de más de tres variables, sobre las que no diremos nada porque no existen diferencias significativas con las integrales de dos o de tres variables, ni en cuanto a definiciones ni en lo relativo a sus propiedades.

(E.2). Álgebra multilineal

Necesitamos el lenguaje de la parte del álgebra lineal que se denomina *álgebra exterior*. En línea con el espíritu del resto de la asignatura, mantendremos el nivel más elemental posible, limitándonos a dar las definiciones imprescindibles para nuestro objetivo, sin aspirar a una teoría general de tensores.

El espacio $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, de tensores alternados de orden k sobre $\mathbb{R}^n$.

Definición E.1 *Llamaremos* ***diferencial de x_i, dx_i,*** *a la proyección sobre la i-ésima coordenada ($i = 1, \ldots, n$) definida sobre $\mathbb{R}^n$,*

$$dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad dx_i(\boldsymbol{v}) = v_i, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos el ***producto exterior de diferenciales*** *de la siguiente manera:*

- *Para cada par de subíndices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ llamaremos*

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}.$$

[190] No hablaremos de generalizaciones de *curvas* o *superficies*, sólo de *parametrizaciones*.

[191] Ver, por ejemplo, [20].

- *Para cada terna de subíndices $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ llamaremos*

$$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} u_i & v_i & w_i \\ u_j & v_j & w_j \\ u_k & v_k & w_k \end{vmatrix}.$$

- *De modo análogo se define el producto de un número finito de dx_i, $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.*

120. La notación dx_i adquiere pleno sentido (diferencial de la función x_i) a través de la siguiente consideración: La proyección $\boldsymbol{x} \rightsquigarrow x_i$, que siguiendo las notaciones habituales para funciones llamamos simplemente x_i, es lineal, luego es diferenciable y su diferencial dx_i es en todos los puntos la propia proyección.

Obsérvese que en $\mathbb{R}^2$ el área del paralelogramo determinado por los vectores $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ es $|(dx_1 \wedge dx_2)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|$ (ver la justificación del teorema 2.34). Por motivos similares, en $\mathbb{R}^3$ el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ (es decir, el volumen del conjunto de combinaciones lineales de estos tres vectores con todos los coeficientes comprendidos entre 0 y 1) es $|(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})|$. Este es el motivo de que introduzcamos la siguiente definición, válida para cualquier dimensión.

Definición E.2 *Se llama* ***elemento de volumen en $\mathbb{R}^n$, dV_n****, a la aplicación $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.*

De esta forma, para cada dimensión $n = 1, 2, 3$ los productos de las n proyecciones dx_i están relacionados con las integrales simples, dobles, triples. Y también las combinaciones lineales de productos de menos de n diferenciales nos han salido ya en varias partes del curso. Así, bajo la acción del campo vectorial constante $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, el trabajo desarrollado por una partícula al ir en línea recta desde el punto $\boldsymbol{p}$ hasta el punto $\boldsymbol{q}$, puede escribirse como el resultado de una combinación de aplicaciones lineales sobre el vector $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$,

$$\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = (F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + F\, dx_3)(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}).$$

Y el flujo del mismo campo vectorial al atravesar la superficie del paralelogramo determinado por los vectores $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ es

$$\pm \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) = \pm(F_1\, dx_2 \wedge dx_3 + F_2\, dx_3 \wedge dx_1 + F_3\, dx_1 \wedge dx_2)(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$$

(el signo depende del sentido en el que se atraviese la superficie del paralelogramo).

Definición E.3 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, las combinaciones lineales de las funciones $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ forman el espacio vectorial de los* ***tensores alternados n-dimensionales de orden k, $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$****. Definimos además $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.*

De las propiedades de los determinantes se sigue inmediatamente que $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ siempre que $k > n$.

121. Nos interesa mucho analizar con detalle algunos casos particulares, que nos aproximarán a la dimensión del espacio vectorial $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ y más adelante nos permitirán recuperar los campos vectoriales o escalares que integrábamos en el curso.

Comenzamos con tensores alternados en dimensión 3:

Caso $n = 3$, $k = 1$ (dimensión 3 y orden 1). Si $n = 3$, cada uno de los elementos generadores de $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$, $\{dx, dy, dz\}$, puede expresarse como un vector básico de tres coordenadas, utilizando su expresión matricial como aplicación lineal. Por ejemplo,

$$dy(\boldsymbol{v}) = (0, 1, 0) \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Luego cada elemento de $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ se corresponde de modo biunívoco con un elemento de $\{(\lambda, \mu, \nu) : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$.

Caso $n = 3$, $k = 2$ (dimensión 3 y orden 2). Siguiendo con $n = 3$, el resultado análogo al anterior para $k = 2$ es la correspondencia de los elementos de $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ con matrices cuadradas 3×3 **alternadas** (matrices M para las que su traspuesta es igual a su opuesta, $M^t = -M$):

$$(dx \wedge dy)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (u_1, u_2, u_3) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

y lo mismo con $dy \wedge dz$, $dx \wedge dy$. Luego cada elemento de $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ se corresponde biunívocamente con uno del conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\},$$

que es también un espacio vectorial de dimensión 3, igual que ocurría cuando $k = 1$, $n = 3$.

Más en general, el conjunto $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ es una base del espacio vectorial $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ (no demostraremos esta afirmación, ver [20], Teorema 4-5).

Por consiguiente, la dimensión del espacio de tensores alternados n-dimensionales de orden k es el número combinatorio $\binom{n}{k}$, $\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$. En consecuencia, el espacio de tensores alternados n-dimensionales de orden k puede identificarse, en cuanto espacio vectorial, con $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

Bajo este isomorfismo, que indicaremos mediante $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$, cada tensor alternado se corresponde biunívocamente con el conjunto ordenado de sus coeficientes en función de la base anterior. En $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ usaremos siempre la base de los vectores $\boldsymbol{e_i} = (0, \ldots, \overset{\overset{i}{\vee}}{1}, \ldots, 0)$. Salvo indicación expresa en sentido contrario, en los casos $k = 1$ o $k = n - 1$ supondremos siempre que el isomorfismo es el que asocia las bases canónicas de ambos espacios del siguiente modo:

- si $k = n - 1$, $\boldsymbol{e_i} \rightsquigarrow (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots dx_n$,
- si $k = 1 \neq n - 1$, $\boldsymbol{e_i} \rightsquigarrow dx_i$

(como consecuencia, cuando $n = 2$, $k = 1$ tendremos dos posibilidades). Más adelante veremos el motivo para estas correspondencias.

Producto exterior

Definidos los productos exteriores $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, extendemos por linealidad la misma operación a tensores alternados cualesquiera:

Definición E.4 *El **producto exterior** de un tensor alternado ω de orden k por un tensor alternado η de orden ℓ (los dos n-dimensionales) es el tensor alternado de orden $k + \ell$ definido por*

$$\omega \wedge \eta = \left(\sum \omega_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \wedge \left(\sum \eta_{j_1 \ldots j_\ell} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \right) = \\ = \sum \omega_{i_1 \cdots i_k} \eta_{j_1 \ldots j_\ell} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}.$$

Teorema E.5 *Si ω es un tensor de orden k, η es un tensor de orden ℓ, δ es un tensor de orden h, y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,*

1. $(\omega \wedge \eta) \wedge \delta = \omega \wedge (\eta \wedge \delta)$
2. $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$
3. $(\lambda\omega + \mu\eta) \wedge \delta = \lambda(\omega \wedge \delta) + \mu(\eta \wedge \delta)$ *(en este caso suponemos $k = \ell$)*
4. *Si $k = 0$, $\omega \wedge \eta = \omega\eta$*

DEMOSTRACIÓN: *Ver [20], Teorema 4-4.*

Haciendo uso de la identificación $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ como se describió más arriba, y escribiendo las coordenadas en el orden adecuado para cada caso, el producto exterior de tensores incluye como casos particulares distintas operaciones de "multiplicación" que hemos manejado a lo largo del curso:

1. Para cualquier n, si $k = 0$ y $\ell = 0, n$, entonces el producto exterior es la multiplicación de números reales.
2. Para $n > 1$, si $k = 0$ y $\ell = 1, n-1$, entonces el producto exterior es la multiplicación de un escalar por un vector.
3. Para $n > 1$, si $k = 1$ y $\ell = n-1$, entonces el producto exterior es el producto escalar de vectores (tener en cuenta los isomorfismos descritos al final del apartado (E.2)).
4. Para $n = 3$, si $k = 1$ y $\ell = 1$, entonces el producto exterior es el producto vectorial.

Una generalización natural del producto vectorial de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^n$ corresponde a una operación que en general no es binaria ([192]).

(E.3). Cálculo diferencial

En este apartado introducimos los entes (formas diferenciales) que jugarán el papel de los campos escalares o vectoriales en los capítulos 1 al 4, y la operación (diferencial exterior) que generalizará las tres que han aparecido en los teoremas clásicos: gradiente, rotacional y divergencia.

Definición E.6 *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, una* ***k-forma (diferencial) sobre U*** *es una aplicación $\omega : U \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. El conjunto de todas las k-formas sobre U lo denotaremos mediante* $\boldsymbol{\Lambda^k(U)}$.

Utilizando las bases de cada uno de los espacios de tensores alternados, las formas diferenciales pueden escribirse como una combinación lineal

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \omega_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ ,$$

donde todas las $\omega_{i_1 \cdots i_k}$ son funciones escalares sobre U, que supondremos siempre que son de clase $\mathscr{C}^\infty$.

Como funciones que toman valores en un espacio vectorial, las k-formas pueden sumarse y multiplicarse por escalares (punto a punto).

Utilizaremos el isomorfismo de espacios vectoriales entre $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ para identificar una k-forma ω con el vector formado por sus funciones componentes $\omega_{i_1 \cdots i_k}$.

122. Así, para $n = 3$, tanto $\Lambda^1(U)$ como $\Lambda^2(U)$ pueden identificarse con el conjunto de los campos vectoriales sobre U, mientras que $\Lambda^0(U)$ y $\Lambda^3(U)$ pueden identificarse con el conjunto de los campos escalares sobre U.

Dado un abierto U de $\mathbb{R}^n$, la aplicación que a cada función de clase $\mathscr{C}^\infty$ sobre U asocia su diferencial,

$$\omega \rightsquigarrow d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial \omega}{\partial x_n}\, dx_n,$$

[192] Una generalización natural a $\mathbb{R}^n$ del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ puede hacerse a través del elemento de volumen n-dimensional, observando lo siguiente: un par de vectores de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, dan lugar a una aplicación lineal $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada vector $\boldsymbol{w}$ hace corresponder el producto mixto $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$ (que es, quizá salvo el signo, el volumen del paralelepípedo determinado por $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$).

Al pasar a un número de dimensiones que no sea 3 y hacer uso de los isomorfismos descritos en la página 203, lo que se obtiene es una operación que no es binaria y que asigna un vector n-dimensional al producto de $n-1$ vectores n-dimensionales $\boldsymbol{v^1}, \ldots, \boldsymbol{v^{n-1}}$ de la siguiente forma: la aplicación $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(\boldsymbol{v^1}, \ldots, \boldsymbol{v^{n-1}}, \cdot)$, que a cada vector $\boldsymbol{w}$ asocia $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(\boldsymbol{v^1}, \ldots, \boldsymbol{v^{n-1}}, \boldsymbol{w})$, es de $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, luego para ciertos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se tiene

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(\boldsymbol{v^1}, \ldots, \boldsymbol{v^{n-1}}, \ \cdot\ ) = \lambda_1\, dx_1 + \cdots + \lambda_n\, dx_n.$$

El vector $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es por definición el **producto vectorial** $\boldsymbol{v^1} \times \cdots \times \boldsymbol{v^{n-1}}$.

¿Qué significa esta definición en el caso de que la dimensión n sea 2?

podemos escribirla con el lenguaje introducido en este anexo como

$$\Lambda^0(U) \xrightarrow{d} \Lambda^1(U).$$

Pues bien, la diferenciación exterior generaliza esta aplicación del siguiente modo:

Definición E.7 *La **diferencial exterior** de una k-forma ω sobre U es la $(k+1)$-forma sobre U definida por*

$$d\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \omega_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Teorema E.8 *Si ω es una k-forma y η es una ℓ-forma*

- $d(\lambda\omega+\mu\eta) = \lambda d(\omega)+\mu d(\eta)$, *donde* $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ *y suponemos* $k=\ell$.
- $d^2(\omega)=0$.
- $d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^{k\ell}\omega\wedge d\eta$.

DEMOSTRACIÓN: *Ver [20], Teorema 4-10.*

De manera similar a lo que ocurre con el producto exterior, la diferenciación exterior incluye también varias operaciones conocidas en el cálculo vectorial, a través de la identificación $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)\equiv\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ (página 203). En efecto:

1. Si $k=0$, entonces d es el operador *gradiente*: $d\lambda \equiv \boldsymbol{\nabla}\lambda = \boldsymbol{grad}\,\lambda$.

   123. Con el símbolo $\equiv$ indicamos la identificación asociada a los isomorfismos $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)\equiv\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ descritos en la página 203.

2. Si $k=n-1$ (suponiendo previamente que $n>1$), entonces d es el operador *divergencia*:

$$d\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\lambda_i\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_n\right)\equiv \operatorname{div}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

3. Si $n=3$ y $k=1$, entonces d es el operador *rotacional*:

$$d(\lambda\, dx+\mu\, dy+\nu\, dz)\equiv \boldsymbol{rot}(\lambda,\mu,\nu).$$

4. De acuerdo con los puntos anteriores y con las identificaciones (o isomorfismos) comentadas en las observaciones 122 y 123, en el caso $n=3$ se tiene el siguiente diagrama ilustrativo sobre las correspondencias entre el operador d y con los operadores clásicos:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^0(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(\text{isom})"] & \Lambda^1(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(\text{isom})"] & \Lambda^2(U) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "(\text{isom})"] & \Lambda^3(U) \arrow[d, "(\text{isom})"] \\
\left\{\begin{array}{r}\text{C. escalares}\\ \text{sobre } U\end{array}\right\} \arrow[r, "\boldsymbol{grad}"] & \left\{\begin{array}{r}\text{C. vectoriales}\\ \text{sobre } U\end{array}\right\} \arrow[r, "\boldsymbol{rot}"] & \left\{\begin{array}{r}\text{C. vectoriales}\\ \text{sobre } U\end{array}\right\} \arrow[r, "\operatorname{div}"] & \left\{\begin{array}{r}\text{C. escalares}\\ \text{sobre } U\end{array}\right\}
\end{tikzcd}$$

5. El caso $n=2$ y $k=1$ admite una interpretación excepcional debido a que $n-1=1$ y por consiguiente el isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\Lambda^1(\mathbb{R}^2)$ puede hacerse de dos formas distintas de acuerdo con lo descrito en la página 203. Si se toma la correspondencia definida por $\boldsymbol{e_i}\rightsquigarrow dx_i$, entonces d está relacionado con la forma vectorial de la fórmula de Green-Riemann (ver el teorema 2.43):

$$d(\lambda\, dx+\mu\, dy) = \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) dx\wedge dy \equiv \boldsymbol{rot}(\lambda,\mu,0)\cdot\boldsymbol{k}.$$

   Para la otra correspondencia (tomando k como $n-1$), d es el operador divergencia en dos dimensiones, como acabamos de explicar más arriba.

Utilizando estas "traducciones" y las del final del apartado (E.2), algunas de las fórmulas del análisis vectorial son casos especiales de propiedades del producto exterior y la diferenciación exterior. Por ejemplo, dados campos escalares f y g, y campos vectoriales $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{G}$ (todos ellos indefinidamente diferenciables sobre un abierto de $\mathbb{R}^3$), las igualdades

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) &= f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla} f \\
\boldsymbol{rot}(f\boldsymbol{F}) &= f\, \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{F} \\
\operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{G} \\
\operatorname{div} \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F} &= 0 \\
\boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{\nabla} f &= 0 \\
\operatorname{div}(\boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{\nabla} g) &= 0
\end{aligned}$$

son todas ellas corolarios del teorema E.8.

También el concepto de campo conservativo puede generalizarse al contexto de las formas diferenciales ([193]).

(E.4). Cálculo integral

Considérense un abierto U de $\mathbb{R}^n$ y una k-forma ω sobre U (donde $0 \leq k \leq n$, y $1 \leq n$). En primer lugar daremos para cada par de valores de k y n una definición de integral de ω sobre "parametrizaciones" dependientes de k parámetros y con imágenes en U. A continuación, para $n \leq 3$ reinterpretaremos en estos términos las integrales sobre ciertas clases de subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ (curvas simples orientadas, superficies orientadas, regiones simples tridimensionales, ...). Una generalización genuina de las integrales sobre curvas y sobre superficies en $\mathbb{R}^3$ a objetos de cualquier dimensión contenidos en $\mathbb{R}^n$ se obtiene a través de las *variedades diferenciables*, cuyo estudio queda fuera de los objetivos de este curso ([194]).

Definición de cadena y de integral sobre una cadena

Sean k, n dos números enteros, con $1 \leq n$ y $0 \leq k \leq n$. El caso $k = 0$ requerirá un tratamiento algo especial; convendremos en que el intervalo $[0, 1]$ elevado a cero es igual al conjunto formado solamente por el cero, $[0, 1]^0 = \{0\}$.

Definición E.9 *Se llama* ***cubo k-dimensional en*** $\mathbb{R}^n$ *a una aplicación del tipo* $\boldsymbol{c} : [0, 1]^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *que en los casos en que* $k > 0$ *supondremos siempre de clase* $\mathscr{C}^\infty$.

Definición E.10 *Si* $\omega \in \Lambda^k(U)$ *es una* k*-forma definida sobre un abierto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *que contenga a la imagen de un cubo* $\boldsymbol{c}$, *se define la* ***integral de la k-forma*** $\boldsymbol{\omega}$ ***sobre c*** *mediante una integral de Riemann* k*-dimensional,*

$$\int_{\boldsymbol{c}} \omega = \int_{[0,1]^k} \cdots \int \left(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \cdots i_k}(\boldsymbol{c}(u_1, \ldots, u_k)) \frac{\partial(c_{i_1}, \ldots, c_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)} (u_1, \ldots, u_k) \right) du_1 \ldots du_k$$

siempre que $k > 0$.

En caso de que $k = 0$, *resulta que* ω *es un campo escalar sobre* U, *y el cubo puede identificarse con un*

[193] De las propiedades elementales de la diferenciación exterior, se sigue inmediatamente que para que una k-forma sea la diferencial de una $(k-1)$-forma (se dice entonces que la k-forma es **exacta**) es necesario que su diferencial sea nula (es decir, que la k-forma es **cerrada**).

En la sección 1.4 (teoremas 1.33 y 1.35) hemos visto hipótesis adicionales bajo las cuales esta condición es también suficiente para ciertos casos particulares ($k = 1$ y $n = 2, 3$; $k = 2$ y $n = 3$), una de los cuales es generalizable a cualquier dimensión: Pueden utilizarse las mismas ideas que en la demostración del lema de Poincaré (teorema K.1) para probar, si bien con una demostración algo laboriosa, que en caso de que U sea un abierto n-dimensional estrellado, para que una k-forma sobre U (donde n y k son mayores o iguales que 1) sea la diferencial de una $(k-1)$-forma, es suficiente con que su diferencial exterior sea nula, ver [20], Teorema 4-11.

[194] Hay abundantes referencias interesantes para iniciarse en el cálculo en variedades. Una de las más clásicas, que hemos citado varias veces, es [20].

punto $c(0) \in U$. Entonces se define la ***integral de la 0-forma ω sobre c*** *como la evaluación del campo en el punto:*

$$\int_{\boldsymbol{c}} \omega = \omega(\boldsymbol{c}(0)).$$

Se comprueba de forma rutinaria que esta definición contiene a las definiciones de integral de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria ($k = 1$, $n \geq 2$) o sobre la parametrización de una superficie ($k = 2$, $n = 3$). Se comprueba igualmente que es compatible con el teorema del cambio de variable para integrales dobles ($k = n = 2$) y triples ($k = n = 3$).

Dados dos cubos k-dimensionales en $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$, considérese su **suma formal** o **encadenamiento**, $\boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2}$, operación que no definiremos rigurosamente y de la que a los efectos del curso bastará con saber que dota a las sumas cubos de estructura de grupo abeliano: es asociativa y conmutativa, tiene elemento neutro y cada cubo tiene un opuesto.

124. Un cubo es una función, pero la suma formal de dos cubos *no es* su suma en el sentido habitual de suma de dos funciones, se parece más a la suma de caminos.

Si $\boldsymbol{c}$ es un cubo cualquiera, convendremos en escribir también $(+1)\boldsymbol{c}$ en lugar de $\boldsymbol{c}$, y $(-1)\boldsymbol{c}$ para el opuesto de $\boldsymbol{c}$ para la operación de sumar.

Definición E.11 *Una* ***cadena k-dimensional en $\mathbb{R}^n$****, c, es una suma formal de cubos k-dimensionales en $\mathbb{R}^n$: $c = \boldsymbol{c_1} + \cdots + \boldsymbol{c_m}$. La* ***integral de una k-forma sobre una cadena k-dimensional*** *es la suma de las integrales sobre cada uno de los cubos que forman la cadena:*

$$\int_{\boldsymbol{c_1}+\cdots+\boldsymbol{c_m}} \omega = \int_{\boldsymbol{c_1}} \omega + \cdots + \int_{\boldsymbol{c_m}} \omega$$

Definición E.12 *Si $c = \boldsymbol{c_1} + \cdots + \boldsymbol{c_m}$ es una cadena k-dimensional (con $k > 0$), el* ***borde de c, ∂c****, es la cadena $(k-1)$-dimensional definida por la suma*

$$\partial c = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \alpha = 0,1 \\ 1 \leq j \leq k}} (-1)^{j+\alpha} \boldsymbol{c_i}^{(j,\alpha)},$$

donde en caso de que $k > 1$, $\boldsymbol{c_i}^{(j,\alpha)}$ es la aplicación

$$\begin{array}{rcl} [0,1]^{k-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (u_1, \ldots, u_{k-1}) & \longmapsto & \boldsymbol{c_i}(u_1, \ldots, u_{j-1}, \alpha, u_j, \ldots, u_{k-1}), \end{array}$$

y en el caso de que $k = 1$, $\boldsymbol{c_i}^{(1,\alpha)}(0) = \boldsymbol{c_i}(\alpha)$.

Los casos de dimensión menor o igual que 3

Vamos a ir usando las definiciones E.10 y E.11 en diferentes contextos dimensionales y recuperando como integrales sobre cubos o sobre cadenas las distintas integrales que hemos introducido a lo largo del curso, para $n = 1, 2, 3$ y $1 \leq k \leq n$. Al considerar integrales sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y no sobre una parametrización concreta que describa al subconjunto (como se hizo al integrar sobre cadenas), el recinto de integración aparecerá dotado de una orientación.
Supongamos para empezar que el espacio ambiente es tridimensional, es decir, que $n = 3$.

- Si $k = 1$, entonces $\omega = \lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz$, y como recinto sobre el cual realizaremos la integración, tomamos una curva simple orientada o una curva cerrada simple orientada, C^+, donde C esté contenida en el dominio de ω. Entonces eligiendo una trayectoria $\boldsymbol{c}$ que parametrice a C^+ (lo que implica en particular que sea compatible con su orientación), es inmediato comprobar que

$$\int_{\boldsymbol{c}} \omega = \int_{C^+} (\lambda, \mu, \nu) \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Más en general, la misma igualdad es válida si tomamos como recinto de integración a cualquier unión finita de curvas simples orientadas o curvas cerradas simples orientadas que no se corten entre sí.

Los isomorfismos descritos en la página 203 nos permiten ahora introducir el siguiente concepto:

Definición E.13 *Si $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una trayectoria de clase $\mathscr{C}^\infty$ y con derivada no nula en todos los puntos, que define una curva simple o una curva cerrada simple, C, su* ***elemento de longitud*** $d\boldsymbol{s}$ *es por definición la 1-forma que corresponde (tomando $n = 3$, $k = 1$) al vector tangente unitario $\boldsymbol{c}'/\|\boldsymbol{c}'\|$: si (T_x, T_y, T_z) es un vector tangente unitario y continuo,*

$$d\boldsymbol{s} = T_x\, dx + T_y\, dy + T_z\, dz.$$

125. Obsérvese que a pesar de la notación, $d\boldsymbol{s}$ no es necesariamente la diferencial de una 0-forma.

La longitud de la curva C coincide por tanto con la integral sobre C^+ de su elemento de longitud (orientando C de acuerdo con la misma tangente).

- Si $k = 2$, entonces $\omega = \lambda\, dy \wedge dz + \mu\, dz \wedge dx + \nu\, dx \wedge dy$. Ahora elegiremos como recinto de integración una superficie, Σ^+, dotada de la orientación asociada a una parametrización $\boldsymbol{\Phi} : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que sea inyectiva y regular sobre todo $[0, 1]^2$; el caso más sencillo lo constituye una superficie dada en forma explícita sobre $[0, 1]^2$ y orientada positivamente. Entonces

$$\int_{\boldsymbol{\Phi}} \omega = \iint_{\Sigma^+} (\lambda, \mu, \nu) \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Utilizando ahora el isomorfismo introducido en la página 203 para $n = 3$ y $k = 2$,

Definición E.14 *Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie dotada de una parametrización $\boldsymbol{\Phi} : D \longrightarrow \Sigma$ biyectiva, de clase $\mathscr{C}^\infty$ y suave en todos los puntos, el* ***elemento de superficie*** $d\boldsymbol{S}$ *es la 2-forma que corresponde a la normal unitaria $\dfrac{\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}}{\|\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}\|} = \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}\right) \Big/ \left\|\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}\right\|$. En otras palabras, si (N_x, N_y, N_z) es un vector normal unitario continuo,*

$$d\boldsymbol{S} = N_x\, dy \wedge dz + N_y\, dz \wedge dx + N_z\, dx \wedge dy.$$

126. Obsérvese que a pesar de la notación, $d\boldsymbol{S}$ no es, en general, la diferencial de ninguna 1-forma.

Entonces el área de Σ es igual a la integral sobre Σ^+ de su elemento de superficie (al tomar sobre Σ la orientación determinada por la misma normal).

- Si $k = 3$, entonces $\omega = \lambda\, dx \wedge dy \wedge dz$ es una 3-forma con una única componente λ. Tomamos como recinto de integración a una región simple tridimensional, W, que sea una deformación del cubo unidad, $W = \boldsymbol{T}([0, 1]^3)$, donde $\boldsymbol{T} : [0, 1]^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva y con jacobiano no nulo en todos los puntos. Sobre W consideraremos una **orientación sign(W)** que valdrá $+1$ o -1 según que el jacobiano de $\boldsymbol{T}$ sea positivo o negativo. Entonces, según la definición de integral sobre un cubo, E.10, y el teorema del cambio de variables (análogo al 2.35 pero con 3 variables),

$$\int_{\boldsymbol{T}} \omega = \operatorname{sign}(W) \iiint_W \lambda(x, y, z)\; dx\, dy\, dz.$$

Supongamos ahora que $n = 2$.

- Para $k = 1$ la situación es totalmente análoga al caso $k = 1$ y $n = 3$.

- Si $k = 2$, entonces $\omega = \lambda\, dx \wedge dy$, y el recinto de integración es una región simple bidimensional D que sea la imagen de $[0,1]^2$ mediante una transformación $\boldsymbol{T} : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ inyectiva y con jacobiano no nulo en todos los puntos, y dotada de una orientación $\operatorname{sign}(D)$, que es el signo del jacobiano de $\boldsymbol{T}$. Entonces
$$\int_{\boldsymbol{T}} \omega = \operatorname{sign}(D) \iint_D \lambda(x,y)\; dx\, dy$$
(aplicando el teorema del cambio de variable 2.35).

Por último, el caso $n = 1$. Entonces $k = 1$, luego $\omega = \lambda\, dx$, y el recinto de integración es un intervalo $I = [a,b]$ dotado de una orientación $\operatorname{sign}(I)$. Como "parametrización" de $[a,b]$ tomamos el cambio de variable $\varphi : [0,1] \longrightarrow [a,b]$, $\varphi(t) = a + t(b-a)$ en caso de que $\operatorname{sign}(I) = +1$, y $\varphi(y) = b + t(a-b)$ si $\operatorname{sign}(I) = -1$. Entonces
$$\int_{\varphi} \omega = \operatorname{sign}(I) \int_a^b \lambda(x)\, dx$$
(aplicando el teorema del cambio de variable para integrales de una variable, apartado 1.1.3).

(E.5). Teorema general de Stokes

Teorema E.15 (general de Stokes) *Sean $1 \le k \le n$. Si c es una cadena k-dimensional en $\mathbb{R}^n$ y ω es una $(k-1)$-forma definida sobre la unión de las imágenes de los elementos que forman c,*
$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

★ **127**. Haciendo uso reiterado del teorema de Fubini k-dimensional, la demostración del teorema general de Stokes, que nosotros no desarrollaremos, se reduce con facilidad al teorema fundamental del cálculo en una variable. Ver [20], Teorema 4-13.

Veamos cómo para los distintos valores posibles de las dimensiones k y n, con $1 \le k \le n \le 3$, el teorema general de Stokes reproduce algunos de los resultados más importantes estudiados en el curso. Para ello utilizaremos las notaciones introducidas en el apartado (E.4).

$n = 3$**.** k puede tomar los valores 1, 2, 3.

- Si $k = 1$, entonces $\omega = \lambda$ es una 0-forma y $\boldsymbol{c}$ es la parametrización de una curva (simple o cerrada simple) orientada. Entonces $d\omega$ tiene las mismas componentes que el vector $\boldsymbol{\nabla}\lambda$, y $\partial\boldsymbol{c}$ no es más que el conjunto formado por los puntos extremos de la curva, el inicial con orientación negativa y el final con orientación positiva (definición E.12). Por tanto la fórmula del teorema general de Stokes es ahora la del teorema fundamental del cálculo en su forma generalizada (teorema 1.17).
- Si $k = 2$, entonces $\omega = \lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz$ es una 1-forma luego su diferencial exterior $d\omega$ puede identificarse con el vector $\boldsymbol{rot}(\lambda,\mu,\nu)$. Tomando como $\boldsymbol{c}$ la parametrización de una superficie como se describió en el apartado (E.4), la fórmula es ahora la del teorema de Stokes clásico.
- Si $k = 3$, $\omega = \lambda\, dy \wedge dz + \mu\, dz \wedge dx + \nu\, dx \wedge dy$, luego $d\omega$ puede identificarse con $\operatorname{div}((\lambda,\mu,\nu))$. De acuerdo con el apartado (E.4), y tomando el recinto descrito por $\boldsymbol{T}$ con orientación positiva, la fórmula es ahora la del teorema de la divergencia.

$n = 2$**.** Si $k = 1$, la situación es totalmente análoga a la del caso $n = 3$, $k = 1$. Si $k = 2$, entonces $\boldsymbol{c}$ corresponde a una transformación $\boldsymbol{T} : [0,1]^2 \longrightarrow D$ (ver apartado (E.4)), donde D es una región bidimensional simple en las dos direcciones. De acuerdo con las identificaciones descritas en la página 203, ahora hay dos formas posibles de identificar el campo vectorial (λ,μ) con una 1-forma ω. Utilizando $\boldsymbol{e_i} \rightsquigarrow (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots dx_n$, se obtiene la fórmula de Green-Riemann que se dio como teorema de la divergencia en el plano (teorema 2.45).

Y utilizando $\boldsymbol{e_i} \rightsquigarrow dx_i$, se obtiene la igualdad del teorema de Green-Riemann en su formulación inicial (teorema 2.39). En efecto (en lo que sigue trabajaremos sobre la hipótesis de que el jacobiano de $\boldsymbol{T}$ es siempre positivo):

Supóngase en primer lugar que se considera el isomorfismo $\boldsymbol{e_i} \rightsquigarrow dx_i$, de $\mathbb{R}^2$ sobre $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$. En este caso,

$$\int_{\partial \boldsymbol{T}} \omega = \int_{\partial D^+} \omega_1\, dx_1 + \omega_2\, dx_2.$$

Por otra parte, y de acuerdo con lo expuesto en el caso 5. de la sección (E.3), $d\omega = \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$, luego

$$\int_{\boldsymbol{T}} d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2,$$

de modo que la fórmula del teorema general de Stokes reproduce en este caso la del teorema de Green-Riemann.

Considérese ahora el isomorfismo $\boldsymbol{e_i} \rightsquigarrow (-1)^{i+1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots dx_n$. Entonces (nuevamente, ver la sección (E.3)) $d\omega = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$, luego

$$\int_{\boldsymbol{T}} d\omega = \iint_D \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2.$$

Y para interpretar el otro miembro, obsérvese que el isomorfismo que estamos considerando ahora asocia a la 1-forma diferencial ω el campo vectorial $(\omega_2, -\omega_1)$, luego

$$\int_{\partial \boldsymbol{T}} \omega = \int_{\partial D^+} (\omega_2, -\omega_1) \cdot ds = \int_{\partial D} (\omega_1, \omega_2) \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

con lo que se recupera la formulación del teorema de Green-Riemann en términos de la divergencia.

$n = 1$**.** Entonces necesariamente k también ha de valer 1. Tomando la integral sobre $([a,b], +1)$ (ver (E.4)), resulta que $\partial([a,b], +1)$ es el conjunto de dos puntos orientados $\{(a,-1), (b,+1)\}$. Por otra parte, $\omega = \lambda$ es una función real cuyo dominio contiene a $[a,b]$. Por tanto, la fórmula del teorema es ahora

$$\int_a^b \lambda'(t)\, dt = \lambda(b) - \lambda(a),$$

es decir, la regla de Barrow del cálculo elemental.

F

ANEXO F: APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DE CAMPOS ESCALARES SOBRE SUPERFICIES

(F.1). Superficies de revolución

Teorema F.1 *Supongamos que la superficie Σ, de revolución alrededor del eje X, se engendra a partir de una curva simple o cerrada simple, C, que no corta al eje X. Entonces*

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_C |y| \, ds,$$

fórmula que es similar a la del teorema 3.21, pero vale aunque la curva C no admita una parametrización explícita de la forma $y = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN: *Tomamos una representación paramétrica de C (definición 1.26) $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ regular a trozos, $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(t))$, que sin pérdida de generalidad supondremos contenida en el semiplano superior ([195]), es decir, con $y(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Considérese la* ***superficie de revolución Σ obtenida al girar C alrededor del eje X****,*

$$\Sigma = \boldsymbol{\Phi}([a, b] \times [0, 2\pi]), \quad \boldsymbol{\Phi}(t, \theta) = (x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta),$$

que es una superficie de acuerdo con nuestra definición 3.10, como pasamos a comprobar.

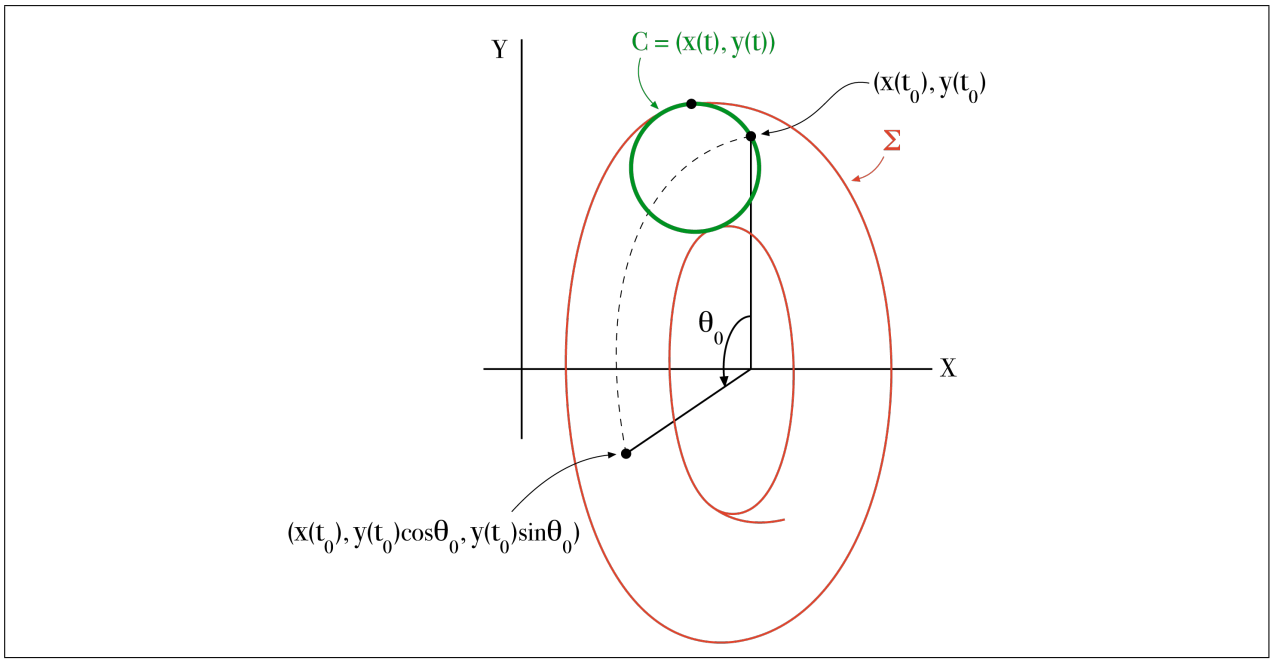


Figura F.1: Superficie generada por la curva C al girar en torno al eje X

Al ser $\boldsymbol{c}$ de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos, la parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ puede no ser diferenciable en una colección finita de

[195] El otro caso posible, es decir, que para todos los puntos de C se tenga $y < 0$, se reduce a éste, sin más que definir una nueva curva, $C' = \{(x, -y) : (x, y) \in C\}$, que está contenida en el semiplano superior y genera la superficie de revolución $\Sigma' = \{(x, -y) : (x, y) \in \Sigma\}$. Entonces

$$A(\Sigma) = A(\Sigma') = \int_{C'} y \, ds = \int_C |y| \, ds,$$

donde la primera igualdad se comprueba observando que $\Sigma = \Sigma'$, dado que $\boldsymbol{\Phi}(t, \theta) = \boldsymbol{\Phi'}(t, \theta \pm \pi)$, donde $\boldsymbol{\Phi'}$ se define como $\boldsymbol{\Phi}$ pero cambiando $y(t)$ por $-y(t)$.

$N-1$ segmentos $\{t^k\}\times[0,2\pi]$, $k=1,\dots,N-1$. Entonces descomponemos el rectángulo $D=[a,b]\times[0,2\pi]$ en un número finito de rectángulos $D_k=[t^{k-1},t^k]\times[0,2\pi]$, que no se solapan y para los cuales se verifican todas las condiciones de la definición 3.10. En efecto, la inyectividad sobre los interiores de los D_k se sigue de la inyectividad de $\boldsymbol{c}$ sobre el intervalo abierto (a,b) ([196]). Y el vector normal es no nulo, puesto que su longitud es $y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$, que es no nula (recuérdese la condición de regularidad sobre $\boldsymbol{c}$). Por tanto,

$$A(\Sigma)=\int_0^{2\pi}\int_a^b \|\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(t,\theta)\|\,dt\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_a^b y(t)\left[x'(t)^2+y'(t)^2\right]^{\frac{1}{2}}\,dt\,d\theta=2\pi\int_C y\,ds.$$

Corolario F.2 (teorema de Pappus para superficies de revolución) *El área de una superficie engendrada por una curva plana (simple o cerrada simple) al girar en torno a un eje contenido en el mismo plano pero que no la corta, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud del trayecto recorrido por el centroide de la curva al dar una vuelta completa.*

128. El **centroide** de un conjunto es el punto que tiene por coordenadas los promedios de cada coordenada sobre el conjunto. Es una especie de versión geométrica del centro de gravedad, puesto que coincide con éste cuando la densidad es constante.

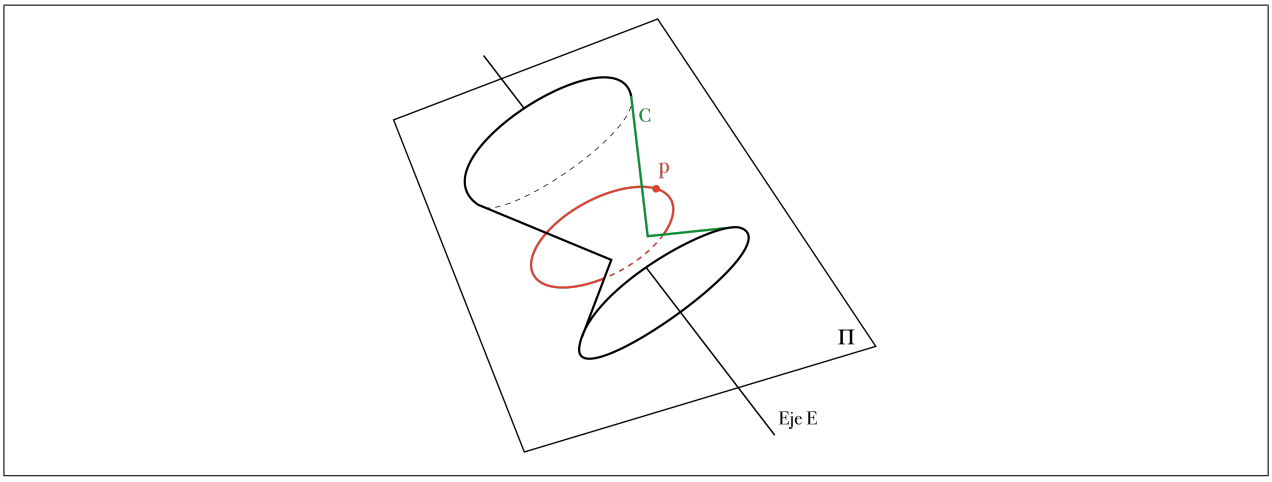


Figura F.2: Superficie Σ generada por la curva (de color verde) C al girar en torno al eje E. En este caso, el centroide de la curva, P, está situado fuera de la curva. Tanto la curva como el eje están contenidos en el plano Π. En rojo, el trayecto recorrido por el P al dar una vuelta completa alrededor de E

DEMOSTRACIÓN: *Elegimos los ejes coordenados de manera que el giro se haga en torno al eje X y que C se encuentre completamente contenida en el semiplano superior.*

Si $(\bar{x},\bar{y})$ es el centroide de la curva C, su recorrido al dar una vuelta completa alrededor del eje X es una circunferencia de radio $\bar{y}$, luego mide $2\pi\bar{y}$. Por otra parte, $\bar{y}$, que es la media de las coordenadas y de C, es igual a $\int_C y\,ds/\ell(C)$, así que aplicando el último teorema,

$$A(\Sigma)=2\pi\int_C y\,ds=2\pi\bar{y}\,\ell(C).$$

[196] Tomemos (t,θ) y (t',θ') en el interior de alguno de los D_k (posiblemente para distintos k). Entonces $t,t'\in(a,b)\backslash\{t^1,\dots,t^{N-1}\}$ y $0<\theta,\theta'<2\pi$. Supongamos que $\boldsymbol{\Phi}(t,\theta)=\boldsymbol{\Phi}(t',\theta')$, es decir,

$$x(t)=x(t')$$
$$y(t)\cos\theta=y(t')\cos\theta'$$
$$y(t)\sin\theta=y(t')\sin\theta'$$

Elevando las dos últimas igualdades al cuadrado y sumándolas, $y(t)^2=y(t')^2$, de donde se sigue que $y(t)=y(t')$, puesto que $y(t)$ e $y(t')$ son positivos. Como además $x(t)=x(t')$, la inyectividad de $\boldsymbol{c}$ sobre el intervalo abierto (a,b) garantiza que $t=t'$.

Una vez que $y(t)=y(t')\neq 0$, podemos simplificarlo y deducir que $\cos\theta=\cos\theta'$, $\sin\theta=\sin\theta'$, luego $\theta=\theta'$, puesto que estamos con ángulos en el intervalo abierto $(0,2\pi)$.

Ejemplo F.3 (Área lateral) Considérese una curva simple $C \subset \mathbb{R}^2$ y Σ el conjunto de ordenadas $\Omega(f)$ de una función $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva y de clase $\mathscr{C}^1$, es decir (definición 2.1),

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C, \;\; 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Entonces Σ es una superficie, y su área coincide con la integral de f sobre C (cf. la introducción a las integrales de un campo escalar sobre un camino),

$$A(\Sigma) = \int_C f \, ds.$$

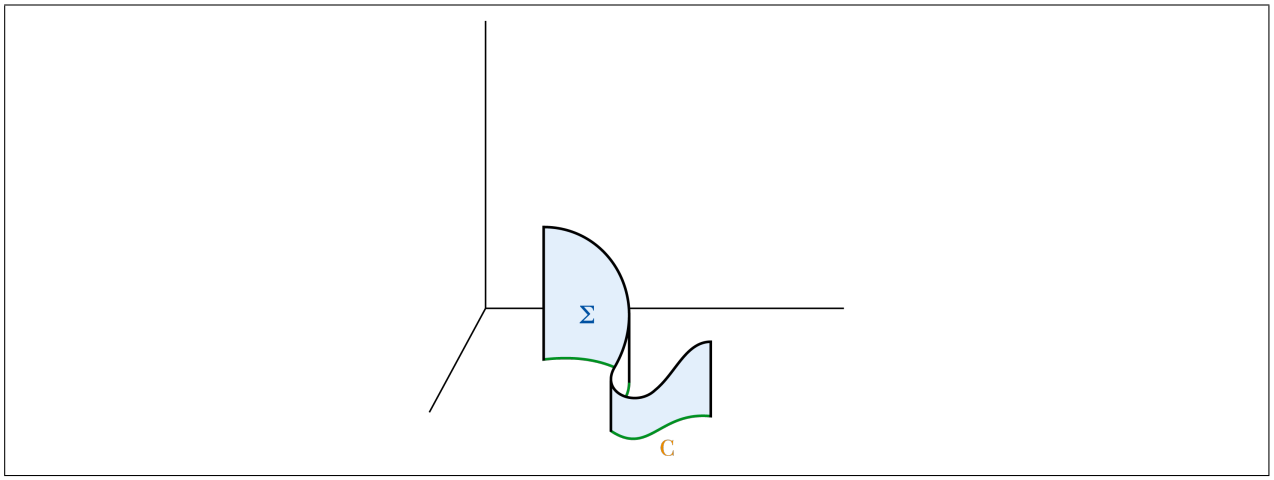


Figura F.3: El área de la superficie Σ coincide con la integral de f sobre la curva C

En efecto. la curva simple $C \subset \mathbb{R}^2$ (definición 1.26) tiene una parametrización regular a trozos $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(t))$. Entonces Σ es una superficie para la parametrización

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{\Phi} : & [a,b] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (t, u) & \longmapsto & \big(x(t), y(t), u f(x(t), y(t))\big) \end{array}$$

(mismas observaciones sobre la eventual descomposición del rectángulo $D = [a, b] \times [0, 1]$ que en la demostración del teorema F.1). En consecuencia,

$$A(\Sigma) = \int_0^1 \int_a^b \|\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\Phi}}(t, u)\| \, dt \, du = \int_a^b f(x(t), y(t)) \big[x'(t)^2 + y'(t)^2\big]^{\frac{1}{2}} dt = \int_C f \, ds. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo F.4 (Área de una superficie de revolución alrededor del eje Y) Por un procedimiento parecido al desarrollado en el ejemplo 3.20, se obtiene la fórmula del volumen engendrado al girar en torno al eje Y la gráfica de una función derivable con continuidad $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $a > 0$. ([197])

La superficie de revolución Σ la definimos ahora mediante $y = f(t)$, $x^2 + z^2 = t^2$, con $t \in [a, b]$. Y la parametrizamos con

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & t \cos\theta \\ y & = & f(t) \\ z & = & t \sin\theta \end{array}\right\}, \quad t \in [a, b], \;\; \theta \in [0, 2\pi].$$

La parametrización es inyectiva sobre el producto de intervalos abiertos $(a, b) \times (0, 2\pi)$ gracias a que hemos impuesto la condición de que $a > 0$ (en realidad, hubiera bastado con exigir que $0 \notin (a, b)$): si los puntos

[197] Una forma alternativa de llegar al mismo resultado sería hacer un cambio de variables y aplicar el teorema F.1.

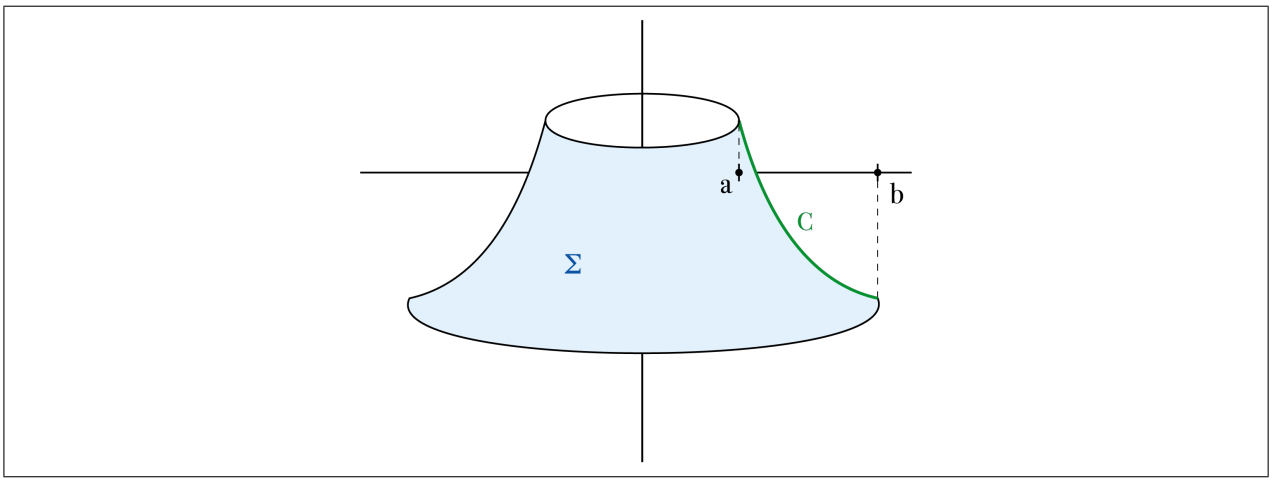


Figura F.4: Superficie de revolución alrededor del eje Y

(t_1, θ_1) y (t_2, θ_2) tienen la misma imagen, entonces $t_1^2 = t_2^2$, luego $t_1 = t_2$, puesto que ambos son positivos, y entonces se deduce que $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ y que $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$, luego $\theta_1 = \theta_2$.

Por último, la fórmula para el área es

$$A(\Sigma) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

porque el vector normal es

$$\boldsymbol{n} = (tf'(t)\cos\theta, -t, tf'(t)\sin\theta)$$

y $\|\boldsymbol{n}\| = t\sqrt{1 + f'(t)^2}$. ([198])

También aquí, igual que en el ejemplo 3.20,

$$A(\Sigma) = \int_C 2\pi x\, ds,$$

que es la integral a lo largo de la gráfica de la longitud de la circunferencia que genera cada punto de la gráfica. ■

(F.2). Principio de Cavalieri generalizado

Supóngase ahora que un conjunto acotado $W \subset \mathbb{R}^3$ puede descomponerse en láminas infinitamente próximas pero disjuntas dos a dos (o con intersección despreciable para las áreas de superficies, en un sentido que precisaremos en el enunciado del teorema), en otras palabras, que se tiene una colección de superficies dependiente de un parámetro, $\{\Sigma_t : t \in [a, b]\}$, que "barren" todo W. Se pretende descomponer el volumen de W en la suma infinita de las áreas de todas las Σ_t, de manera similar a como hicimos en el teorema de Fubini o en el Principio de Cavalieri.

La fórmula es algo más complicada que en esos dos casos. Según las superficies que utilicemos para descomponer W, tenemos que introducir un coeficiente (en general, variable), tal como se explica en el

Teorema F.5 (Principio de Cavalieri generalizado) *Sean $W \subset \mathbb{R}^3$ una región simple, $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y $h : W \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathscr{C}^1$ cuyo gradiente no se anula en ningún punto de W. Supóngase que los conjuntos $\Sigma_t = \{(x, y, z) \in W : h(x, y, z) = t\}$ son superficies para todos los valores de t pertenecientes a un cierto intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Y además que $W = \cup_{t\in[a,b]}\Sigma_t$, con la condición adicional*

[198] En la expresión de la integral hemos cambiado la variable muda t por x para mejor compararla con la fórmula del teorema 3.21.

de que siempre que $s, t \in [a, b]$ sean índices distintos, $\Sigma_t \cap \Sigma_s$ es o vacío o unión finita de puntos y curvas simples. Entonces

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \left(\iint\limits_{\Sigma_t} \frac{f(x,y,z)}{\|\boldsymbol{\nabla} h(x,y,z)\|}\ d\sigma \right)\ dt.$$

DEMOSTRACIÓN: *Una demostración puede consultarse en [18], teorema 108.*

Cambiando la función h a nuestra conveniencia, introducimos diferentes haces de superficies (planos, esferas, cilindros, conos), útiles en diferentes contextos, y el anterior teorema proporciona fórmulas variadas, algunas de las cuales ya las hemos obtenido con anterioridad de otras maneras:

Ejemplo F.6 (del PCG para cualquier haz de planos paralelos: Principio de Cavalieri) Si h es restricción de una función lineal, $\|\boldsymbol{\nabla} h\|$ es constante (por lo que siempre puede elegirse h de modo que esta constante sea igual a 1) y en este caso Σ_t corresponde a la intersección de W con cada uno de los planos de un haz. Entonces

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \left(\iint\limits_{\Sigma_t} f(x,y,z)\ d\sigma \right)\ dt.$$

Y para el volumen de W se obtiene otra vez un resultado del que se deduce el Principio de Cavalieri

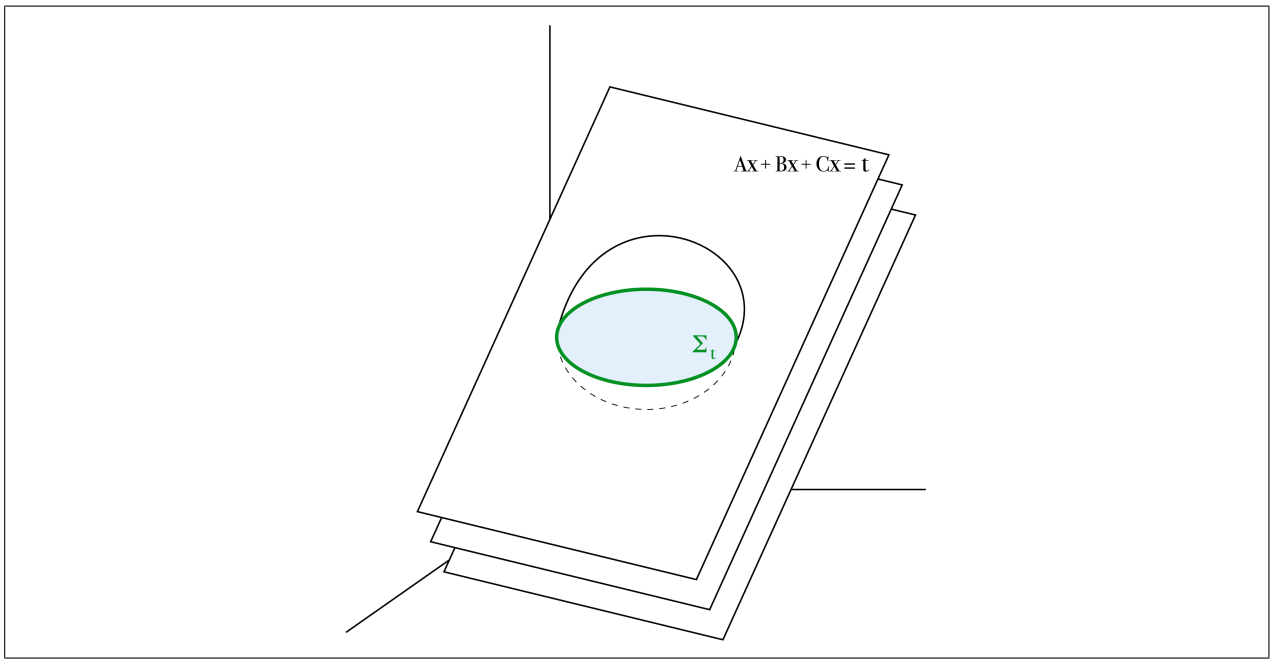


Figura F.5: Σ_t es el corte de W con uno cualquiera de los planos paralelos $Ax + bY + Cz = t$, donde t recorre todo $\mathbb{R}$

(corolario 4.6):

$$V(W) = \int\limits_a^b A(\Sigma_t)\ dt.$$

■

Ejemplo F.7 (del PCG para esferas concéntricas) Tómese $h(x,y,z) = \|(x,y,z)\|$. Entonces $\|\boldsymbol{\nabla} h\|$ vale constantemente 1. Además, $\Sigma_t = \varnothing$ si $t < 0$ y Σ_t es la intersección de W con la esfera de centro el origen y radio t, si $t \geq 0$. Por tanto, eligiendo convenientemente el intervalo $[a, b]$ ([199]),

$$\iiint\limits_W f(x,y,z)\ dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \left(\iint\limits_{\Sigma_t} f(x,y,z)\ d\sigma \right)\ dt.$$

[199] Habría que tomar a y b igual al mínimo y al máximo (respectivamente) de todos los radios vectores de puntos de W.

Y para el volumen de W se obtiene una fórmula que es similar a la del ejemplo anterior, pero ahora cortando con esferas concéntricas:

$$V(W) = \int_a^b A(\Sigma_t)\ dt. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo F.8 (del PCG para planos perpendiculares al eje X: volúmenes de revolución al girar en torno al eje X) Considérese una función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase $\mathscr{C}^1$ y positiva, y llamemos $\Omega(g)$ al conjunto de ordenadas de g (ver definición 2.1), es decir,

$$\Omega(f) = \{(x, y) : x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq g(x)\},$$

y W al conjunto engendrado por $\Omega(f)$ al girar alrededor del eje X, es decir,

$$W = \{(x, y, z) : x \in [a, b],\ y^2 + z^2 \leq g(x)^2\}.$$

Aplicando el Principio de Cavalieri, tras cortar con los planos $x = t$ ([200]), $a \leq t \leq b$, y teniendo en cuenta que en este caso $A(\Sigma_t) = \pi g(t)^2$,

$$V(W) = \pi \int_a^b g(t)^2\ dt. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo F.9 (del PCG para un haz de cilindros: volúmenes de revolución al girar en torno al eje Y) Por un procedimiento parecido se obtiene la fórmula del volumen engendrado al girar en torno al eje Y el mismo conjunto (siempre que la gráfica de la función g esté en el semiplano vertical positivo, es decir, siempre que $a \geq 0$):

$$W = \{(x, y, z) : (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \in [a, b],\ 0 \leq y \leq g([x^2 + z^2]^{\frac{1}{2}})\}.$$

Eligiendo $h(x, y, z) = [x^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$, ([201]) los conjuntos Σ_t son cilindros de área $2\pi t g(t)$. Por tanto, el volumen buscado es:

$$V(W) = 2\pi \int_a^b x g(x)\ dx. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo F.10 (del PCG para un haz de conos: volúmenes de revolución al girar en torno al eje polar) Considérese ahora una función continua y positiva $r : [0, \alpha] \longrightarrow (0, +\infty)$, donde $0 < \alpha \leq \pi$, y llamemos D al conjunto

$$D = \{(u \cos\theta, u \sin\theta) : 0 \leq \theta \leq \alpha,\ \lambda \leq u \leq r(\theta)\},$$

donde λ es estrictamente positivo y menor que el $\min\{r(\theta) : \theta \in [0, \alpha]\}$. El **sólido engendrado por D al girar en torno al eje polar** es el conjunto

$$W = \{(u \cos\theta, u \sin\theta \cos\varphi, u \sin\theta \sin\varphi) : 0 \leq \theta \leq \alpha,\ \lambda \leq u \leq r(\theta),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Elegimos a θ como parámetro, de modo que ahora Σ_θ es un cono: para cada $\theta \in [0, \alpha]$,

$$\Sigma_\theta = \left\{(x, y, z) \in W : \frac{(x, y, z) \cdot (1, 0, 0)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos\theta\right\},$$

es decir, $h(x, y, z) = \arccos\left(x/(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right)$.

Luego $\|\boldsymbol{\nabla} h(x, y, z)\| = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (hacer las operaciones) gracias a que $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ siempre es no nulo ([202]).

---

[200] Con lo cual, $\boldsymbol{\nabla} h = (1, 0, 0)$.

[201] Entonces $\boldsymbol{\nabla} h = \left(x/\sqrt{x^2 + z^2}, 0, z/\sqrt{x^2 + z^2}\right)$ y $\|\boldsymbol{\nabla} h\| = 1$.

[202] En realidad, éste es el motivo por el que en la definición de D hemos acotado inferiormente los valores de u por un número estrictamente positivo: para garantizar que $u \neq 0$ y así asegurarnos de que h es de clase $\mathscr{C}^1$.

El vector normal a Σ_θ en el punto $(u\cos\theta, u\sin\theta\cos\varphi, u\sin\theta\sin\varphi)$ es

$$\boldsymbol{n}(u,\varphi) = u\sin\theta(\sin\theta, -\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi)$$

y $\|\boldsymbol{n}(u,\varphi)\| = u\sin\theta$. Por tanto,

$$\iint\limits_{\Sigma_\theta} \frac{1}{\|\boldsymbol{\nabla} h(x,y,z)\|}\, d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_\theta} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\; d\sigma = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r(\theta)} u^2\sin\theta\; du\, d\varphi = \frac{2\pi}{3} r(\theta)^3 \sin\theta,$$

luego

$$V(W) = \frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\alpha} r(\theta)^3\sin\theta\; d\theta.$$

A esta misma fórmula se llegaría a través de un cambio de variable $(u,\theta,\varphi) \rightsquigarrow (x,y,z)$, que no es más que una variante del cambio a coordenadas esféricas. ■

G

Anexo G: Más aplicaciones del teorema de Stokes

(G.1). Interpretación física del rotacional de un vector

De manera similar a como hicimos en el apartado 2.5.5, buscamos el significado del rotacional de un campo vectorial, ahora en un contexto tridimensional. Sea $\boldsymbol{F}$ el resultado de modelizar el campo de las velocidades (que supondremos derivable con continuidad) a las que se mueve un fluido en cierta región del espacio. Tomamos un punto $\boldsymbol{p}$ contenido en esa región y nos proponemos conocer la rotación que induce el movimiento del fluido en puntos infinitamente próximos a $\boldsymbol{p}$. Para ello elegimos en primer lugar el plano en el que queremos analizar si $\boldsymbol{F}$ hace girar al fluido, no hay que olvidar que estamos en el espacio pero pensamos en un giro alrededor de un eje que pase por $\boldsymbol{p}$, es decir, a lo largo de circunferencias infinitamente próximas a $\boldsymbol{p}$ y contenidas en un cierto plano. Elegir el plano sobre el que estarán nuestras circunferencias C_ε de centro $\boldsymbol{p}$ y radio ε equivale a elegir una recta que pase por $\boldsymbol{p}$, que será el eje del giro. Y elegir un sentido de giro, o

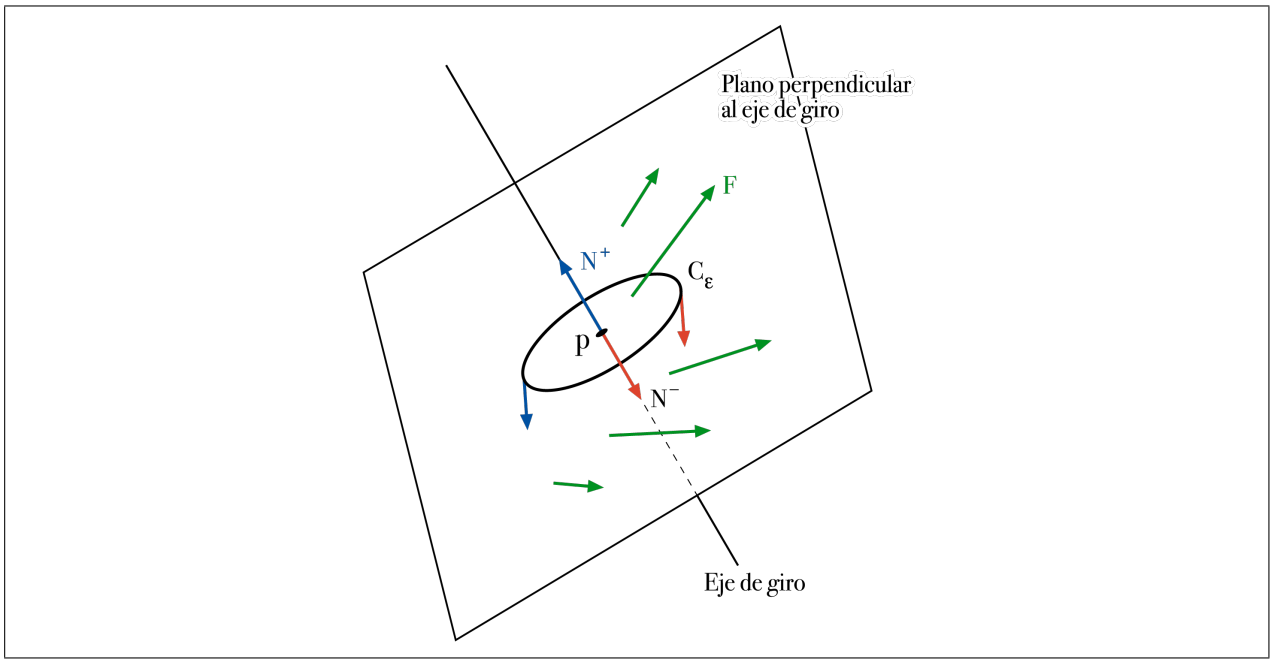


Figura G.1: Acción del campo de velocidades $\boldsymbol{F}$ en las proximidades del punto $\boldsymbol{p}$, sobre el plano ortogonal a un eje de giro dado

una orientación, en la circunferencia C_ε equivale a su vez a elegir uno de los dos vectores tangentes unitarios sobre la recta. La relación entre la normal unitaria al plano y la orientación de la curva vendrá dada por la "regla del sacacorchos" que hemos comentado en el texto. Sean $\boldsymbol{N}$ y C_ε^+ una normal unitaria y la orientación asociada a ella. Y sea B_ε^+ el círculo encerrado por C_ε y orientado (como superficie que es) por $\boldsymbol{N}$, que es la misma en todos los puntos de B_ε.

Por el teorema de Stokes,

$$\frac{1}{A(B_\varepsilon)} \int\limits_{C_\varepsilon^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{A(B_\varepsilon)} \iint\limits_{B_\varepsilon^+} \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{A(B_\varepsilon)} \iint\limits_{B_\varepsilon} \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\ d\sigma = \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}_\varepsilon) \cdot \boldsymbol{N}$$

para cierto q_ε con $\|q_\varepsilon\| < \varepsilon$, donde la última igualdad se sigue del teorema del valor medio para integrales dobles (la integral de superficie sobre B_ε es una integral doble sobre el dominio de una parametrización que describa a B_ε).

Gracias a la continuidad de todas las derivadas parciales de $\boldsymbol{F}$,

$$\boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}_\varepsilon) \cdot \boldsymbol{N} \ \to\ \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{N} \qquad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Como consecuencia de todo lo anterior, *el producto escalar del rotacional del campo* $\boldsymbol{F}$ *por un vector unitario sirve para medir, en cada punto, el* ***giro que induce el campo alrededor del eje*** *que contiene al vector unitario.*

(G.2). Obtención del rotacional en coordenadas cilíndricas

Considérese un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$, $\boldsymbol{F} : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con $W \subset \mathbb{R}^3$, expresado en coordenadas cartesianas de la forma habitual,

$$\boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3) = (F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3)),$$

lo cual es lo mismo que decir que para la base canónica, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$,

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = F_i(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

La base canónica está formada por unos vectores unitarios que caracterizan a cada una de las tres direcciones en las que se mueve un punto al incrementar una de las coordenadas cartesianas. Al cambiar de coordenadas, por ejemplo a cilíndricas $(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{T}(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, estamos introduciendo una nueva base $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$, formada por vectores ([203]) que identifican ahora las direcciones en las que cambiaría un punto al incrementar cada coordenada de las nuevas.

Los vectores de la base no son otra cosa que las derivadas parciales (normalizadas) de $\boldsymbol{T}$ respecto de las coordenadas cilíndricas ([204]): $\boldsymbol{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $\boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$, $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$.

Respecto de esta base el campo tiene tres componentes, que llamaremos F_r, F_θ, F_z (aunque en realidad más bien son componentes de $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{T}$), es decir,

$$F_r(r, \theta, z) = (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{T})_r(r, \theta, z) = \big[(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{e}_r\big](r, \theta, z),$$

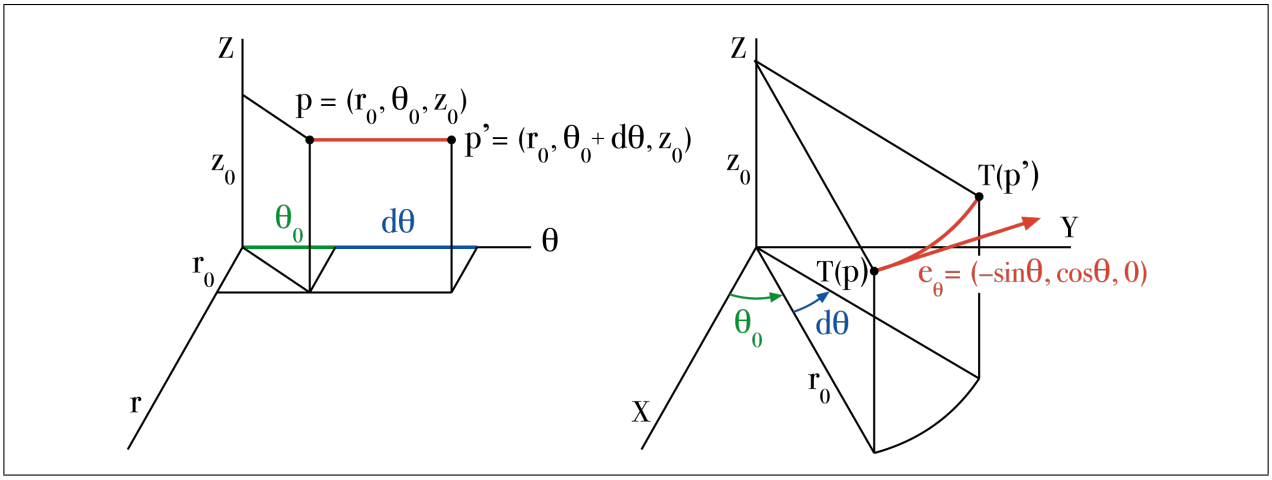


Figura G.2: El valor de $F_\theta(\boldsymbol{p})$ es el producto escalar $(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{T})(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{e}_\theta(\boldsymbol{p})$

y lo mismo con F_θ y F_z. Por tanto,

$$\begin{aligned}
F_r &= (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{e}_r = F_1(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cos\theta + F_2(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\sin\theta \\
F_\theta &= (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{e}_\theta = -F_1(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\sin\theta + F_2(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cos\theta \\
F_z &= (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{e}_z = F_3(r\cos\theta, r\sin\theta, z).
\end{aligned}$$

De estas tres igualdades se pueden deducir relaciones entre las derivadas parciales: derivando y haciendo un uso intensivo de la regla de la cadena obtendremos fórmulas lineales para las (nueve) derivadas parciales respecto de las nuevas variables en función de las (nueve) derivadas parciales $\partial F_i/\partial x_j$. Despejando en estas

[203] Estos vectores son variables, mientras que los de la base canónica eran constantes.

[204] De la misma manera que los vectores de la base canónica coinciden con las derivadas de la identidad respecto de cada variable (en este caso no se necesita normalizarlas porque ya son unitarias).

nueve ecuaciones conseguiríamos fórmulas para expresar las nueve derivadas parciales $\partial F_i/\partial x_j$ en función de las nueve derivadas parciales de las nuevas componentes respecto de las nuevas variables. Así,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_r}{\partial r} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cos\theta + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\cos\theta + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\sin\theta\right)\sin\theta \\
\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\sin\theta - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\cos\theta\right) r\sin\theta - F_1\cos\theta + \left(-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\sin\theta + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cos\theta\right) r\sin\theta - F_2\sin\theta \\
\frac{\partial F_z}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \\
&\text{(etc.)},
\end{aligned}$$

de donde si despejamos $\partial F_1/\partial x_1$, $\partial F_2/\partial x_2$ y $\partial F_3/\partial x_3$ y sumamos, el resultado será la fórmula de la divergencia en las componentes relativas a las coordenadas cilíndricas:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial F_z}{\partial z}\ .$$

De modo análogo, si bien bastante más largo, podría obtenerse $\boldsymbol{rot\,F}$ en términos de las derivadas en las nuevas variables.

129. No obstante, existe un procedimiento alternativo para obtener $\boldsymbol{rot\,F}$ aplicando la fórmula de Stokes, cuya justificación exponemos a continuación.

De acuerdo con la interpretación física del rotacional de un vector, en cada punto $\boldsymbol{p_0} \in W$ la componente de $\boldsymbol{rot\,F}$ en la dirección de r, $\boldsymbol{rot\,F}\cdot\boldsymbol{e}_r$, es la circulación de $\boldsymbol{F}$ por unidad de área en $\boldsymbol{p_0}$ en una superficie perpendicular a $\boldsymbol{e}_r$.

Tomamos una superficie de este tipo, construida a partir del punto $\boldsymbol{p_0}$ mediante incrementos infinitesimales de las coordenadas θ y z, es decir, una superficie Σ^+ descrita mediante las expresiones

$$\Sigma: \qquad r = r_0, \quad \theta_0 \le \theta \le \theta_0 + d\theta, \quad z_0 \le z \le z_0 + dz$$

(donde $d\theta$ y dz son infinitésimos positivos) y orientada mediante la normal $\boldsymbol{e}_r$. Entonces el área de Σ es igual a $r\,d\theta\,dz$, y su borde es $\partial\Sigma^+ = C_z^+ + C_{\theta+d\theta}^+ + C_{z+dz}^+ + C_\theta^+$ (los subíndices indican la coordenada que, junto con r, es constante en cada curva). La integral de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de este borde se calcula de modo aproximado teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
\int_{C_z^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} &= \int_{C_z} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\theta\,ds \ \approx\ F_\theta(r,\theta,z)r\,d\theta, \\
\int_{C_{\theta+d\theta}^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} &= \int_{C_{\theta+d\theta}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_z\,ds \ \approx\ F_z(r,\theta+d\theta,z)dz, \\
\int_{C_{z+dz}^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} &= \int_{C_{z+dz}} -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_\theta\,ds \ \approx\ -F_\theta(r,\theta,z+dz)r\,d\theta, \\
\int_{C_\theta^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} &= \int_{C_\theta} -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_z\,ds \ \approx\ -F_z(r,\theta,z)dz.
\end{aligned}$$

La integral $\int_{\partial\Sigma^+}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ será entonces aproximadamente igual a

$$-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}(r,\theta,z)\,dz\,r\,d\theta + \frac{\partial F_z}{\partial \theta}(r,\theta,z)\,d\theta\,dz,$$

que dividida por el área de Σ da la componente de $\boldsymbol{rot\,F}$ en la dirección de r:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}.$$

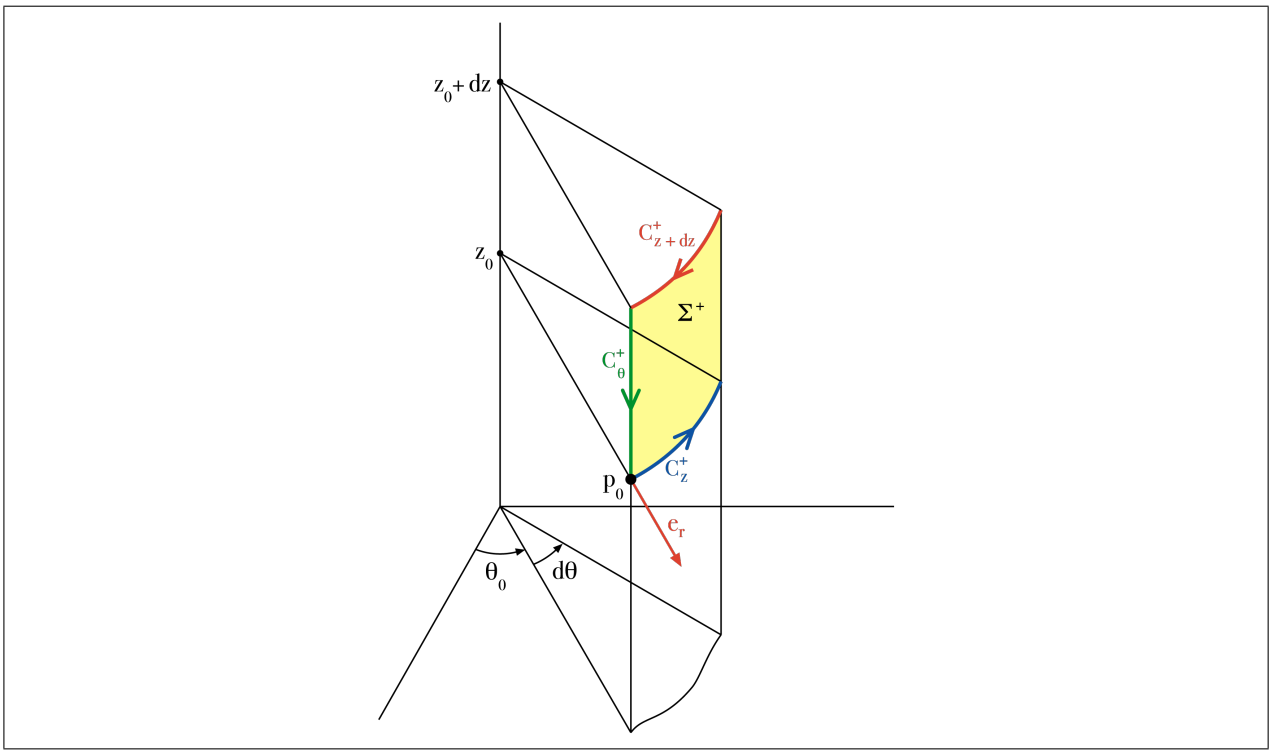


Figura G.3: Superficie cilíndrica infinitesimal a partir del punto $\boldsymbol{p_0}$

Con similares argumentos se obtienen las demás componentes del $\boldsymbol{rot\,F}$ en coordenadas cilíndricas. Las fórmulas resultantes se expresan de forma resumida de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{rot\,F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}.$$

H

Anexo H: Más aplicaciones del teorema de la Divergencia

(H.1). Significado físico de la divergencia de un campo vectorial

El siguiente cálculo justifica que digamos que *la divergencia de un campo vectorial en un punto es la* ***tasa del flujo neto hacia el exterior****, en el punto, por unidad de volumen*:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(B_\varepsilon)}\iint\limits_{\partial B_\varepsilon^+}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(B_\varepsilon)}\iiint\limits_{B_\varepsilon}\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V(B_\varepsilon)}V(B_\varepsilon)\operatorname{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p_\varepsilon})=\operatorname{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}),$$

donde B_ε es una bola cerrada (en $\mathbb{R}^3$) y hemos aplicado el teorema del valor medio para integrales triples para garantizar la existencia de un cierto $\boldsymbol{p}_\varepsilon\in B_\varepsilon$ en el que se cumple la segunda igualdad.

El razonamiento es muy similar al que sugerimos en el apartado 2.5.5, al hablar de la teorema de Green-Riemann en el plano. Ver, por ejemplo, [12], página 839, o [15], página 548.

(H.2). Obtención de la divergencia en coordenadas esféricas

Ver el apartado (G.2) para una explicación del significado de las derivadas parciales de las componentes de un campo vectorial en diferentes sistemas de coordenadas.

Argumentando de modo análogo a como se hizo para la obtención del rotacional en coordenadas cilíndricas y utilizando el apartado anterior (significado físico de la divergencia de un campo vectorial), se obtiene la divergencia en coordenadas esféricas:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2F_\rho)+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\,F_\varphi)+\frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}.$$

Para más detalles, consultar, por ejemplo, [15], final del apartado 8.4.

(H.3). Identidades de Green

Sea $W\subset\mathbb{R}^3$ una región sobre la que es válido el teorema de la divergencia, y sean $f,g:W\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathscr{C}^2$. Entonces,

$$\iint\limits_{\partial W^+}f\boldsymbol{\nabla}g\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{W}(f\boldsymbol{\nabla}^2g+\boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{\nabla}g)$$

$$\iint\limits_{\partial W^+}(f\boldsymbol{\nabla}g-g\boldsymbol{\nabla}f)\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{W}(f\boldsymbol{\nabla}^2g-g\boldsymbol{\nabla}^2f).$$

Ambas igualdades son consecuencia inmediata del teorema de la divergencia. En cierto modo pueden considerarse como las equivalentes a la fórmula de integración por partes, para varias variables.

(H.4). Ángulo sólido

Para trasladar al espacio tridimensional un concepto análogo al de un ángulo plano, se sustituye la región plana limitada por dos semirrectas que se unen en el vértice del ángulo por una región limitada en $\mathbb{R}^3$ por un cono (con un concepto bastante amplio de 'cono', como en el apartado 4.6.2).

El ángulo sólido en $\mathbb{R}^3$ se determina proyectando la región sobre la superficie esférica unidad, del mismo modo que un ángulo plano se define a través de la longitud del arco de la circunferencia unidad comprendido entre sus lados (observación 73):

Definición H.1 *Si Σ es una superficie en $\mathbb{R}^3$ que no pasa por el origen y tal que a cada semirrecta que parte del origen la corta en no más de un punto, el* ***ángulo sólido*** *determinado por Σ respecto al origen es el área de la proyección radial (es decir, proyección siguiendo las rectas que contienen a los radios) de Σ sobre la esfera unidad.*

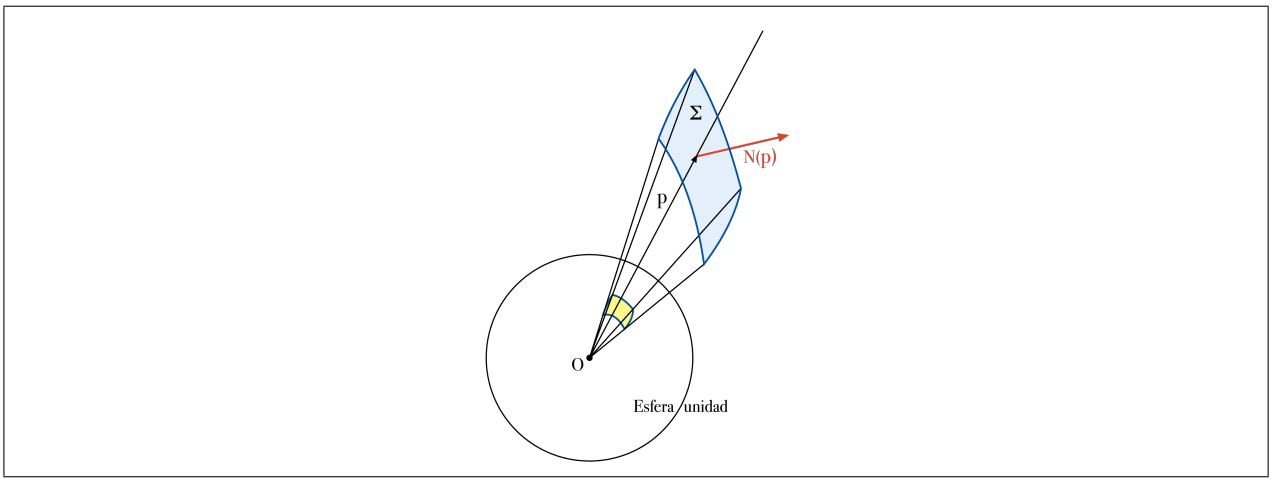


Figura H.1: La superficie resaltada en amarillo es la proyección radial de la superficie Σ (que está coloreada en azul). Su área puede calcularse integrando sobre Σ el escalar $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{p})/\|\boldsymbol{p}\|^3$

El teorema de la divergencia proporciona una fórmula para calcular el ángulo sólido determinado por Σ que se aplica sin salir de Σ, no hace falta medir en la proyección sobre la esfera.

Teorema H.2 *Sea Σ una superficie en $\mathbb{R}^3$ que no pasa por el origen y tal que a cada semirrecta que parte del origen la corta en no más de un punto. Entonces el ángulo sólido que determina Σ respecto al origen es*

$$\iint_{\Sigma} \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{N}(\boldsymbol{p})}{\|\boldsymbol{p}\|^3}\, d\sigma,$$

donde $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{p})$ es la normal a Σ en el punto $\boldsymbol{p}$ que "se aleja del origen".

DEMOSTRACIÓN: *Ver [2], problema 10.5.10.*

I Anexo I: Demostración del teorema de Green-Riemann (teorema 2.39)

Teorema 2.39 (de Green-Riemann para regiones simples en las dos direcciones) *Sea* $\boldsymbol{F} = (P, Q) : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *un campo vectorial de clase* $\mathscr{C}^1$ *sobre un dominio* $D \subset \mathbb{R}^2$ *que es una región simple tanto en las* x *como en las* y*. Entonces para una cierta orientación del borde* ∂D *que se llamará* ***orientación positiva del borde,*** $\boldsymbol{\partial D^+}$*, se cumple la fórmula de Green-Riemann:*

$$\int\limits_{\partial D^+} P\ dx + Q\ dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\ dy\ .$$

Estructuramos la demostración en tres casos. Dos de los resultados que necesitaremos los probaremos aparte, en dos lemas.

(I.1). Demostración

(1) Supongamos en primer lugar que $Q = 0$ *y que* D *es una región simple en las* y*. Siguiendo las notaciones habituales pondremos* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$*, donde* $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *son funciones continuas, con* $\varphi_1 \leq \varphi_2$*. Entonces el borde de* D *(teorema 2.20) es la unión de cuatro conjuntos,*

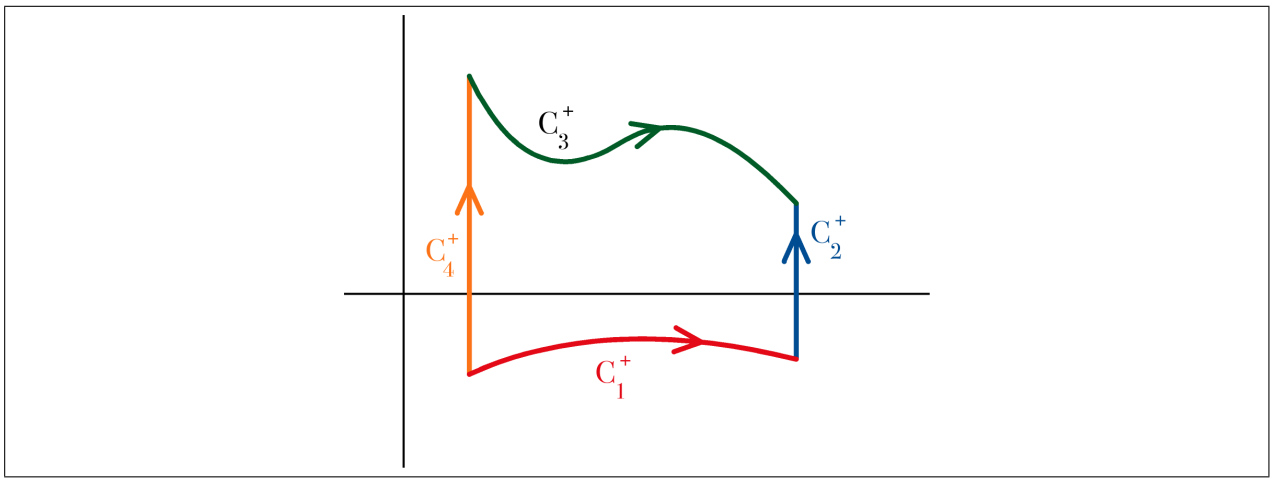


Figura I.1: Los cuatro conjuntos C_1, C_2, C_3 y C_4 en los que dividimos el borde de la región simple D. Las orientaciones son las utilizadas en la demostración

$\partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$*, donde*

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x, \varphi_1(x)) : a \leq x \leq b\} \\ C_2 &= \{(b, y) : \varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b)\} \\ C_3 &= \{(x, \varphi_2(x)) : a \leq x \leq b\} \\ C_4 &= \{(a, y) : \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)\}. \end{aligned}$$

Cada uno de los conjuntos C_2 *y* C_4*, o se reduce a un solo punto o es una curva simple. Podremos suponer sin pérdida de generalidad que* C_2 *y* C_4 *son curvas simples* ([205])*. Entonces las descripciones de estos segmentos son trayectorias de curvas simples orientadas, que denotaremos con* C_2^+ *y* C_4^+*, respectivamente.*

[205] En caso de que, por ejemplo, C_2 fuera un solo punto, también se cumpliría que $\partial D = C_1 \cup C_3 \cup C_4$. Y eliminaríamos del resto de la demostración (incluso de la definición I.1) la curva C_2.

En cuanto a C_1 y C_3, son curvas simples ([206]), y las supondremos orientadas con la orientación inducida por las descripciones ([207]) expuestas más arriba, C_1^+, C_3^+ (es decir, C_1^+ comienza en $(a, \varphi_1(a))$ y C_3^+ comienza en $(a, \varphi_2(a))$).

Definición I.1 *Con las notaciones anteriores, llamaremos* ***orientación positiva sobre la curva borde ∂D****, a la definida mediante $\partial D^+ = C_1^+ + C_2^+ + C_3^- + C_4^-$. ([208])*

Añadimos de manera transitoria la hipótesis de que las funciones φ_1 y φ_2 sean de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos. Ahora sí que tenemos parametrizaciones de las cuatro curvas, en función de x o de y, luego podemos hacer cálculos de integrales sobre ellas de manera muy parecida a lo que hicimos en la demostración de la misma propiedad para rectángulos (teorema 2.38):

$$\int_{C_1^+} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b (P(x,\varphi_1(x)),0)\cdot(1,\varphi_1'(x))\,dx = \int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx$$

$$\int_{C_2^+} P\,dx + Q\,dy = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} 0\cdot dy = 0$$

$$\int_{C_3^+} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b (P(x,\varphi_2(x)),0)\cdot(1,\varphi_2'(x))\,dx = \int_a^b P(x,\varphi_2(x))\,dx$$

$$\int_{C_4^+} P\,dx + Q\,dy = \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} 0\cdot dy = 0$$

(en el caso de que las derivadas de φ_1 y φ_2 no existan en un número finito de puntos de $[a,b]$, las integrales en las que aparecen esas derivadas hay que entenderlas como una suma de integrales, igual que hacemos en otras situaciones similares). Por tanto, apelando al corolario 1.30,

$$\int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_1^+} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2^+} P\,dx + Q\,dy - \int_{C_3^+} P\,dx + Q\,dy - \int_{C_4^+} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_a^b [P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))]\,dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dy\,dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\ .$$

Ahora volvamos a que φ_1 y φ_2 sean solamente continuas ([209]). Para reducirlo al caso anterior, tomamos una parametrización de la curva C_1^+ que sea compatible con su orientación, $\boldsymbol{c} : [a', b'] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Entonces para

---

[206] Esta afirmación no es evidente, puesto que con los datos que conocemos no disponemos de ningún camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos que parametrice a C_1 o a C_3. Ver una demostración, utilizando la propiedad topológica de la conexión, en (I.2).

[207] A estas descripciones no las llamamos parametrizaciones porque pueden no serlo, como hemos explicado en el apartado 2.5.2 con el ejemplo de la circunferencia, dado que las funciones φ_1 y φ_2 podrían ser solamente continuas, y para tener una verdadera parametrización se requieren funciones que sean de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos. Aunque no sean verdaderas parametrizaciones, sí que inducen una orientación en las curvas simples C_1 y C_2, al fijar para cada una de ellas un punto inicial y un punto final en las curvas simples, ver el comentario en la nota a pie de página nº 96.

[208] En la sección 1.3 hemos tratado con sumas de curvas simples, pero no con sumas de curvas simples orientadas. Esta suma de curvas orientadas hay que entenderla como "la curva orientada que tiene por parametrización a una suma de parametrizaciones de las curvas orientadas que son los sumandos".

[209] Estamos resolviendo los casos como el del ejemplo del círculo $x^2+y^2 \le 1$ que pusimos antes del enunciado de este teorema, página 94, puesto que $\varphi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$ no es derivable en -1 y en $+1$. Como parametrización de C_1^+ tomaríamos, por ejemplo, $\boldsymbol{c}(t) : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\boldsymbol{c}(t) = (\cos t, \sin t)$. Y como parametrización de C_3^+, $\boldsymbol{c}(t) : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\boldsymbol{c}(t) = (-\cos t, \sin t)$.

todo $t \in [a', b']$, $c_2(t) = \varphi_1(c_1(t))$, *luego también ahora*

$$\int_{C_1^+} P\,dx + Q\,dy = \int_{a'}^{b'} \big(P\big(c_1(t), \varphi_1(c_1(t))\big), 0\big) \cdot \big(c_1'(t), c_2'(t)\big)\,dt = \int_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx,$$

donde en el último paso se ha hecho el cambio de variable $x = c_1(t)$. *Repetimos el argumento para* C_3^+ *y concluimos que el razonamiento hecho para cuando* φ_1 *y* φ_2 *fueran de clase* $\mathscr{C}^1$ *a trozos es también válido aquí.*

(2) Ahora suponemos que $P = 0$ *y* D *es una región simple en las* x. *De forma completamente análoga*

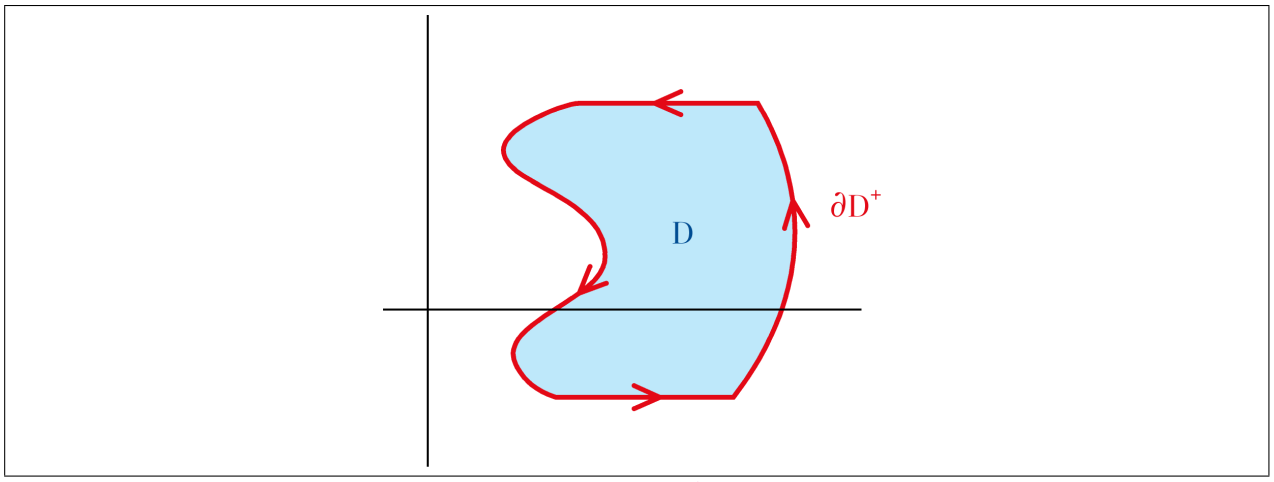


Figura I.2: D es una región simple en las x. En rojo, su borde ∂D^+

al caso anterior se define una orientación positiva para la curva cerrada simple ∂D *y se prueba la fórmula del enunciado, que bajo estas hipótesis es*

$$\int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

(Hacerlo y comprobar que ahora no aparece un signo negativo delante de la derivada $\partial Q/\partial x$, *igual que ocurrió en la demostración del teorema 2.38.)*

(3) Terminamos por situarnos en el caso del enunciado: tanto P *como* Q *pueden ser funciones no nulas y* D *es una región simple en las* x *y simple en las* y. *Nuestra estrategia consiste en aplicar el resultado demostrado en el caso (1) al campo vectorial* $(P, 0)$ *y lo demostrado en el caso (2) al campo vectorial* $(0, Q)$, *para a continuación sumar ambos resultados, obteniendo así la fórmula del Green-Riemann del enunciado.*

Ahora bien, para poder hacer la suma

$$\int_{\partial D^+} (P, 0) \cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\partial D^+} (0, Q) \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\partial D^+} (P, Q) \cdot d\boldsymbol{s},$$

hemos de garantizar que en el miembro de la izquierda estamos integrando las dos veces a lo largo de la misma curva y con la misma orientación. *Necesitamos saber, por tanto, que las que hemos definido como orientaciones positivas para cuando que* D *es simple en las* y *y para cuando* D *es simple en las* x, *coinciden cuando* D *sea simple en las dos direcciones. Intuitivamente quizá se vea muy claramente que así es, pero ello se debe a que en ambos casos interpretamos las dos orientaciones como las que corresponden al sentido antihorario, y éste es un motivo que no podemos utilizar en una demostración, como explicamos en la introducción de la fórmula de Green-Riemann. Una comprobación de que ambas orientaciones coinciden puede consultarse en el lema I.4, en el apartado (I.3).*

Ahora aplicamos los dos casos anteriores a $(P, 0)$ *y* $(0, Q)$, *respectivamente, y sumamos, obteniendo la fórmula de Green-Riemann.*

Con lo que damos por terminada la demostración del teorema de Green-Riemann para regiones simples en ambas direcciones, a resultas de completar las demostraciones de los lemas I.3 y I.4.

(I.2). ★ La gráfica de $y = \varphi_1(x)$ (parte del borde de una región simple no degenerada) es una curva simple

130. Esta demostración utiliza la definición y las propiedades de los conjuntos conexos en espacios topológicos. Ver, por ejemplo, [18], §§ 9 y 10, o cualquier libro introductorio de Topología.

Lema I.2 *Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son dos puntos distintos de una curva cerrada simple C, entonces C es la suma de dos curvas simples con extremos en $\boldsymbol{A}$ y en $\boldsymbol{B}$*

DEMOSTRACIÓN: *Tomemos una curva cerrada simple C, con parametrización $\boldsymbol{c} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y elijamos en ella dos puntos distintos, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}(t_{\boldsymbol{A}})$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}(t_{\boldsymbol{B}})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a \leq t_{\boldsymbol{A}} < t_{\boldsymbol{B}} \leq b$ ([210]).*

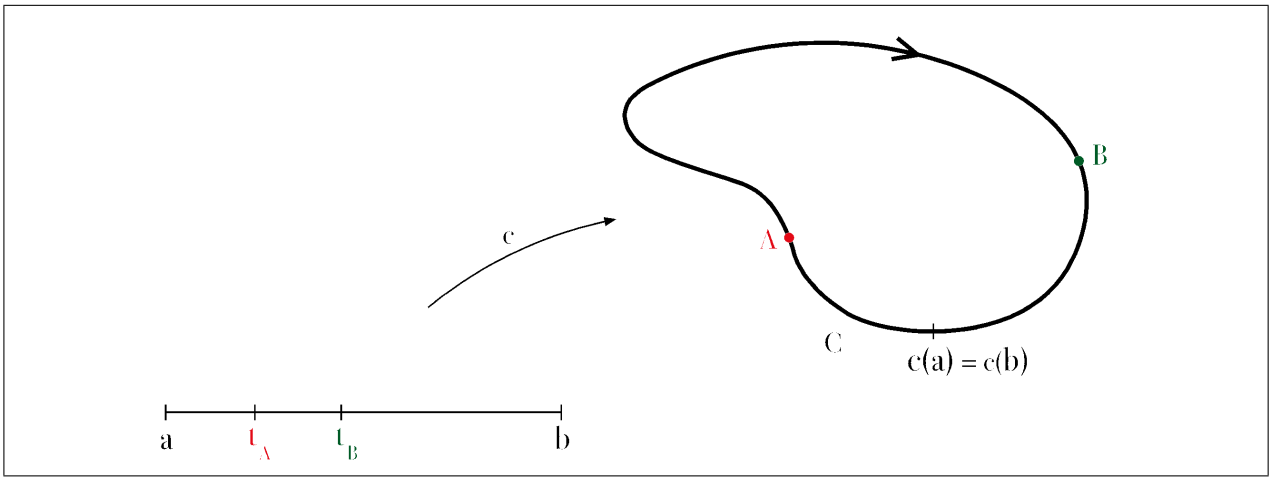


Figura I.3: Parametrización de C utilizada en la demostración del lema

Entonces, la restricción de $\boldsymbol{c}$ al intervalo $[t_{\boldsymbol{A}}, t_{\boldsymbol{B}}]$ es parametrización de una curva simple C_1.

Por otra parte, las restricciones de $\boldsymbol{c}$ a los intervalos $[t_{\boldsymbol{B}}, b]$ y $[a, t_{\boldsymbol{A}}]$ son también dos caminos de clase $\mathscr{C}^1$, que se pueden sumar. Llamemos C_2 a su suma.

C_1 y C_2 son dos curvas simples cuya suma es C y cuyos extremos son, en ambos casos, los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

Lema I.3 *Si D es una región simple en la dirección de las y, no degenerada, entonces el conjunto $\{(x, \varphi_1(x)) : a \leq x \leq b\} \subset \partial D$ es una curva simple (notaciones como en la definición 2.19).*

DEMOSTRACIÓN: *La curva $C = \partial D$ es un conjunto conexo, por ser imagen continua de un intervalo. Aplicamos el lema anterior para $\boldsymbol{A} = (a, \varphi_1(a))$, $\boldsymbol{B} = (b, \varphi_1(b))$ y probamos en primer lugar que $C \backslash \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ tiene dos componentes conexas. En efecto, esas componentes no son otras que los conjuntos $C_1 \backslash \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ y $C_2 \backslash \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ donde C_1 y C_2 son las curvas de la demostración del lema:*

- *ambos conjuntos son conexos, por ser imagen continua de un intervalo;*
- *los conjuntos son no nulos y disjuntos, por construcción;*
- *la unión de los dos conjuntos coincide con $C \backslash \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$.*

Como el conjunto $Z = \{(x, \varphi_1(x)) : a < x < b\} \subset C \backslash \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ no es vacío, si probamos que es abierto y cerrado en $C \backslash \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ deduciremos que es igual a una de las dos componentes, pongamos que $\{(x, \varphi_1(x)) : a < x < b\} = C_1 \backslash \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$. De aquí concluiremos, añadiendo los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, que el conjunto del enunciado coincide con la curva simple C_1.

[210] En caso de que el orden de recorrido de C mediante $\boldsymbol{c}$ fuera el contrario, cambiaríamos $\boldsymbol{c}$ por la parametrización opuesta de $\boldsymbol{c}$.

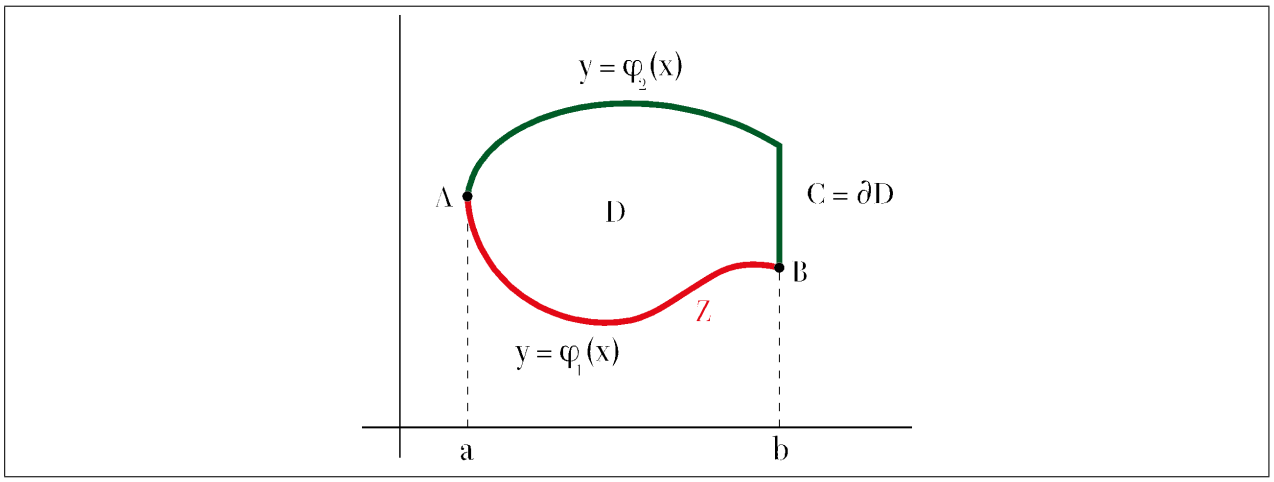


Figura I.4: En color rojo, el conjunto Z de la demostración (que no incluye a los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$). La otra componente conexa del conjunto $C\backslash\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ está trazada en color verde

Demostramos que Z es abierto y cerrado en $C\backslash\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ observando que

$$Z = \big[C\backslash\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}\big] \cap \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a<x<b \ \wedge \ y<\frac{1}{2}(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))\right\},$$

$$Z = \big[C\backslash\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}\big] \cap \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b \ \wedge \ y\le\frac{1}{2}(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))\right\}.$$

(Observar que como C es una curva cerrada simple, no puede ocurrir que $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ para un $x\in(a,b)$.)

(I.3). Orientación antihoraria

Lema I.4 *Las orientaciones positivas sobre ∂D definidas en el Caso (1) y en el Caso (2) de la demostración del teorema 2.39 son la misma.*

DEMOSTRACIÓN: *Sea or_i la orientación positiva sobre ∂D que se ha definido en el Caso (i) ($i=1,2$). Puesto que ∂D es una curva cerrada simple, ambas orientaciones o son iguales o son opuestas (teorema 1.27). Suponemos que son opuestas y llegaremos a una contradicción.*

Aplicamos la fórmula de Green-Riemann en cada uno de los casos al campo vectorial $(0,x)$ y al campo vectorial $(y,0)$, respectivamente. Entonces,

$$\int\limits_{(\partial D,\mathrm{or}_2)} (0,x)\cdot d\boldsymbol{s} \overset{\text{(Caso 2)}}{=} \iint\limits_D dx\ dy = A(D),$$

$$\int\limits_{(\partial D,\mathrm{or}_2)} (y,0)\cdot d\boldsymbol{s} = -\int\limits_{(\partial D,\mathrm{or}_1)} (y,0)\cdot d\boldsymbol{s} \overset{\text{(Caso 1)}}{=} \iint\limits_D dx\ dy = A(D),$$

luego, sumando,

$$\int\limits_{(\partial D,\mathrm{or}_2)} (y,x)\cdot d\boldsymbol{s} = 2A(D).$$

Como el campo vectorial $(y,x)=\boldsymbol{\nabla}(xy)$ es el gradiente del campo escalar xy, su integral sobre cualquier curva cerrada simple ha de ser nula (por el teorema fundamental del cálculo generalizado), lo que obliga a que D tenga área nula, de acuerdo con la última fórmula.

Ahora bien, sabemos también que

$$A(D) = \int\limits_a^b \big[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\big]\ dx.$$

Al ser $\varphi_2 - \varphi_1$ una función continua y no negativa, el hecho de que su integral sobre el intervalo $[a, b]$ sea nula implica que o bien la función es nula o bien $a = b$ ([211]).

En cualquiera de las dos posibilidades, tanto si el intervalo $[a, b]$ fuese degenerado como si las gráficas de φ_1 y de φ_2 coincidieran, el borde ∂D no sería una curva cerrada simple (a menos que D sea un solo punto, en cuyo caso todo lo que estamos haciendo sería trivial).

[211] En efecto, supongamos que $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, $a < b$ y h es estrictamente positiva en algún punto de $[a, b]$, $h(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$. Entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad, por la continuidad de h en a y en b, que $a < x_0 < b$; y deducimos, por la continuidad de h en x_0, que para algún δ estrictamente positivo, $h(x) > h(x_0)/2$ siempre que $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$, luego

$$\int_a^b h(x)\ dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)\ dx \geq 2\delta \frac{h(x_0)}{2} = \delta h(x_0) > 0.$$

J

ANEXO J: DEMOSTRACIONES TOPOLÓGICAS

Teorema J.1

1. *Para que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sea abierto es suficiente que esté definido por un número finito de conjunciones o disyunciones de desigualdades estrictas entre funciones continuas de n variables cuyos dominios sean todos abiertos.*

2. *Para que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sea cerrado es suficiente que esté definido por un número finito de conjunciones o disyunciones de desigualdades no estrictas entre funciones continuas de n variables cuyos dominios sean todos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN:

1. *Sin pérdida de generalidad ([212]), demostraremos solamente que si U es abierto y $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces el conjunto $V = \{\boldsymbol{p} \in U : h(\boldsymbol{p}) > 0\}$ es abierto.*

   Tomamos un punto $\boldsymbol{p} \in V$ y una sucesión $(\boldsymbol{p_n}) \subset \mathbb{R}^3$ que converge a $\boldsymbol{p}$. Probemos que, al menos desde un término en adelante, todos los $\boldsymbol{p_n}$ están en V ([213]).

   Como $\boldsymbol{p} \in U$ y U es abierto,
   $$\exists n_1,\ \forall n \geq n_1,\ \boldsymbol{p_n} \in U,$$
   luego a partir de n_1 existe $h(\boldsymbol{p_n})$; y como h es continua, $h(\boldsymbol{p_n}) \to h(\boldsymbol{p}) > 0$. En consecuencia, por la definición de convergencia a un número estrictamente positivo
   $$\exists n_2 \geq n_1,\ \forall n \geq n_2,\ h(\boldsymbol{p_n}) > 0.$$
   Conclusión: $\forall n \geq n_2$, $\boldsymbol{p_n} \in V$, como queríamos demostrar.

2. *Sin pérdida de generalidad demostraremos que si C es cerrado y $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces el conjunto $B = \{\boldsymbol{p} \in C : h(\boldsymbol{p}) \geq 0\}$ es cerrado.*

   Tomamos una sucesión $(\boldsymbol{p_n}) \subset B$ que converge a $\boldsymbol{p}$. Probemos que $\boldsymbol{p} \in B$. Como $B \subset C$, toda la sucesión $(\boldsymbol{p_n})$ está formada por puntos de C y, como C es cerrado, $\boldsymbol{p} \in C$. Ahora aplicamos la continuidad de h en $\boldsymbol{p}$ para concluir que $h(\boldsymbol{p}) = h(\lim \boldsymbol{p_n}) = \lim h(\boldsymbol{p_n})$, que es positivo (ver la nota al pie nº 170) por ser límite de una sucesión de números positivos. Por tanto, $\boldsymbol{p} \in B$.

Corolario J.2 *Las regiones simples, bidimensionales o tridimensionales, son conjuntos cerrados, en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN: *Basta aplicar el teorema J.1 a las definiciones 2.19 y 4.3.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.20:

[212] Basta observar que

- la desigualdad $h(\boldsymbol{p}) < 0$ equivale a $(-h)(\boldsymbol{p}) > 0$;
- $h_1(\boldsymbol{p}) > h_2(\boldsymbol{p})$ equivale a $(h_1 - h_2)(\boldsymbol{p}) > 0$;
- $h_1(\boldsymbol{p}) > 0 \ \wedge\ h_2(\boldsymbol{p}) > 0$ equivale a $\min\{h_1, h_2\}(\boldsymbol{p}) > 0$;
- $h_1(\boldsymbol{p}) > 0 \ \vee\ h_2(\boldsymbol{p}) > 0$ equivale a $\max\{h_1, h_2\}(\boldsymbol{p}) > 0$.

[213] Esto demostrará que es imposible que exista una sucesión de puntos de V^c que converja a $\boldsymbol{p}$ y, por tanto, que V es abierto.

- $\operatorname{Int} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$.

  Llamemos U al conjunto de la derecha, que por el teorema J.1 es abierto. Tomemos un punto $\boldsymbol{p} \in U$ y una sucesión $(\boldsymbol{p_n}) \subset D^c$ convergente a $\boldsymbol{p}$. Al ser U abierto, existe un n_o tal que para todo $n \geq n_0$, $\boldsymbol{p_n}$ pertenece a U. Y como $U \subset D$, resulta que $\forall n \geq n_0$, $\boldsymbol{p_n} \in D$.

  En consecuencia, de acuerdo con la definición 1.16, $U \subset \operatorname{Int} D$.

  Para probar el contenido recíproco tomemos un punto (x,y) cualquiera de D que no esté en el conjunto de la derecha y probemos que entonces tampoco está en $\operatorname{Int} D$. Para demostrar que $(x,y) \notin \operatorname{Int} D$ basta con mostrar una sucesión de puntos de fuera de D que converge a (x,y). Lo hacemos distinguiendo las únicas cuatro alternativas posibles:

  - *En caso de que $x = a$, nos sirve la sucesión $(a - 1/n, y)$.*
  - *En caso de que $x = b$, nos sirve $(b + 1/n, y)$.*
  - *En caso de que $a < x < b$ y $\varphi_1(x) = y$, escogemos la sucesión $(x, y - 1/n)$.*
  - *Y en caso de que $a < x < b$ e $y = \varphi_2(x)$, una sucesión que nos sirve es $(x, y + 1/n)$.*

- $\operatorname{Fr} D = \{(x,y) \in D : x = a \ \vee\ x = b \ \vee\ y = \varphi_1(x) \ \vee\ y = \varphi_2(x)\}$.

  El conjunto D es cerrado, por el corolario J.2, luego $\operatorname{Fr} D = D \setminus \operatorname{Int} D$. La igualdad que queremos probar es ahora inmediata, una vez que hemos demostrado la primera parte de este mismo teorema 2.20.

Teorema J.3 *Supóngase que C_1 y C_2 son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$ y que $C_2 \subset \operatorname{Int} C_1$. Entonces*

1. $\operatorname{Fr} C_1 \cap \operatorname{Fr} C_2 = \varnothing$.
2. $\operatorname{Fr} C_1 \cup \operatorname{Fr} C_2 = \operatorname{Fr}(C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2)$ *si se cumple la condición adicional de que $\operatorname{Fr} C_2 \subset \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} C_2)$; en particular, siempre que C_2 sea una región simple (con $n = 2, 3$).*

DEMOSTRACIÓN:

1. *De acuerdo con la definición 1.16, como los C_i son cerrados se cumple que $\operatorname{Fr} C_i = C_i \setminus \operatorname{Int} C_i$. Por tanto,*
$$\operatorname{Fr} C_1 \cap \operatorname{Fr} C_2 = C_1 \cap (\operatorname{Int} C_1)^c \cap C_2 \cap (\operatorname{Int} C_2)^c = \varnothing,$$
puesto que $C_2 \subset \operatorname{Int} C_1$.

2. *Lo probaremos en varios pasos.*

   a) $\operatorname{Fr}(C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2) \subset \operatorname{Fr} C_1 \cup \operatorname{Fr} C_2$:
   Si $\boldsymbol{p}$ pertenece a la frontera de $C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2$, han de existir dos sucesiones, una dentro del conjunto y otra fuera del conjunto, que converjan a $\boldsymbol{p}$:
$$(\boldsymbol{p_n}) \subset C_1 \cap (\operatorname{Int} C_2)^c, \quad \boldsymbol{p_n} \to \boldsymbol{p},$$
$$(\boldsymbol{p'_n}) \subset C_1^c \cup \operatorname{Int} C_2, \quad \boldsymbol{p'_n} \to \boldsymbol{p}.$$

   - *En caso de que haya infinitos términos de la sucesión de $\boldsymbol{p'_n}$ que estén en C_1^c, ya tenemos una sucesión en C_1 que converge a $\boldsymbol{p}$ (la de los $\boldsymbol{p_n}$) y otra fuera de C_1 que también converge a $\boldsymbol{p}$ (la formada por los infinitos $\boldsymbol{p'_n}$ que están den C_1^c), luego $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Fr} C_1$.*
   - *En caso contrario, sólo hay un número finito de $\boldsymbol{p'_n} \in C_1^c$, luego todos los $\boldsymbol{p'_n}$ desde un subíndice en adelante necesariamente están en $\operatorname{Int} C_2$, lo que nos proporciona una sucesión de puntos de C_2 que converge a $\boldsymbol{p}$. Para concluir que entonces $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Fr} C_2$, hemos de encontrar una sucesión de puntos de fuera de C_2 que también converja a $\boldsymbol{p}$. Y para esto es posible, pero no es seguro, que nos sirvan los $\boldsymbol{p_n}$, puesto que de los $\boldsymbol{p_n}$ sabemos que no están en $\operatorname{Int} C_2$, pero aun así podrían estar todos en C_2.*
     Lo que hacemos en primer lugar es observar que los $\boldsymbol{p_n}$ que estén en C_2 pertenecen a $\operatorname{Fr} C_2$, puesto que están fuera de $\operatorname{Int} C_2$. Por tanto, para cada uno de ellos habrá una sucesión de puntos de fuera de C_2 que converja a él:
$$\left(\boldsymbol{q_m^n}\right)_m \subset C_2^c, \quad \lim_m \boldsymbol{q_m^n} = \boldsymbol{p_n}.$$

A continuación razonamos de la siguiente manera. Para cada n elegimos un índice m_n para el que $\|\boldsymbol{p_n} - \boldsymbol{q^n_{m_n}}\| < 1/n$, y entonces la sucesión $\left(\boldsymbol{q^1_{m_1}}, \boldsymbol{q^2_{m_2}}, \dots, \boldsymbol{q^n_{m_n}}, \dots\right)$ está formada totalmente por puntos de fuera de C_2 y además converge a $\boldsymbol{p}$, puesto que

$$\|\boldsymbol{q^n_{m_n}} - \boldsymbol{p}\| \leq \|\boldsymbol{q^n_{m_n}} - \boldsymbol{p_n}\| + \|\boldsymbol{p_n} - \boldsymbol{p}\| < \frac{1}{n} + \|\boldsymbol{p_n} - \boldsymbol{p}\| \to 0.$$

b) $\operatorname{Fr}(C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2) \supset \operatorname{Fr} C_1$:

Tomemos un $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Fr} C_1$. Entonces existen dos sucesiones, una con puntos de C_1 y otra con puntos de C_1^c, ambas convergentes a $\boldsymbol{p}$:

$$(\boldsymbol{p_n}) \subset C_1, \quad \boldsymbol{p_n} \to \boldsymbol{p},$$
$$(\boldsymbol{p'_n}) \subset C_1^c, \quad \boldsymbol{p'_n} \to \boldsymbol{p}.$$

Como $C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2 \subset C_1$, los puntos $\boldsymbol{p'_n}$ nos sirven también como puntos de $(C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2)^c$, así que lo único que necesitamos es encontrar una sucesión de puntos de $C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2$ que converja a $\boldsymbol{p}$, y para ello sólo tenemos los $\boldsymbol{p_n} \in C_1$. Si hay infinitos de estos $\boldsymbol{p_n}$ que no están en $\operatorname{Int} C_2$, ya hemos terminado. Pero es que si no fuera así, entonces $\boldsymbol{p}$ sería límite de una sucesión de puntos de $\operatorname{Int} C_2$, y por tanto sería de C_2 (gracias a que C_2 es cerrado), y por tanto de $\operatorname{Int} C_1$ (por una de las hipótesis), lo que es imposible puesto que $\boldsymbol{p}$ es de $\operatorname{Fr} C_1$.

c) $\operatorname{Fr}(C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2) \supset \operatorname{Fr} C_2$ si $\operatorname{Fr} C_2 \subset \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} C_2)$: ([214])

Supongamos ahora que $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Fr} C_2$ y que $\operatorname{Fr} C_2 \subset \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} C_2)$. Necesitamos, igual que en el caso anterior, demostrar que existen dos sucesiones, una en $C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2$ y otra en su complementario, que convergen a $\boldsymbol{p}$.

Sabemos que existen $(\boldsymbol{p_n})$ y $(\boldsymbol{p'_n})$ tales que

$$(\boldsymbol{p_n}) \subset C_2, \quad \boldsymbol{p_n} \to \boldsymbol{p},$$
$$(\boldsymbol{p'_n}) \subset C_2^c, \quad \boldsymbol{p'_n} \to \boldsymbol{p}.$$

Como $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Int} C_1$ (puesto que pertenece a $C_2 \subset \operatorname{Int} C_1$), necesariamente todos los $\boldsymbol{p'_n}$, salvo a lo más un número finito, pertenecen a C_1. Entonces

$$\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \boldsymbol{p'_n} \in C_1 \cap C_2^c \subset C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2.$$

La sucesión $(\boldsymbol{p_n})$ es posible que no nos sirva como sucesión del complementario de $C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2$ que converge a $\boldsymbol{p}$, por lo que la cambiamos por otra, $(\boldsymbol{q_n})$, cuyos elementos estén próximos pero de los que sepamos seguro, no sólo que están en C_2, sino en $\operatorname{Int} C_2$, con un argumento como el que hemos hecho al final de la demostración de la parte a).

Para ello vamos a utilizar la condición adicional de que $\operatorname{Fr} C_2 \subset \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} C_2)$. Cuando $\boldsymbol{p_n} \in \operatorname{Int} C_2$, definimos $\boldsymbol{q_n} = \boldsymbol{p_n}$; y cuando $\boldsymbol{p_n} \notin \operatorname{Int} C_2$, necesariamente ha de ocurrir que $\boldsymbol{p_n} \in \operatorname{Fr} C_2 \subset \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} C_2)$, luego podemos elegir un $\boldsymbol{q_n} \in \operatorname{Int} C_2$ tal que $\|\boldsymbol{q_n} - \boldsymbol{p_n}\| \leq 1/n$ ($\boldsymbol{q_n}$ es el punto que en la demostración de a) llamábamos $\boldsymbol{q^n_{m_n}}$). Entonces

$$\boldsymbol{q_n} \to \boldsymbol{p}, \quad (\boldsymbol{q_n}) \subset \operatorname{Int} C_2 \subset (C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2)^c.$$

d) Si $n = 2, 3$ y C_2 es una región simple, entonces $\partial C_2 = \operatorname{Fr} C_2 \subset \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} C_2)$:

Sea $\boldsymbol{p} \in \partial C_2$ y probemos que $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} C_2)$. Existe una sucesión $(\boldsymbol{p'_n}) \subset C_2^c$ tal que $\boldsymbol{p'_n} \to \boldsymbol{p}$. Como $\operatorname{Int} C_2 \subset C_2$, también es cierto que $(\boldsymbol{p'_n}) \subset (\operatorname{Int} C_2)^c$.

Para terminar de demostrar que $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} C_2)$ sólo nos falta encontrar una sucesión de puntos de $\operatorname{Int} C_2$ que converja a $\boldsymbol{p}$.

Lo haremos para una región bidimensional simple en las y (los demás casos se probarían de forma análoga) de manera diferente para los puntos $\boldsymbol{p} = (x, y)$ de cada uno de los cuatro conjuntos cuya unión forma el borde de C_2 de acuerdo con el teorema 2.20 (notaciones del mismo teorema):

---

[214] Hay conjuntos cerrados C_2 para lo que no se cumplen ninguno de estos dos contenidos. Por ejemplo, tómese como C_2 un segmento no degenerado, que es cerrado pero su interior es vacío, $\operatorname{Int} C_2 = \varnothing$. Entonces la frontera de su interior también es vacía, por lo que

- $\operatorname{Fr} C_2 = C_2 \setminus \operatorname{Int} C_2 = C_2 \not\subset \varnothing = \operatorname{Fr}(\operatorname{Int} C_2)$,
- Si C_1 es cualquier cerrado que contiene a C_2 en su interior, $\operatorname{Fr}(C_1 \setminus \operatorname{Int} C_2) = \operatorname{Fr} C_1 = C_1 \setminus \operatorname{Int} C_1 \not\supset C_2 = \operatorname{Fr} C_2 \cup \operatorname{Int} C_2 = \operatorname{Fr} C_2$.

Además de estos contraejemplos hay también otros con conjuntos cerrados C_2 que tienen interior no vacío.

— $x = a$, $\varphi_1(a) \le y \le \varphi_2(a)$. *Tomamos la sucesión formada por los puntos*

$$\boldsymbol{p_n} = \left(a + \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\left[\varphi_2\Big(a + \frac{1}{n}\Big) + \varphi_1\Big(a + \frac{1}{n}\Big)\right]\right).$$

— $x = b$, $\varphi_1(b) \le y \le \varphi_2(b)$. *Tomamos la sucesión formada por los puntos*

$$\boldsymbol{p_n} = \left(b - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\left[\varphi_2\Big(b - \frac{1}{n}\Big) + \varphi_1\Big(b - \frac{1}{n}\Big)\right]\right).$$

— $a < x < b$, $y = \varphi_1(x)$. *Tomamos la sucesión formada por los puntos*

$$\boldsymbol{p_n} = \Big(x, \varphi_1(x) + \frac{1}{n}\Big).$$

— $a < x < b$, $y = \varphi_2(x)$. *Tomamos la sucesión formada por los puntos*

$$\boldsymbol{p_n} = \Big(x, \varphi_2(x) - \frac{1}{n}\Big).$$

Es posible que para valores pequeños de n algunos de estos $\boldsymbol{p_n}$ no pertenezcan a $\operatorname{Int} C_2$. Pero para cada x siempre existe un n_x a partir del cual los $\boldsymbol{p_n}$ pertenecen a $\operatorname{Int} C_2$ ([215]).

Teorema J.4 *Si Σ es una superficie definida explícitamente, entonces $\operatorname{Fr}\Sigma = \Sigma$.*

DEMOSTRACIÓN: *Probamos en primer lugar que Σ no tiene puntos interiores: para cualquier $(x, y, g(x, y))$, la sucesión $((x, y, g(x, y) + 1/n))$ converge a $(x, y, g(x, y))$ y en cambio ninguno de sus puntos está en Σ.*

A continuación observamos que por el teorema J.1,

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = g(x, y)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge g(x, y)\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \le g(x, y)\}\end{aligned}$$

es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^3$.

Por consiguiente, $\operatorname{Fr}\Sigma = \Sigma \setminus \operatorname{Int}\Sigma = \Sigma$.

Teorema J.5 *Si $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Int} X \subset \mathbb{R}^n$, existe alguna* ***bola cerrada de centro $\boldsymbol{p}$ y radio $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon = \{\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\| \le \varepsilon\}$****, contenida en $\operatorname{Int} X$.*

DEMOSTRACIÓN: *Por reducción al absurdo. Supongamos lo contrario y apliquémoslo a los $\varepsilon = 1/n$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir un $\boldsymbol{p_n} \in B_{1/n} \setminus \operatorname{Int} X$. Como $\boldsymbol{p_n} \notin \operatorname{Int} X$, hay una sucesión $(\boldsymbol{q_m^n})_m \subset X^c$ que converge a $\boldsymbol{p_n}$; tomamos m_n tal que $\|\boldsymbol{q_{m_n}^n} - \boldsymbol{p_n}\| < 1/n$.*

Tenemos así una sucesión $(\boldsymbol{q_{m_n}^n})_n$ de puntos de X^c que converge a $\boldsymbol{p}$, que es absurdo puesto que $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Int} X$.

[215] Tener en cuenta que cuando $a < x < b$ es imposible que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, gracias a que ∂D es una curva cerrada simple.

K

Anexo K: Algunas demostraciones adicionales

(K.1). Lema de Poincaré para conjuntos estrellados

Teorema K.1 (Lema de Poincaré) *Si $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto estrellado (es decir, existe un punto $\boldsymbol{p_0} \in D$ tal que para todo $\boldsymbol{p} \in D$ el segmento $[\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p}] = \{\boldsymbol{p_0} + t(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0}) : t \in [0,1]\}$ está contenido en D), entonces sobre D se cumple que 4 $\Rightarrow$ 3 (nos referimos a las propiedades enumeradas en el enunciado del teorema 1.33).*

Demostración: *Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$ sobre D, $\boldsymbol{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ para el que se cumple que*

$$\forall\, i, j = 1, \ldots, n, \quad D_j F_i = D_i F_j \tag{216}$$

Queremos construir un campo escalar sobre D cuyo gradiente coincida con $\boldsymbol{F}$.

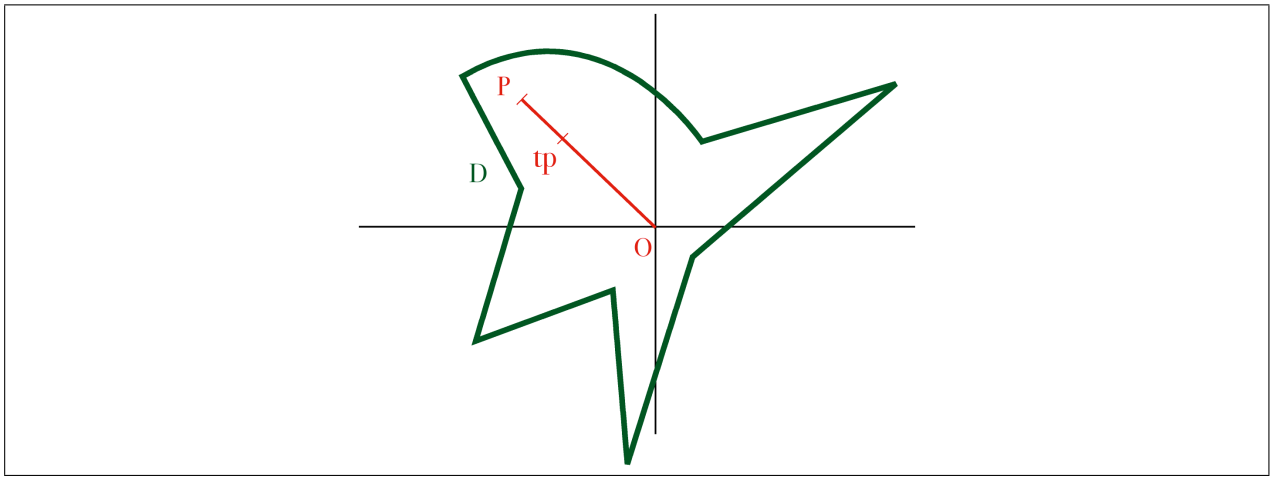


Figura K.1: Conjunto estrellado, con $\boldsymbol{p_0} = \boldsymbol{0}$. En rojo, el segmento desde $\boldsymbol{0}$ hasta $\boldsymbol{p}$

Sin pérdida de generalidad puede suponerse que $\boldsymbol{p_0}$ es el origen (217).
Definimos

$$f(\boldsymbol{p}) = \int_0^1 \boldsymbol{F}(t\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{p}\, dt = \int_0^1 \sum_i^n F_i(tx_1, \ldots, tx_n) x_i\, dt,$$

---

216 A lo largo de esta demostración, para mayor claridad denotaremos con $D_i F_j$ a la derivada de la función F_j respecto de su i-ésima variable. Hemos usado el mismo convenio en la demostración del teorema clásico de Sotkes (teorema 3.37).

217 En caso de que $\boldsymbol{p}_0 \neq \boldsymbol{0}$, lo que haremos será trasladar todo el problema restando $\boldsymbol{p_0}$ a D, obtener el campo escalar y volviendo a trasladar el campo escalar, tal como detallamos a continuación:
Llamamos $\boldsymbol{F^*}$ al campo vectorial

$$\boldsymbol{F^*} : D - \boldsymbol{p_0} = \{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0} : \boldsymbol{p} \in D\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{F^*}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p_0}),$$

que sigue cumpliendo la hipótesis 4 (las derivadas parciales de $\boldsymbol{F^*}$ son las mismas que las de $\boldsymbol{F}$, puesto que las derivadas de las constantes son siempre nulas) y está definido sobre un conjunto estrellado con "centro" en el origen. Entonces, si f^* es un campo escalar $D - \boldsymbol{p_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyo gradiente es $\boldsymbol{F^*}$, conseguimos el campo escalar que buscábamos mediante

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(\boldsymbol{p}) = f^*(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0}),$$

cuyo gradiente es $\boldsymbol{F}$, porque para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial f^*}{\partial x_i}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0}) = F_i^*(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}).$$

(obsérvese la similitud con el método 2 del ejemplo que precede al teorema 1.33) y utilizando la fórmula de Leibniz (teorema K.2) para calcular derivadas bajo el signo de integral, obtenemos una cualquiera de las derivadas de f, por ejemplo la derivada respecto a la primera variable:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) = \int_0^1 \left[F_1(t\boldsymbol{p}) + \sum_i^n tD_1F_i(t\boldsymbol{p})x_i \right] dt = \int_0^1 \left[F_1(t\boldsymbol{p}) + \sum_i^n tx_iD_iF_1(t\boldsymbol{p}) \right] dt =$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[tF_1(t\boldsymbol{p})\right] dt = F_1(\boldsymbol{p}),$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado al hipótesis 4 al sustituir D_1F_i por D_iF_1.

La siguiente fórmula de Leibniz, que hemos utilizado en la demostración anterior, tiene otras muchas aplicaciones porque nos permite, bajo ciertas condiciones, intercambiar una derivación y una integración:

Teorema K.2 (Fórmula de Leibniz) *Si $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continua, la función $F : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$, es derivable, y su derivada es*

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN: ([218]) *Sean $y, y_0 \in [c,d]$, con $y \neq y_0$.*

$$\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} = \int_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\ dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\overline{y})\ dx,$$

por el teorema del valor medio para derivadas de funciones de una variable, donde del número $\overline{y}$ lo único que sabemos es que está comprendido entre y e y_0. Entonces,

$$\left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\ dx - \frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,\overline{y}) \right|\ dx.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua sobre $[a,b] \times [c,d]$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que para todo $x \in [a,b]$ y toda pareja $u, v \in [c,d]$ ([219]),

$$|u-v| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,u) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,v) \right| < \varepsilon,$$

luego

$$0 < |y-y_0| < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\ dx - \frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} \right| \leq \varepsilon(b-a),$$

de donde concluimos que la derivada $F'(y_0)$, que es el $\lim_{y\to y_0} \frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}$, existe y es igual a la integral $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\ dx$.

(K.2). Función de Dirichlet

Teorema K.3 *La función que a cada número real x asocia $\lim_n \lim_m [\cos(\pi n! x)]^m$, coincide con la **función de Dirichlet**, que asigna 1 a los números racionales y 0 a los irracionales.*

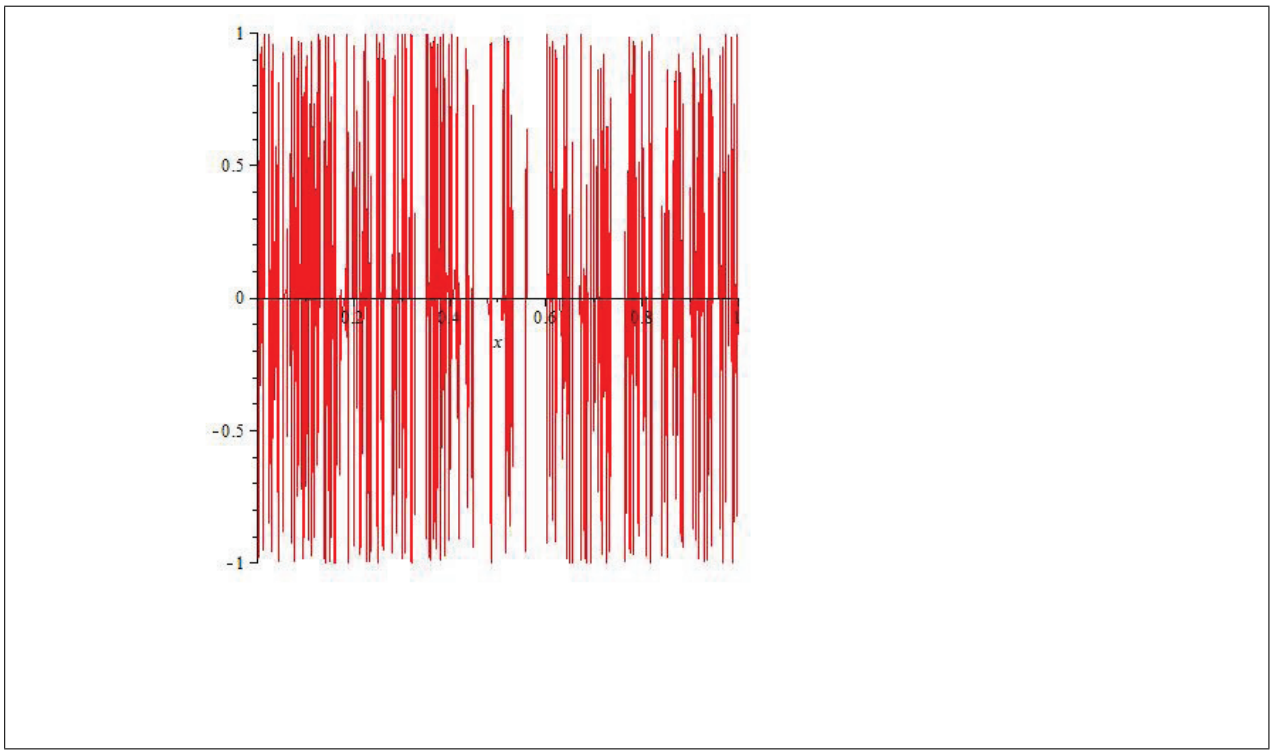


Figura K.2: Gráfica de la función $[\cos(\pi n!x)]^m$ para $n = 30$, $m = 31$ obtenida con Maple 15. No se aprecia la convergencia a la función de Dirichlet, ¿por qué?

DEMOSTRACIÓN:

- *Si $x \notin \mathbb{Q}$, entonces $n!x$ no es nunca un número entero, luego $|\cos(\pi n!x)|$ es estrictamente menor que 1. Al elevarlo a exponentes m cada vez mayores ha de tender a cero. Como el primer límite $\lim_m$ ya es cero, al pasar al límite cuando n tiende a infinito seguimos teniendo un cero.*
- *Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces para n pequeño no sabemos asegurar nada. Pero como nos interesa el límite en n podemos fijarnos solamente en valores grandes de n ([220]). Ahora bien, para n suficientemente grande es seguro que $n!x$ es un entero par, luego $\cos(\pi n!x) = 1$ y por tanto $\left[\cos(\pi n!x)\right]^m = 1$ para n suficientemente grande y para cualquier m. El límite, por tanto, ha de ser igual a 1.*

Corolario K.4 *Existen sucesiones de funciones integrables cuyo límite es una función acotada no integrable.*

[218] Ver, por ejemplo, [1], Teorema 7.40

★ [219] Estamos usando la continuidad uniforme de $\frac{\partial f}{\partial y}$, cosa que podemos hacer porque sabemos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua sobre un producto de intervalos cerrados y acotados.

[220] Tómese, por ejemplo, $x = 123/4$. Entonces los primeros valores de la sucesión doble $[\cos(\pi n!x)]^m$ redondeados a tres decimales son

$n\backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	límite en m
1	-0924	$0,854$	-0789	$0,729$	$-0,673$	$0,622$	$-0,575$	$0,531$	??
2	$0,707$	$0,5$	$0,354$	$0,25$	$0,177$	$0,125$	$0,088$	$0,626$	??
3	$-0,707$	$0,5$	$-0,354$	$0,25$	$-0,177$	$0,125$	$-0,088$	$0,626$	??
4	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	no existe
5	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	no existe
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1

(K.3). Demostración (parcial) del teorema 2.12

1. *La propiedad para la suma se ha probado en el texto.*

2. *Para el producto por un escalar la demostración es muy similar a la suma. Las sumas de Riemann de kf y de f están relacionadas por el factor k,*

$$S_n(kf) = \sum_{i,j=1}^{n} kf(\xi_{ij})\Delta x_i \Delta y_j = k \sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_{ij})\Delta x_i \Delta y_j \to k \iint_R f,$$

donde la última convergencia se sigue de la integrabilidad de f, independientemente de cuáles sean los puntos ξ_{ij}.

3. *Monotonía. Si $f \leq g$ en todos los puntos, entonces $f(\xi_{ij}) \leq g(\xi_{ij})$ en cualquier punto ξ_{ij}, luego*

$$S_n(f) = \sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_{ij})\Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i,j=1}^{n} g(\xi_{ij})\Delta x_i \Delta y_j = S_n(g),$$

y al pasar al límite (ambos límites existen por hipótesis), se conserva la desigualdad, $\iint_R f \leq \iint_R g$.

4. *Valor absoluto. Una vez que hayamos demostrado la integrabilidad de $|f|$, la desigualdad se seguirá de aplicar la propiedad de monotonía a las desigualdades $-|f| \leq f \leq |f|$. Para demostrar que $|f|$ es integrable siempre que lo sea f, recurrimos al criterio de Darboux (teorema 2.6). Para cada subrectángulo R_{ij} de una partición, la diferencia entre el supremo y el ínfimo de cualquier función es un supremo,*

$$\begin{aligned} M_{ij}(|f|) - m_{ij}(|f|) &= \sup\{|f(x,y)| - |f(x',y')| : (x,y),(x',y') \in R_{ij}\} \\ M_{ij}(f) - m_{ij}(f) &= \sup\{f(x,y) - f(x',y') : (x,y),(x',y') \in R_{ij}\} \end{aligned}$$

pero por la propiedad triangular, $\big||f(x,y)| - |f(x',y')|\big| \leq |f(x,y) - f(x',y')|$, luego cada una de las diferencias que forman el primero de los conjuntos está acotada por alguna de las diferencias que forman el segundo conjunto (observar que en el segundo conjunto están tanto $f(x,y) - f(x',y')$ como $f(x',y') - f(x,y)$), por tanto

$$\begin{aligned} U(|f|,\mathscr{P}) - L(|f|,\mathscr{P}) &= \sum_{i,j=1}^{n} [M_{ij}(|f|) - m_{ij}(|f|)] \leq \sum_{i,j=1}^{n} [M_{ij}(f) - m_{ij}(f)] = \\ &= U(f,\mathscr{P}) - L(f,\mathscr{P}). \end{aligned}$$

Como f sí que es integrable, para todo número real estrictamente positivo ε se puede elegir la partición $\mathscr{P}$ de manera que el último miembro sea menor que ε, lo cual demuestra que $|f|$ es integrable.

5. *Aditividad. Volvemos a utilizar el teorema 2.6.*

   En primer lugar necesitamos probar que dado un ε estrictamente positivo, podemos encontrar una partición $\mathscr{P}$ del rectángulo total R de modo que $U(\mathscr{P}) - L(\mathscr{P}) \leq \varepsilon$, partiendo de que esta propiedad sí que se cumple para sendas particiones de los rectángulos pequeños. Para ello tomamos en cada R^k una partición $\mathscr{P}^k$ tal que

$$U(\mathscr{P}^k) - L(\mathscr{P}^k) \leq \frac{\varepsilon}{m}.$$

   Ahora construimos una partición $\mathscr{P}_0$ sobre el rectángulo R de manera que todas las líneas divisorias, horizontales o verticales, de cada uno de las particiones $\mathscr{P}^k$ figure también en $\mathscr{P}_0$. La figura explica cómo hacerlo (¡ojo!, no estamos dando una demostración completa de que una $\mathscr{P}_0$ con estas condiciones pueda construirse, sino solamente una justificación intuitiva).

   Si restringimos la nueva partición $\mathscr{P}_0$ a uno cualquiera de los rectángulos iniciales R^k, tendremos una nueva partición $\mathscr{P}_0^k$ en la que habrá, si acaso, más líneas que las que había con $\mathscr{P}^k$. En consecuencia, $U(\mathscr{P}_0^k) - L(\mathscr{P}_0^k)$ será también menor o igual que ε/m (comprobar esto con detalle). Entonces

$$U(\mathscr{P}_0) - L(\mathscr{P}_0) \leq \sum_{k=1}^{m} U(\mathscr{P}_0^k) - L(\mathscr{P}_0^k) \leq m\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

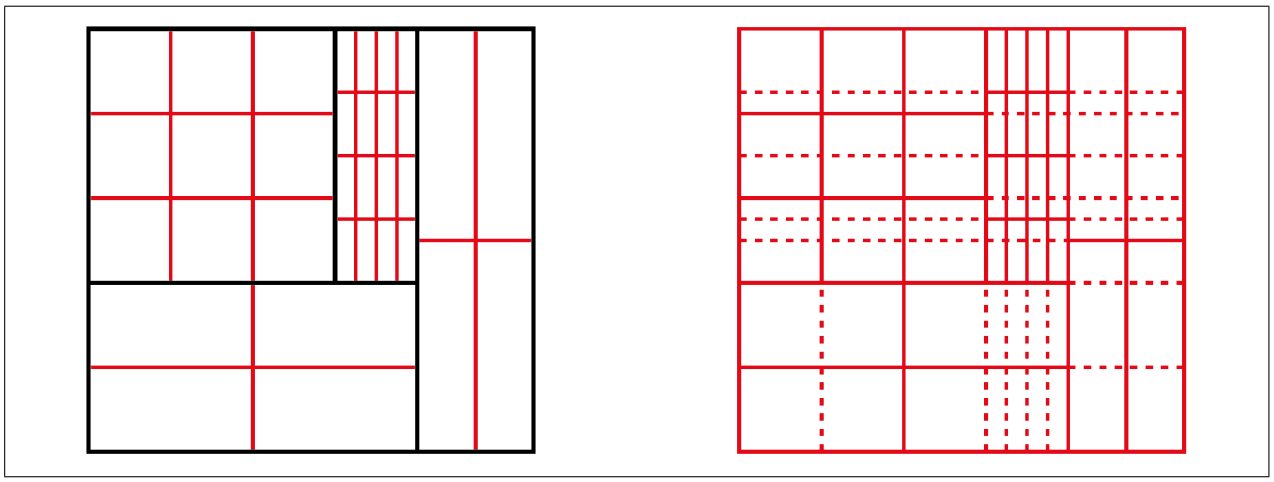


Figura K.3: Construimos una partición del rectángulo R a base de prolongar todas las líneas que aparecen en la primera figura.

Recíprocamente, supongamos que h es integrable sobre R. Queremos probar que lo es sobre cualquier R^k, es decir, que existe la integral $\iint_{R^k} h\,|_{R^k}$ (67). Para ello necesitamos probar que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathscr{P}^k \text{ sobre } R^k,\ U(h\,|_{R^k}\,, \mathscr{P}^k) - L(h\,|_{R^k}\,, \mathscr{P}^k) \leq \varepsilon,$$

deduciéndolo de que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathscr{P} \text{ sobre } R,\ U(h, \mathscr{P}) - L(h, \mathscr{P}) \leq \varepsilon.$$

Fijado un $\varepsilon > 0$, elegimos una partición sobre R que cumpla esta última desigualdad, o sea,

$$\sum_{Q \in \mathscr{P}} [M_Q(h) - m_Q(h)] \leq \varepsilon.$$

$\mathscr{P}$ induce una partición $\mathscr{P}^k$ sobre R^k definida por las intersecciones que sean no vacías de R^k con los rectángulos que constituyen $\mathscr{P}$. Entonces

$$U(h\,|_{R^k}\,, \mathscr{P}^k) - L(h\,|_{R^k}\,, \mathscr{P}^k) = \sum_{\substack{Q \in \mathscr{P} \\ Q \cap R^k \neq \varnothing}} [M_{Q \cap R^k}(h\,|_{R^k}\,) - m_{Q \cap R^k}(h\,|_{R^k}\,)].$$

En el último sumatorio, cuando $Q \subset R^k$ el sumando es igual a $M_Q(h) - m_Q(h)$; y cuando $Q \not\subset R^k$ el sumando es menor o igual que $M_Q(h) - m_Q(h)$, por tanto

$$U(h\,|_{R^k}\,, \mathscr{P}^k) - L(h\,|_{R^k}\,, \mathscr{P}^k) \leq \sum_{Q \in \mathscr{P}} [M_Q(h) - m_Q(h)] \leq \varepsilon.$$

(K.4). Demostración de que el mínimo rectángulo que contiene a D siempre existe

Haremos la demostración para cualquier dimensión, sustituyendo "rectángulo" por "producto de intervalos cerrados y acotados".

Como D es acotado, cada una de sus coordenadas está acotada, es decir, la proyección sobre una cualquiera de las coordenadas,

$$\pi_i(D) = \{r \in \mathbb{R} : \exists x_1, \ldots, x_n, (x_1, \ldots, \overset{\overset{i}{\vee}}{r}, \ldots, x_n) \in D\}$$

es un conjunto acotado para $i = 1, \ldots, n$. Llamamos a_i a su ínfimo y b_i a su supremo. El conjunto $I =$

$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ *es el buscado, como comprobamos a continuación.*

Si $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$, *es trivial que cada* x_i^0 *está en* $\pi_i(D)$, *luego* $a_i \leq x_i^0 \leq b_i$. *Queda así probado que* $D \subset I$.

Veamos ahora que I *es el mínimo de los productos de intervalos cerrados y acotados que contienen a* D. *De la definición de ínfimo y supremo se sigue que para cada coordenada,* $[a_i, b_i]$ *es el menor intervalo cerrado y acotado que contiene a* $\pi_i(D)$. *Entonces, si* $I' = [a_1', b_1'] \times \ldots [a_n', b_n']$ *es cualquier otro intervalo cerrado y acotado que contiene a* D, *para cada* $i = 1, \ldots, n$ *se tiene*

$$[a_i', b_i'] \supset \pi_i(D) \supset [a_i, b_i].$$

Luego $I' \supset I$, *como queríamos demostrar.*

(K.5). Demostración del teorema 2.27

Sumergimos a D *en dos rectángulos* R *y* R' *y construimos sendas ampliaciones de* f *a* R *y a* R', f^* *y* $f^{*\prime}$, *respectivamente. Nuestro objetivo es demostrar que* f^* *es integrable si y sólo si lo es* $f^{*\prime}$, *y que en este caso,* $\int_R f^* = \int_{R'} f^{*\prime}$.

Añadimos temporalmente la suposición de que uno de los dos rectángulos está contenido en el otro, luego veremos que esta suposición no conlleva pérdida de generalidad. También sin pérdida de generalidad suponemos que $R \subset R'$.

Si $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ *y* $R' = [a_1', b_1'] \times [a_2', b_2']$, *necesariamente se tienen las desigualdades* $a_i' \leq a_i \leq$

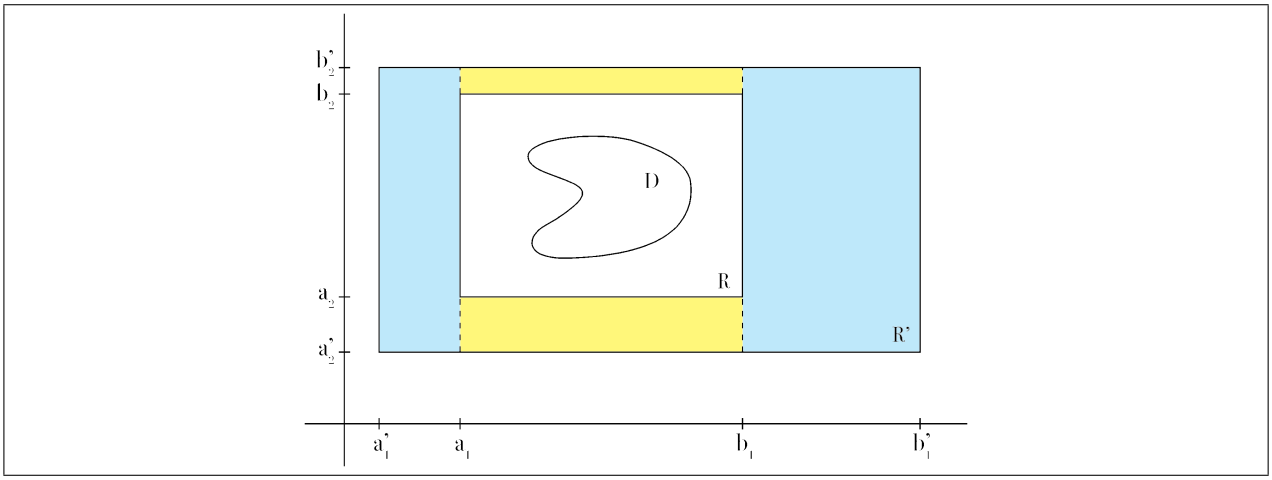


Figura K.4: La función $f^{*\prime}$ es constantemente nula sobre cada uno de los cuatro rectángulos coloreados

$b_i \leq b_i'$, $(i = 1, 2)$. *Entonces*

$$R' = R \cup \big([a_1', a_1] \times [a_2', b_2']\big) \cup \big([b_1, b_1'] \times [a_2', b_2']\big) \cup \big([a, b_1] \times [a_2', a_2]\big) \cup \big([a_1, b_1] \times [b_2, b_2']\big).$$

131. *En la figura resulta evidente esta identidad, pero debe comprobarse usando las desigualdades que definen a* R *y* R', *de lo contrario no se tendría una demostración.*

Además, los cinco rectángulos no se solapan (comprobar también que no se solapan, tomándolos de dos en dos). Por tanto, aplicando el teorema 2.12 a R' *y* $f^{*\prime}$,

$$\iint_{R'} f^{*\prime} = \iint_{R} f^{*\prime} + 0 + 0 + 0 + 0 = \iint_{R} f^*,$$

donde la primera igualdad se sigue de que $f^{*\prime}$ *es nula sobre cada punto de los cuatro rectángulos que forma* $R' \backslash R$, *y la segunda de que* $f^{*\prime}$ *y* f^* *coinciden sobre* R.

132. *Estas igualdades hay que entenderlas en todos los sentidos: uno de los miembros existe si y sólo si existe el otro; y en caso de existir, son iguales (ver el enunciado del teorema 2.12).*

Supongamos finalmente que entre R *y* R' *no hay relación de contenido. Entonces formamos* $R \cap R'$, *que también contiene a* D *y terminamos la demostración aplicando dos veces lo que ya hemos probado, primero a* R *y* $R \cap R'$, *y después a* R' *y* $R \cap R'$.

(K.6). Demostración del teorema 2.32, del valor medio para integrales, en el caso $n = 2$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad ([221]) *que D es una región simple en la dirección de las y.*

Comenzamos la demostración igual que en el caso $n = 1$, observando que f alcanza su mínimo m y su máximo M en puntos de su dominio, es decir,

$$m = f(\boldsymbol{p}^m) \leq \boldsymbol{p} \leq f(\boldsymbol{p}^M) = M,$$

para todo $\boldsymbol{p} \in D$ y ciertos $\boldsymbol{p}^m$, $\boldsymbol{p}^M \in D$, y que $m \leq \iint_D f/A(D) \leq M$. No podemos aplicar el teorema de Bolzano, como hicimos en el caso unidimensional, porque su generalización a varias variables requeriría más trabajo que demostrar directamente lo que aquí necesitamos ([222]).

133. Lo que vamos a hacer es, mediante una estratagema, fijarnos no en todo D sino en una parte de D que podamos considerar como unidimensional, y a continuación aplicar el teorema de Bolzano.

Esta misma idea se aplica en otras partes del curso.

Gracias a la estructura que tienen las regiones simples podemos construir una función continua definida sobre un intervalo y cuya imagen contenga a $\boldsymbol{p}^m$ y $\boldsymbol{p}^M$ y esté toda ella contenida en D. Lo haremos comenzando en $\boldsymbol{p}^m$, "subiendo" hasta el borde superior de D, siguiendo sobre el borde superior hasta llegar a la altura de $\boldsymbol{p}^M$ y, por último, "bajando" hasta $\boldsymbol{p}^M$.

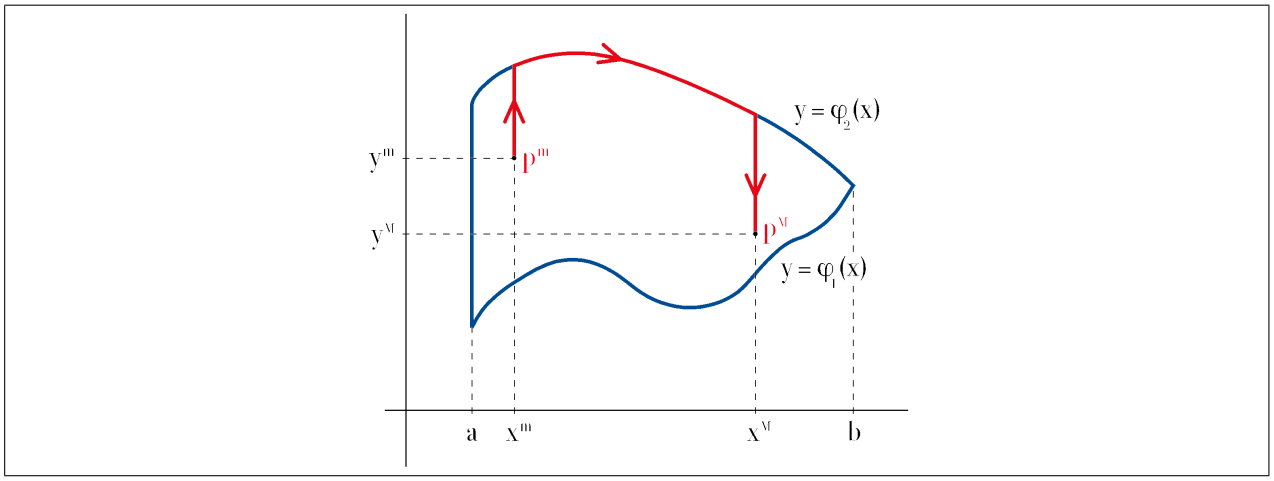


Figura K.5: En rojo, la imagen del camino α, que va desde $\boldsymbol{p}^m$ hasta $\boldsymbol{p}^M$

Llamando $\boldsymbol{p}^m = (x^m, y^m)$ y $\boldsymbol{p}^M = (x^M, y^M)$,

$$\varphi_1(x^m) \leq y^m \leq \varphi_2(x^m); \quad \varphi_1(x^M) \leq y^M \leq \varphi_2(x^M)$$

(notaciones como en la definición 2.19). Supongamos que $x^m \leq x^M$, nuevamente sin pérdida de generalidad ([223]), *y consideremos entonces el intervalo $[x^m - (\varphi_2(x^m) - y^m), x^M + (\varphi_2(x^M) - y^M)]$ y la función α definida sobre él mediante* ([224])

$$\alpha(t) = \begin{cases} (x^m, t + \varphi_2(x^m) - x^m) & \text{si } t \leq x^m \\ (t, \varphi_2(t)) & \text{si } x^m \leq t \leq x^M \\ (x^M, -t + \varphi_2(x^M) + x^M) & \text{si } t \geq x^M. \end{cases}$$

[221] Si lo que tenemos es una región simple en las x en lugar de las y, lo que haremos será cambiar las etiquetas de las variables, intercambiando así los papeles de la x y la y, con lo que habremos convertido el enunciado a demostrar en otro sobre una región simple en las y.

[222] El teorema de Bolzano no puede enunciarse y demostrarse en varias variables de la misma forma que para funciones de una variable, puesto que depende de manera esencial del hecho de que la variable tenga un orden total. Para generalizar a más de una variable un resultado análogo al teorema de Bolzano se requiere trabajar con el concepto topológico de conjunto conexo o con alguna de sus variantes.

[223] Bastaría con intercambiar los papeles de x^m y x^M, puesto que lo que importa en la demostración es que hagamos un recorrido entre los puntos $\boldsymbol{p}^m$ y $\boldsymbol{p}^M$, sin importar el sentido del recorrido.

[224] Para la definición de α utilizamos las mismas ideas que en la definición 1.9, de suma de caminos.

Entonces, la aplicación compuesta $f \circ \alpha$ es una función continua, definida sobre un intervalo, cuyos valores en los extremos del intervalo son precisamente $f(\boldsymbol{p}^m)$ y $f(\boldsymbol{p}^M)$ (comprobarlo), luego de acuerdo con el teorema de Bolzano, $f \circ \alpha$ alcanza cualquier valor intermedio entre estos dos, en particular ha de existir algún punto t_0 del intervalo de forma que

$$f(\alpha(t_0)) = \frac{\iint_D f}{A(D)}.$$

Para terminar la demostración basta tomar $\boldsymbol{c_0} = \alpha(t_0)$.

(K.7). Demostración de que los cambios a coordenadas polares verifican las hipótesis del corolario 2.36 del teorema del cambio de variable

Las funciones $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ son derivables de todos los órdenes sobre el plano (r,θ), por lo que el cambio a polares $\boldsymbol{T}$ siempre es de clase $\mathscr{C}^1$ sobre su dominio, Δ (que estamos suponiendo que es unión finita de regiones simples).

Consideramos el conjunto N_0 formado por el segmento y las dos semirrectas que delimitan el conjunto $[0,+\infty) \times [0,2\pi]$,

$$N_0 = \{(r,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi] \ : \ r = 0 \ \vee \ \theta = 0 \ \vee \ \theta = 2\pi\}.$$

Vamos a demostrar en primer lugar que sobre $(0,+\infty) \times (0,2\pi) = [0,+\infty) \times [0,2\pi] \backslash N_0$, la aplicación $\boldsymbol{T}$ es inyectiva y tiene jacobiano no nulo. Esto último se sigue directamente del hecho de que $\det \boldsymbol{T}(r,\theta) = r$, dado que todos los puntos para los que $r = 0$ están contenidos en N_0. Para probar la inyectividad, tomamos dos puntos (r_1,θ_1) y (r_2,θ_2) y probamos que si tienen la misma imagen entonces ambos puntos son el mismo.

Como tienen la misma imagen,

$$r_1\cos\theta_1 = r_2\cos\theta_2, \quad r_1\sin\theta_1 = r_2\sin\theta_2,$$

de donde, elevando al cuadrado y sumando, $r_1^2 = r_2^2$, Esta igualdad, junto con el hecho de que $r_1, r_2 \geq 0$, implica que $r_1 = r_2$.

Ahora podemos simplificar r_1 y r_2, puesto que son iguales y distintos de cero:

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2, \quad \sin\theta_1 = \sin\theta_2,$$

y como además $\theta_1, \theta_2 \in (0,2\pi)$, hemos de concluir que $\theta_1 = \theta_2$ ([225]).

Para demostrar que se cumplen las hipótesis 1 y 2 del teorema del cambio de variables sólo nos queda comprobar que si $\Delta = \bigcup_1^m \Delta_i$ y los Δ_i son regiones simples, entonces la unión de los interiores de los Δ_i no corta al conjunto N_0. Bastará con demostrar que si $\Delta \subset [0,+\infty) \times [0,2\pi]$ es una región simple, entonces $N_0 \cap \operatorname{Int}\Delta = \varnothing$.

Suponemos que Δ es simple en la dirección de la θ (el otro caso se haría de forma análoga). Entonces

$$\operatorname{Int}\Delta = \{(r,\theta) : a < r < b, \ \varphi_1(r) < \theta < \varphi_2(r)\},$$

donde $a > 0$, $\varphi_1(r) > 0$ y $\varphi_2(r) > 0$. Dada la definición de N_0, es imposible que $\operatorname{Int}\Delta$ y N_0 tengan algún punto en común.

(K.8). Ejemplo de integral en coordenadas polares

Ejemplo K.5 (Ejemplo 7.7.7 de [2].) Calcular la integral $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$ pasando a coordenadas polares, donde D es la corona circular $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

Como las desigualdades $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ equivalen a $1 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (recuérdese que siempre suponemos que $r \geq 0$ y que $\theta \in [0,2\pi]$), la corona circular D es la imagen del rectángulo $\Delta = [1,2] \times [0,2\pi]$ mediante la aplicación de $\boldsymbol{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

---

[225] De acuerdo con los axiomas de las funciones trigonométricas (apartado (B.3)) y teniendo en cuenta que $0 < \theta_1, \theta_2 < 2\pi$,

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \ \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, \ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi; \ \Rightarrow k = 0 \ \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \ \theta_1 + \theta_2 = 2k\pi; \ \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \ \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \\ k = 1 \ \Rightarrow \theta_1 = 2\pi - \theta_2 \end{cases} \end{cases}$$

Y la única solución es $\theta_1 = \theta_2$, también en el caso de que $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$:

$$\sin\theta_2 = \sin\theta_1 = \sin(2\pi - \theta_2) = -\sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 2\pi - \theta_2 = 0.$$

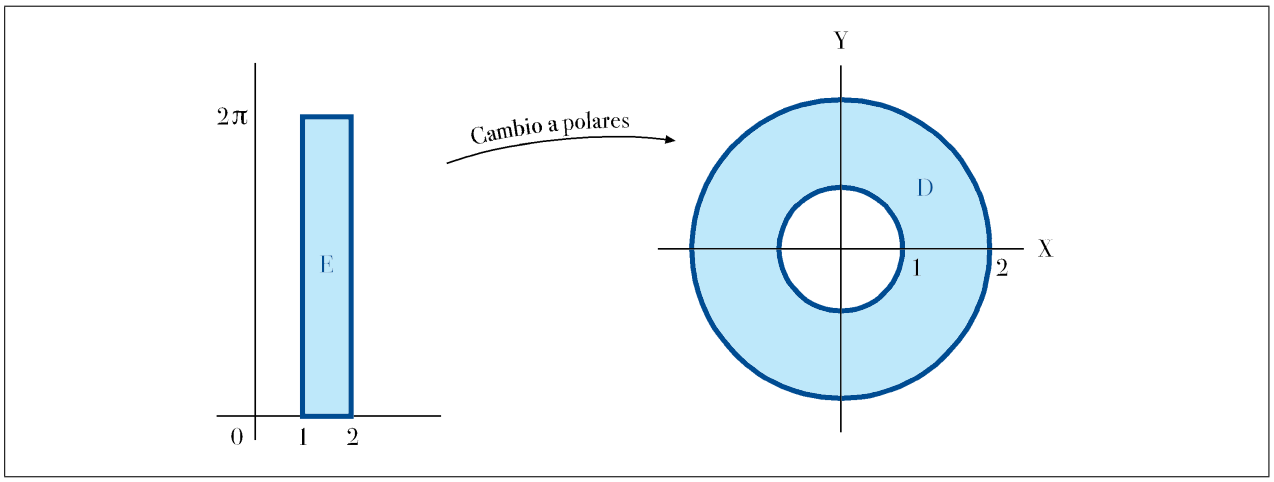


Figura K.6: Los conjuntos E y D del ejemplo K.5

La corona circular D *no es una región simple*, pero sí que es unión de cuatro regiones simples, por lo que, de acuerdo con el corolario 2.36,

$$\iint_D x^2y^2\,dx\,dy = \iint_\Delta r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,dr\,d\theta = \iint_\Delta r^5\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\Big[r^6\Big]_1^2\frac{1}{4}\Big[2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{21}{8}\,\pi\ .$$

■

(K.9). Fórmula de Green-Riemann para conjuntos deformados mediante un $\mathscr{C}^2$-difeomorfismo

Demostración del corolario 2.41: *Considérese un campo $\boldsymbol{F} = (P,Q) : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathscr{C}^1$, definido sobre el dominio D, para el que queremos demostrar la fórmula.*

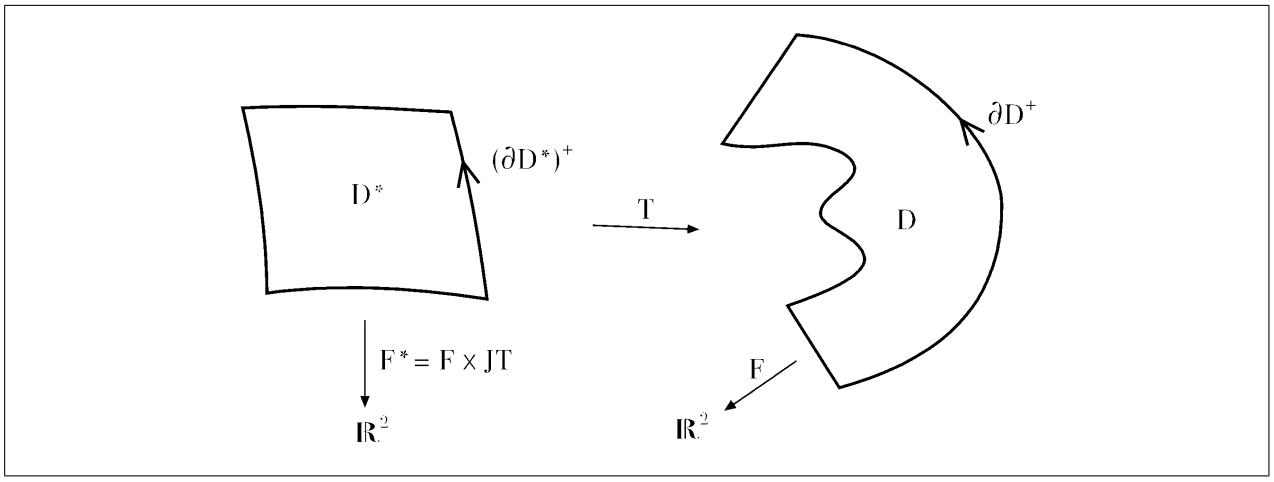


Figura K.7: Esquema de las aplicaciones que se utilizan en la demostración del corolario 2.41

Construiremos otro campo sobre D^*, $\boldsymbol{F}^* = (P^*,Q^*)$, al que aplicaremos la hipótesis, y a partir de la igualdad que nos proporcione concluiremos la igualdad que buscamos. En el resto de la demostración, cuando hablemos de $\boldsymbol{T}$ nos referimos a su restricción a D^*, que es biyectiva y cuya inversa es también de clase $\mathscr{C}^2$.

Para ello definimos $\boldsymbol{F}^* = (P,Q)\times J\boldsymbol{T}$, es decir,

$$P^* = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}_u = Px_u + Qy_u,\quad Q^* = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}_v = Px_v + Qy_v,$$

donde los subíndices indican, durante esta demostración, derivadas parciales. Por la hipótesis sobre D^*,

$$\iint\limits_{D^*} (Q_u^* - P_v^*)\, du\, dv = \int\limits_{(\partial D^*)^+} (P^*, Q^*) \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Probaremos que cada uno de los miembros de esta igualdad coincide con cada uno de los miembros de la igualdad que queremos demostrar.

Aplicando la regla de la cadena y utilizando el hecho de que $\boldsymbol{T} \in \mathscr{C}^2$ para garantizar que las derivadas cruzadas de $\boldsymbol{T}$ coinciden,

$$\begin{aligned} Q_u^* &= P_x x_u x_v + P_y y_u x_v + P x_{vu} + Q_x x_u y_v + Q_y y_u y_v + Q y_{vu} \\ P_v^* &= P_x x_v x_u + P_y y_v x_u + P x_{uv} + Q_x x_v y_u + Q_y y_v y_u + Q y_{uv}, \end{aligned}$$

luego

$$Q_u^* - P_v^* = (Q_x - P_y)(x_u y_v - x_v y_u) = (Q_x - P_y) \det J\boldsymbol{T}.$$

Por tanto, aplicando ahora el teorema del cambio de variable para la transformación $\boldsymbol{T^{-1}}$,

$$\iint\limits_{\boldsymbol{T^{-1}}(D)} (Q_u^* - P_v^*)\, du\, dv = \iint\limits_{D} (Q_x - P_y) \det J\boldsymbol{T}\, |\det J\boldsymbol{T^{-1}}|\, dx\, dy = \iint\limits_{D} (Q_x - P_y)\, dx\, dy\ .$$

En cuanto a la integral de línea, consideraremos sobre $\partial(\boldsymbol{T}(D^*)) = \partial D$ la orientación asociada a la parametrización que se obtiene al componer $\boldsymbol{T}$ con una parametrización de $(\partial D^*)^+$, $\boldsymbol{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Entonces $\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametriza a ∂D^+, luego

$$\int\limits_{\partial D^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{c}(t))\big) \cdot (\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{c})'(t)\, dt = \int\limits_a^b \boldsymbol{F}\big((\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{c})(t)\big) \cdot \big[J\boldsymbol{T}(\boldsymbol{c}(t)) \times \boldsymbol{c}'(t)\big]\, dt =$$

$$= \int\limits_a^b (\boldsymbol{F} \times J\boldsymbol{T})(c(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt = \int\limits_a^b \boldsymbol{F^*}(\boldsymbol{c}(t)) \cdot \boldsymbol{c}'(t)\, dt = \int\limits_{(\partial D^*)^+} \boldsymbol{F^*} \cdot d\boldsymbol{s}\ .$$

(K.10). Demostración de que siempre existe al menos una sucesión de conjuntos D_m como los utilizados en la definición 2.51

Como D es simple, supongamos sin pérdida de generalidad que lo es en la dirección de las y; sabemos que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\},$$

donde φ_1 y φ_2 son continuas sobre $[a,b]$ y $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Además, como el borde ∂D es una curva cerrada simple, sabemos también que la última desigualdad es estricta siempre que x sea distinto de a y de b.

La estrategia para construir los conjuntos D_m consistirá en recortar D por los lados y por arriba y por abajo, dejando bandas cada vez más pequeñas.

Tomamos en primer lugar un m_0 tal que $b - a > 2/m_0$, para asegurarnos de que podemos recortar un $1/m_0$ por cada uno de los dos lados, izquierdo y derecho. A continuación, para todo $m \ge m_0$ tomamos inductivamente un número m' que sea mayor que m y mayor que $(m-1)'$ (para el primer paso tomamos, por ejemplo, $m_0' = 1$) y de manera que además se cumpla que

$$\forall x \in \left[a + \frac{1}{m}, b - \frac{1}{m}\right], \quad \varphi_2(x) - \varphi_1(x) > \frac{2}{m'}.$$

Un m' con estas condiciones seguro que existe, porque la función $\varphi_2 - \varphi_1$ es continua y estrictamente positiva sobre todo el intervalo cerrado y acotado $\left[a + \frac{1}{m}, b - \frac{1}{m}\right]$.

Para terminar, basta definir

$$D_m = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a + \frac{1}{m} \le x \le b - \frac{1}{m},\quad \varphi_1(x) + \frac{1}{m'} \le y \le \varphi_2(x) - \frac{1}{m'}\right\} \quad \text{si } m > m_0,$$

y $D_m = D_{m_0}$ siempre que $1 \le m \le m_0$. La comprobación de que los D_m cumplen las condiciones expuestas en la definición 2.51 es rutinaria:

- *Como* $m > m-1$ *y* $m' > (m-1)'$, $D_m \supset D_{m-1}$ *para todo* $m > m_0$.
- *Sea* $(x,y) \in \operatorname{Int} D$. *Entonces* $a < x < b$ *y* $\varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)$, *luego por la propiedad arquimediana existe un* $m \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{m} < \min\{x-a,\ b-x,\ y-\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)-y\}.$$

Como $m' > m$, *necesariamente* $(x,y) \in D_m$.

(K.11). Los vectores tangentes a trayectorias con imagen sobre Σ son combinación lineal de las derivadas parciales

Teorema K.6 *(Notaciones de la página 115 y anteriores.) Sea* $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\Phi}(u_0,v_0) \in \Sigma$, *donde* (u_0,v_0) *es un punto interior a* D *para el que el vector normal es no nulo,* $\boldsymbol{n}(u_0,v_0) \neq \mathbf{0}$. *Entonces el conjunto de vectores tangentes en* $\boldsymbol{p}$ *a las trayectorias sobre* Σ *que son imagen mediante* $\boldsymbol{\Phi}$ *de las trayectorias diferenciables sobre* D, *es el espacio vectorial bidimensional determinado por* $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0)$ *y* $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0)$.

DEMOSTRACIÓN: *Al ser su producto vectorial distinto de cero, los vectores* $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0)$ *y* $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0)$ *son linealmente independientes, por lo que generan un espacio vectorial bidimensional.*

Cualquier trayectoria diferenciable con valores en D *que pase por el punto* (u_0,v_0), $\boldsymbol{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{c}(t_0) = (u_0,v_0)$, *da lugar a una trayectoria diferenciable en* Σ *que pasa por el punto* $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{c} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{c})(t_0) = \boldsymbol{p}$, *cuya tangente en* $\boldsymbol{p}$ *es*

$$(\boldsymbol{\Phi} \circ \boldsymbol{c})'(t_0) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0)c_1'(t_0) + \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0)c_2'(t_0),$$

que es combinación lineal de los vectores $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0)$ *y* $\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0)$.

Recíprocamente, si λ *y* μ *son dos escalares cualesquiera, la combinación lineal*

$$\lambda \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0) + \mu \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0),$$

es un vector tangente de los descritos en el enunciado. En efecto, puesto que el punto (u_0,v_0) *es interior a* D, *la trayectoria* $\boldsymbol{c} : [-\delta,\delta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{c}(t) = (u_0,v_0) + t(\lambda,\mu)$ *toma valores en* D *para cierto* $\delta > 0$, *y su imagen mediante* $\boldsymbol{\Phi}$ *es una trayectoria sobre* Σ *cuya tangente en* $\boldsymbol{p}$ *es la combinación lineal.*

(K.12). Una superficie definida paramétricamente es localmente una superficie definida por ecuaciones explícitas

Teorema K.7 *Sea* $\Sigma = \boldsymbol{\Phi}(D)$ *de clase* $\mathscr{C}^1$ *y sea* $\boldsymbol{p_0} = (x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$ *la imagen mediante* $\boldsymbol{\Phi}$ *de los parámetros* (u_0,v_0), *con la condición de que el rango de la matriz jacobiana* $J\boldsymbol{\Phi}(u_0,v_0)$ *es igual a* 2. *Entonces en un entorno del punto* $\boldsymbol{p_0}$, Σ *puede expresarse en forma explícita.*

DEMOSTRACIÓN: *Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el jacobiano* $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)$ *es no nulo, puesto que alguno de los tres determinantes* 2×2 *que pueden formarse a partir de la matriz jacobiana ha de ser no nulo. El teorema de la función inversa nos garantiza entonces que en un entorno de* (x_0,y_0) *pueden despejarse* u, v *en función de* x, y: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. *Entonces la función* $g(x,y) = z(u(x,y),v(x,y))$ *describe a* Σ *de forma explícita en un entorno del punto* $\boldsymbol{p_0}$.

(K.13). Demostración del contenido de la observación 85

Teorema K.8 *En la definición 3.10 puede sustituirse la condición* 1 *por la condición*

1′. $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{C}^1(D)$.

DEMOSTRACIÓN: *Es obvio que si existe una $\boldsymbol{\Phi}$ cumpliendo $1'$, la propia $\boldsymbol{\Phi}$ cumple también 1. Vamos a demostrar el enunciado recíproco, para lo cual suponemos que $\boldsymbol{\Phi}$ cumple 1 (además de cumplir el resto de las condiciones de la definición 3.10, claro está) y construiremos otra $\boldsymbol{\Phi}'$ que cumpla $1'$ y sea una parametrización de la misma superficie.*

Para cada D_i tomamos un conjunto E_i que lo contenga en su interior (observación 21) y sobre el que podemos prolongar $\boldsymbol{\Phi}|_{D_i}$ como función de clase $\mathscr{C}^1$. Podemos tomar todos los E_i acotados. A continuación elegimos m vectores, $\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_m}$, tales que los conjuntos $E_i' = E_i + \boldsymbol{p_i}$ son disjuntos dos a dos. Entonces, llamando $D_i' = D + \boldsymbol{p_i}$, tomamos como nuevo dominio de parámetros a la unión $D' = D_1' \cup \cdots \cup D_m'$ y como nueva parametrización a la función $\boldsymbol{\Phi}' : D' \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\forall \boldsymbol{p'} \in D', \qquad \boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{p'}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{p'} - \boldsymbol{p_i}), \quad \text{si } \boldsymbol{p'} \in D_i'.$$

La función $\boldsymbol{\Phi}'$ está bien definida y es de clase $\mathscr{C}^1$, gracias a que los D_i' son disjuntos.

Por último, es inmediato comprobar que las propiedades 2, 3 y 4 para $\boldsymbol{\Phi}'$ se siguen de las mismas propiedades para $\boldsymbol{\Phi}$. Y también el resto de condiciones de la definición 3.10 que ha de cumplir $\boldsymbol{\Phi}'$ para que sea una parametrización de la misma superficie.

(K.14). Demostración (parcial) de que la definición 3.16 no depende de la parametrización que se utilice para el cálculo de la integral

Teorema K.9 *La definición 3.16 es independiente de la parametrización.*

DEMOSTRACIÓN: (PARCIAL)

Lo probaremos solamente para el caso de que las dos parametrizaciones sean biyectivas y regulares sobre la totalidad de sus dominios ([226]).

Aplicando el corolario 2.36 al teorema del cambio de variable 2.35 y el teorema 3.12 al cambio de parámetros $\boldsymbol{h}$,

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{D_1=\boldsymbol{h}(D_2)} \big[(f\circ\boldsymbol{\Phi_1})\|\boldsymbol{n_1}\|\big](u_1,v_1)\,du_1\,dv_1 = \\
&\qquad = \iint\limits_{D_2} \big[(f\circ\boldsymbol{\Phi_1}\circ\boldsymbol{h})(\|\boldsymbol{n_1}\circ\boldsymbol{h}\|)\big](u_2,v_2)|\det J\boldsymbol{h}(u_2,v_2)|\,du_2\,dv_2 = \\
&\qquad = \iint\limits_{D_2} \big[(f\circ\boldsymbol{\Phi_2})\|\boldsymbol{n_2}\|\big](u_2,v_2)\,du_2\,dv_2.
\end{aligned}$$

(K.15). Demostración (parcial) del teorema 3.30

DEMOSTRACIÓN: (PARCIAL)

Al igual que en la demostración anterior, lo probaremos solamente para el caso de que las dos parametrizaciones sean biyectivas y regulares sobre la totalidad de sus dominios ([226]).

De acuerdo con las consideraciones inmediatamente anteriores a la definición 3.22 y con el teorema 3.12,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\boldsymbol{\Phi_1}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint\limits_{D_1=\boldsymbol{h}(D_2)} \big[(\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{\Phi_1})\cdot\boldsymbol{n_1}\big](u_1,v_1)\,du_1\,dv_1 = \\
&= \iint\limits_{D_2} \big[(\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{\Phi_1}\circ\boldsymbol{h})\cdot(\boldsymbol{n_1}\circ\boldsymbol{h})\big](u_2,v_2)|\det J\boldsymbol{h}(u_2,v_2)|\,du_2\,dv_2 = \\
&= \pm\iint\limits_{D_2} \big[(\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{\Phi_2})\cdot\boldsymbol{n_2}\big](u_2,v_2)\,du_2\,dv_2 = \pm\iint\limits_{\boldsymbol{\Phi_2}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S},
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado el corolario 2.36 al cambio de parámetros $\boldsymbol{h}$ que se construyó

[226] Puede intentarse una demostración del caso general a base de reducirlo, por fases, al que aquí demostramos, pero resulta complicado hacerlo con nuestra integral de Riemann, debido a que nuestra definición de superficie (3.10) es muy amplia. Para el caso general resulta más aconsejable recurrir a otros tipos de integrales, como las que se exponen en el epílogo.

en el teorema 3.12. El signo viene determinado por el del jacobiano $\det J\boldsymbol{h}$*, que tiene que ser constante puesto que el jacobiano es una función continua que nunca vale cero (si valiera cero, entonces el teorema 3.12 implicaría que* $\boldsymbol{n_2} = \mathbf{0}$*, cosa que estamos suponiendo que no ocurre)* ([227]).

(K.16). La cinta de Möbius no es orientable

De acuerdo con lo expuesto en el ejemplo 3.28, llamamos *cinta de Möbius* a una superficie M obtenida mediante una parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ definida sobre $D = [0, \pi] \times [-1, 1]$ por

$$\boldsymbol{\Phi}(\theta, v) = ((a - v\sin\theta)\cos 2\theta, (a - v\sin\theta)\sin 2\theta, v\cos\theta),$$

donde a es un número real estrictamente positivo.

Teorema K.10 *Las cintas de Möbius son superficies no orientables, a pesar de que admiten una parametrización que es regular en todo su dominio.*

Demostración:
(1) Probamos en primer lugar que la parametrización $\boldsymbol{\Phi}$ es regular sobre todo su dominio. *La matriz jacobiana de* $\boldsymbol{\Phi}$ *es*

$$J\boldsymbol{\Phi}(\theta, v) = \begin{pmatrix} -v\cos\theta\cos 2\theta - 2(a - v\sin\theta)\sin 2\theta & -\sin\theta\cos 2\theta \\ -v\cos\theta\sin 2\theta + 2(a - v\sin\theta)\cos 2\theta & -\sin\theta\sin 2\theta \\ -v\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

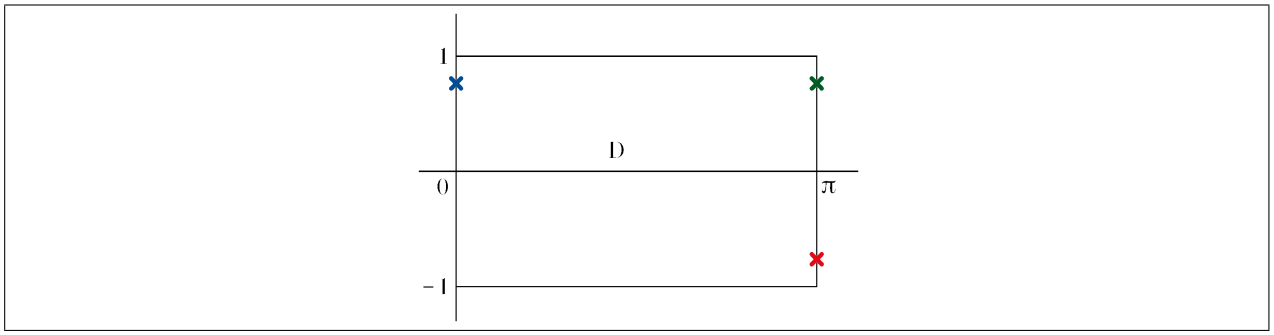


Figura K.8: Parametrización de la cinta de Möbius: similar a la del cilindro del ejemplo 3.3, pegando los lados verticales de D, pero tras girar uno de ellos 180°, de modo que el punto azul se une con el rojo en lugar de unirse con el verde

Calculamos las tres componentes del vector normal e imponemos la condición de que sean nulas:

$$\left.\begin{aligned} -v\sin 2\theta + 2(a - v\sin\theta)\cos\theta\cos 2\theta &= 0 \\ v\cos 2\theta - 2(a - v\sin\theta)\cos\theta\sin 2\theta &= 0 \\ 2(a - v\sin\theta)\sin\theta &= 0 \end{aligned}\right\}$$

De la última igualdad se sigue que necesariamente $\sin\theta = 0$*, porque si* $a - v\sin\theta$ *fuese nulo, sustituyéndolo en las dos primeras igualdades tendríamos* $v\sin 2\theta = v\cos 2\theta = 0$*, luego* $v = 0$*, y entonces* $a = 0$*, que es falso. Introduciendo* $\sin\theta = 0$ *en la primera ecuación,* $2a\cos^3\theta = 0$*, lo que es absurdo, pues* $\cos\theta$ *no puede valer* 0 *(puesto que* $\sin\theta = 0$*) y* $a > 0$ *según el enunciado.*

(2) Ahora demostramos que M no es orientable por ninguna parametrización. *Nos fijaremos en toda una curva que está contenida en la intersección de* M *con el plano* $z = 0$*, identificaremos para los puntos de la curva sus normales unitarias a* M *y veremos que no se puede hacer una selección de la normal unitaria*

[227] Para probar que si la función continua $\det J\boldsymbol{h} : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ no tiene signo constante entonces ha de valer 0 el algún punto, no puede aplicarse directamente el teorema de Bolzano, porque el dominio no es un intervalo, sino que es un conjunto de dos variables. A pesar de ello, podemos aplicar indirectamente el teorema de Bolzano, sin más que utilizar un razonamiento como el expuesto en la demostración del teorema del valor medio para integrales dobles, en el apartado (K.6) y la observación 133.

que sea continua sobre toda la curva.

Si en la definición de la parametrización $\mathbf{\Phi}$ *hacemos* $v = 0$*, describiremos los puntos* $(a\cos 2\theta, a\sin 2\theta, 0)$*,* $0 \le \theta \le \pi$ *es decir, la circunferencia* C *contenida en* $z = 0$*, con centro en el origen y radio* a*.*

Por otra parte, el vector normal en un punto en el que $v = 0$ *es (de acuerdo con los cálculos anteriores)*

$$\boldsymbol{n}(\theta, 0) = 2a(\cos\theta\cos 2\theta, -\cos\theta\sin 2\theta, \sin\theta).$$

Imaginemos que tenemos una normal unitaria continua (normal a M*, se entiende) y definida sobre todos los puntos de* C*,* $\boldsymbol{N} : C \longrightarrow \mathbb{R}^3$*. Llegaremos a una contradicción.*

En cada punto $\mathbf{\Phi}(\theta, 0) \in C$ *la normal* $\boldsymbol{N}$ *tiene que coincidir con* $\pm\boldsymbol{n}(\theta, 0)/\|\boldsymbol{n}(\theta, 0)\|$*. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que para* $\theta = 0$*,* $\boldsymbol{N}(\mathbf{\Phi}(0, 0)) = +\boldsymbol{n}(0, 0)/\|\boldsymbol{n}(0, 0)\|$*. El plan para construir la contradicción va a ser considerar el signo en función del ángulo* θ*. Al variar* θ *desde* 0 *hasta* π*, el signo tiene que ser siempre el mismo, por continuidad de* $\boldsymbol{N}$ *(aplíquese el argumento que se utilizó en la demostración del teorema 3.24). Luego también debería ser el mismo para* $\theta = \pi$*, pero resulta que*

$$\mathbf{\Phi}(0, 0) = \mathbf{\Phi}(\pi, 0) \quad \textit{y en cambio} \quad \boldsymbol{N}(0, 0) = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{N}(\pi, 0) = (-1, 0, 0),$$

de donde resulta la contradicción.

(K.17). Demostración de que los cambios a coordenadas esféricas verifican las hipótesis del teorema del cambio de variable

Seguiremos el mismo planteamiento que en la demostración relativa a las coordenadas polares, apartado (K.7).

Nuestra función $\boldsymbol{T}(\rho, \varphi, \theta) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\varphi)$ *admite derivadas de todos los órdenes en todos los puntos, luego es de clase* $\mathscr{C}^1$ *sobre* Ω*.*

Definimos el conjunto

$$N = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \Omega \ :\ \rho = 0 \ \vee\ \varphi = 0 \ \vee\ \varphi = \pi \ \vee\ \theta = 0 \ \vee\ \theta = 2\pi\}$$

y comprobamos en primer lugar que, sobre el conjunto $\Omega\backslash N$*,* $\boldsymbol{T}$ *es una aplicación inyectiva y con jacobiano no nulo. El jacobiano es* $\det J\boldsymbol{T}(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2\sin\varphi$*, según calculamos en la página 163, luego es no nulo en todos los puntos de* $\Omega\backslash N$*.*

Para demostrar que sobre $\Omega\backslash N$ *la aplicación* $\boldsymbol{T}$ *es inyectiva tomamos dos puntos de* $\Omega\backslash N$*,* $(r_1, \varphi_1, \theta_1)$ *y* $(r_2, \varphi_2, \theta_2)$*, y demostramos que si tienen la misma imagen entonces ambos puntos son el mismo.*

Como tienen la misma imagen,

$$\begin{aligned} \rho_1\sin\varphi_1\cos\theta_1 &= \rho_2\sin\varphi_2\cos\theta_2, \\ \rho_1\sin\varphi_1\sin\theta_1 &= \rho_2\sin\varphi_2\sin\theta_2, \\ \rho_1\cos\varphi_1 &= \rho_2\cos\varphi_2. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado las tres igualdades y sumándolas obtenemos $\rho_1^2 = \rho_2^2$*, y por tanto* $\rho_1 = \rho_2 > 0$*, gracias a que sabemos por una parte que* $\rho_i \ge 0$ *(por las restricciones generales sobre las coordenadas esféricas) y por otra que* $\rho_i \ne 0$ *(porque los puntos no están en* N*).*

A continuación simplificamos ρ_1 *y* ρ_2 *en la tercera igualdad, con lo que* $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$*. De aquí se sigue que* $\varphi_1 = \varphi_2$*, gracias a que* $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$ ([228]).

Entonces $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 > 0$*, luego podemos simplificarlo de las dos primeras igualdades (al mismo tiempo que cancelamos* ρ_1 *y* ρ_2*), lo que nos da las igualdades* $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$*,* $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$*, y de aquí deducimos que* $\theta_1 = \theta_2$*, puesto que ambos están en el intervalo abierto* $(0, 2\pi)$ ([229])*.*

Una de nuestras hipótesis era que $\Omega = \bigcup_1^m \Omega_i$*, donde cada* Ω_1 *es una región simple. Sólo nos queda comprobar que el conjunto* $N \cap \Omega = \bigcup_1^m (N \cap \Omega_i)$ *(que es posible que sea vacío) está contenido en* $\bigcup_1^m \partial\Omega_i$*.*

---

[228] De acuerdo con los axiomas de las funciones trigonométricas (apartado (B.3)) y teniendo en cuenta que $0 < \varphi_1, \varphi_2 < \pi$,

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \ \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi;\ \Rightarrow k = 0\ \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi_1 + \varphi_2 = 2k\pi,\ \text{que es imposible} \end{cases}$$

[229] Se ha demostrado en nota a pie de página nº 225.

Para ello argumentamos de la misma manera que al final de la demostración del apartado (K.7), sólo que ahora con una coordenada más y hay que utilizar la definición 4.3 y el análogo al teorema 2.20 para tres dimensiones.

(K.18). Demostración del lema 4.15

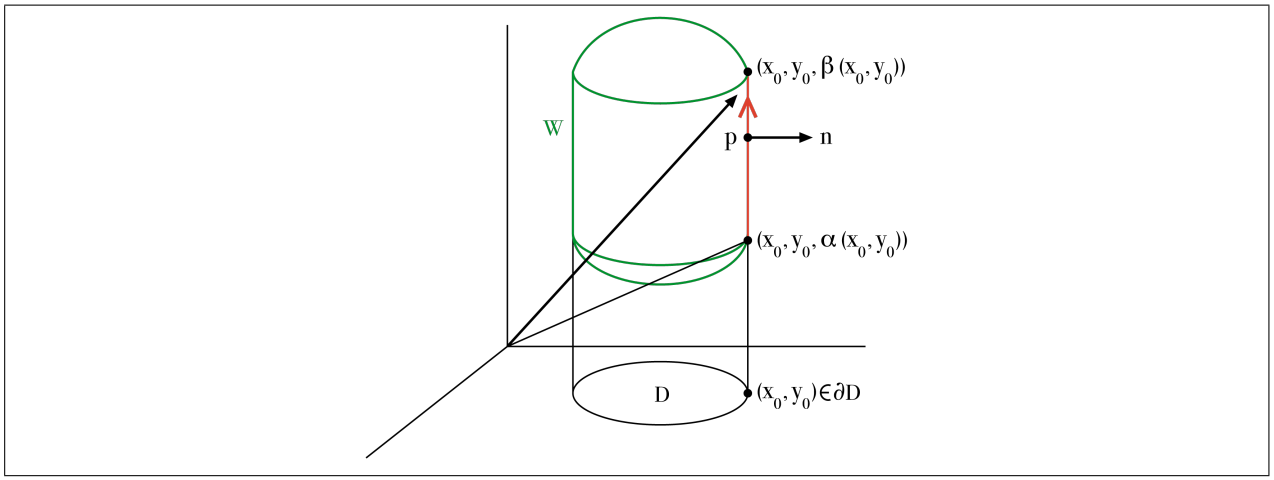


Figura K.9: El vector rojo es la diferencia entre $(x_0, y_0, \beta(x_0, y_0))$ y $(x_0, y_0, \alpha(x_0, y_0))$, que ha de ser ortogonal al $\boldsymbol{n}$

Sea $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0, z_0) \in \partial W \backslash (\Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta) \subset \Sigma_0$, y $\boldsymbol{n}$ un vector normal a ∂W en $\boldsymbol{p}$. Queremos probar que es nula la tercera coordenada de $\boldsymbol{n}$, $n_z = 0$ ([230]).

Obsérvese que $(x_0, y_0) \in \partial D$ y que $\alpha(x_0, y_0) < z_0 < \beta(x_0, y_0)$, luego todo el segmento que va desde el punto $(x_0, y_0, \alpha(x_0, y_0))$ hasta el punto $(x_0, y_0, \beta(x_0, y_0))$ está contenido en ∂W y por tanto el vector diferencia, $(0, 0, \beta(x_0, y_0) - \alpha(x_0, y_0))$ es ortogonal a $\boldsymbol{n}$ ([231]). De aquí deducimos que necesariamente $n_z = 0$ puesto que el producto escalar es $n_z[\beta(x_0, y_0) - \alpha(x_0, y_0)]$ y $\boldsymbol{p} \notin \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta$ implica que $\alpha(x_0, y_0) < \beta(x_0, y_0)$.

---

[230] La recta normal a Σ en $\boldsymbol{p}$ está formada por los puntos

$$\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{n} = (x_0 + tn_x, y_0 + tn_y, z_0 + tn_z), \quad t \in \mathbb{R},$$

luego si demostramos que $n_z = 0$, la tercera coordenada de cualquier punto de la recta valdrá z_0, independientemente del valor de t.

[231] Supongamos que todo un segmento $\{\boldsymbol{u} + t(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) : 0 \leq t \leq 1\}$ está contenido en una superficie Σ y que $\boldsymbol{p}$ es un punto de ese segmento distinto de $\boldsymbol{u}$ y de $\boldsymbol{v}$. Entonces la trayectoria definida por $t \rightsquigarrow \boldsymbol{u} + t(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$ tiene como vector tangente en $\boldsymbol{p}$ al vector $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, luego $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ está contenido en el planto tangente a Σ en $\boldsymbol{p}$ (apartado (K.11)).

Por consiguiente, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ es ortogonal a la recta normal a Σ en $\boldsymbol{p}$.

L

Anexo L: Integrales y simetría

Cuando tanto el integrando como el dominio de la integral disfruten de propiedades de simetría puede ser útil aprovecharlas para simplificar nuestros cálculos. En los siguientes ejemplos mostramos cómo los teoremas de cambio de variable nos servirán para hacerlo de forma rigurosa (ver también el ejemplo 1.8).

La técnica consiste en detectar una simetría, o una antisimetría, en la función a integrar y descomponer el dominio de integración en varias partes sobre las que la simetría o antisimetría observada nos permita acumular varios sumandos en uno o nos permita simplificarlos. Para justificar la acumulación o la simplificación utilizaremos el teorema del cambio de variable más adecuado.

(L.1). Integrales de una variable

Ejemplo L.1 Nos proponemos calcular $\int_0^{2\pi} \sin^5 x \cos^4 x \; dx$. Por las propiedades de las funciones trigonométricas sabemos que la función seno, y por tanto también la función seno elevada a un número impar, toma los mismos valores, pero de signo contrario, entre $[0, \pi]$ y entre $[\pi, 2\pi]$. Lo mismo ocurre con la función coseno, pero al estar elevada a un número par sus valores se repiten con el mismo signo. Intuimos, en consecuencia, que las integrales de $\sin^5 x \cos^4 x$ sobre $[0, \pi]$ y sobre $[\pi, 2\pi]$ se cancelarán.

Pasemos a convertir convertir esta intuición en un argumento riguroso.

Según una de las fórmulas del apartado 1.1.3,

$$\int_0^{2\pi} \sin^5 x \cos^4 x \; dx = \int_0^{\pi} \sin^5 x \cos^4 x \; dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x \cos^4 x \; dx;$$

en la última integral introducimos el cambio de variable $t = x - \pi$, con lo que, de acuerdo con fórmulas de los apartados 1.1.3 y (B.3),

$$\begin{aligned} x &= h(t) = t + \pi \\ h'(t) &= 1 \\ \sin x &= \sin(t + \pi) = \sin t \cos \pi + \cos t \sin \pi = -\sin t \\ \cos x &= \cos(t + \pi) = \cos t \cos \pi - \sin t \sin \pi = -\cos t \end{aligned}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x \cos^4 x \; dx = -\int_0^{\pi} \sin^5 t \cos^4 t \; dt = -\int_0^{\pi} \sin^5 x \cos^4 x \; dx,$$

donde en la última igualdad no hemos hecho más que cambiar el nombre de la variable muda de integración. Por consiguiente,

$$\int_0^{2\pi} \sin^5 x \cos^4 x \; dx = \int_0^{\pi} \sin^5 x \cos^4 x \; dx - \int_0^{\pi} \sin^5 x \cos^4 x \; dx = 0,$$

como queríamos demostrar. ■

Ejemplo L.2 De manera similar se demuestran igualdades como las siguientes:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^5 x \; dx = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^5 x \; dx - \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos^5 t \; dt = 0 \qquad (x = \pi - t),$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^7 x \; dx = \int_0^{\pi/2} \sin^7 x \cos^3 x \; dx \qquad (x = \pi/2 - t),$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^4 x \; dx = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x \; dx + \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos^4 t \; dt =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x \; dx \qquad (x = \pi - t).$$

■

Ejemplo L.3 Puede asegurarse que

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{\sqrt{x^4+1}} \; dx = 0$$

sin necesidad de obtener una primitiva de la función a integrar. En efecto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{\sqrt{x^4+1}} \; dx = \int_{-1}^{0} \frac{x^5}{\sqrt{x^4+1}} \; dx + \int_{0}^{1} \frac{x^5}{\sqrt{x^4+1}} \; dx = 0$$

porque el cambio de variable $x = -t$ garantiza que

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^5}{\sqrt{x^4+1}} \; dx = \int_{1}^{0} \frac{-t^5}{\sqrt{t^4+1}} \; (-dt) = -\int_{0}^{1} \frac{t^5}{\sqrt{t^4+1}} \; dt$$

(recordar que al invertir el orden de integración hay que multiplicar por -1). ■

(L.2). Integrales de varias variables

Ejemplo L.4 Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$; nos plantemos el cálculo de $\iint_D y^3 \; dx\, dy$. Como y^3 cambia de signo al sustituir y por $-y$, calcularemos la integral de y^3 primero sobre el recinto por encima del eje X y después por debajo del eje X, con el objetivo de que al sumarlas se cancelen.

Aplicando el corolario 2.31,

$$\iint_D y^3 \; dx\, dy = \iint_{D_1} y^3 \; dx\, dy + \iint_{D_2} y^3 \; dx\, dy,$$

donde $D_1 = \{(x,y) \in D : y \leq 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in D : y \geq 0\}$. Vamos a cambiar y por $-y$ en una de las integrales. Para ello, consideramos el cambio de variable lineal

$$\boldsymbol{T} : \Delta_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1, \; v \leq 0\} \longrightarrow D_2, \qquad (u,v) \rightsquigarrow (x,y) = (u,-v),$$

para el que $|\det J\boldsymbol{T}(u,v)| = |-1| = 1$, y aplicamos el teorema 2.35 (o el corolario 2.36), del cambio de variable para integrales dobles, para obtener

$$\iint_{D_2 = \boldsymbol{T}(\Delta_1)} y^3 \; dx\, dy = \iint_{\Delta_1} -v^3 \; du\, dv = -\iint_{D_1} y^3 \; dx\, dy$$

(en la última igualdad no hemos hecho más que cambiar los nombres de las variables), por lo que $\iint_D y^3 \; dx\, dy = 0$. ■

Ejemplo L.5 Queremos probar, sin calcular primitivas, que

$$\iiint\limits_W \frac{x-y}{\sqrt{x^4+y^4+z+1}}\,dx\,dy\,dz = 0, \quad W = [1,2]^3 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x,y,z\le 2\},$$

basándonos en que el dominio es simétrico respecto del plano $x=y$, mientras que el integrando es antisimétrico respecto del mismo plano.

Dividimos W en dos partes limitadas por el plano $y=x$,

$$W_1 = \{(x,y,z)\in W : y\ge x\}, \quad W_2 = \{(x,y,z)\in W : y\le x\},$$

y consideramos el cambio de variable lineal $\boldsymbol{T}$ definido por $x=v$, $y=u$, $z=w$, de manera que $\boldsymbol{T}(\Omega_1)=W_2$, donde estamos llamando Ω_1 al mismo conjunto que W_2 pero dentro del espacio de variables u, v, w:

$$\Omega_1 = \{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : 1\le u,v,w\le 2,\ v\le u\}.$$

Aplicamos ahora el teorema 4.9, del cambio de variable para integrales triples. Como $|\det J\boldsymbol{T}(u,v,w)| = 1$,

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{W_2=\boldsymbol{T}(\Omega_1)} \frac{x-y}{\sqrt{x^4+y^4+z+1}}\,dx\,dy\,dz &= \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{v-u}{\sqrt{v^4+u^4+w+1}}\,du\,dv\,dw = \\ &= -\iiint\limits_{W_1} \frac{x-y}{\sqrt{y^4+x^4+z+1}}\,dx\,dy\,dz,\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado que buscábamos, aplicando el teorema 4.7. ■

M

Anexo M: Tabla de antiderivadas

En este anexo incluimos una lista de primitivas de funciones elementales que, a los efectos resolver los problemas y los exámenes que aparecen en el curso, podemos dar por conocidas.

Las letras distintas de x indican constantes. Las constantes a, b y c son números reales, mientras que m y n son números naturales; por lo demás son números arbitrarios, salvo que se indique expresamente alguna restricción.

Cada igualdad se sobreentiende que es válida en todos los puntos donde las dos funciones, el integrando y su antiderivada, están bien definidas.

Es conocido que puede sumarse cualquier constante a la antiderivada ([232]). Como consecuencia de lo anterior y de otras circunstancias, una misma función puede tener antiderivadas que parezcan diferentes. Una muestra es, por ejemplo, la siguiente primitiva que nos proporciona Maple V (donde $a > 0$):

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \ ,$$

que no es, aparentemente, la misma que la de fórmula número 28. Otra muestra de lo mismo es las dos primitivas que nos proporcionan las fórmulas 31 y 32; la explicación en este caso es que para todo $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ (ver la figura B.7). Como no podía ser de otra manera, al aplicar las antiderivadas de las fórmulas 31 y 32 al cálculo de una integral definida, el resultado es el mismo ([233]).

Algunas de las fórmulas son más generales que otras; por ejemplo, 6, 7 y 8 son todas ellas casos particulares de 9. Se incluyen por separado para que su utilización resulte más sencilla.

---

[232] Cuando el dominio de definición no sea un intervalo podrán usarse en la misma fórmula no sólo una sino varias constantes distintas. Por ejemplo, la función

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \rightsquigarrow \begin{cases} \log|x| + 2 & \text{si } x > 0 \\ \log|x| + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

también es una antiderivada inmediata de la función número 2,

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \rightsquigarrow \frac{1}{x}$$

[233] Para una comprobación, utilizar la fórmula 32 en último cálculo del ejemplo 3.35.

Básicas

1. $\displaystyle\int x^a\ dx = \frac{1}{a+1}\,x^{a+1} \qquad (a \neq -1)$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \log|x|$
3. $\displaystyle\int e^x\ dx = e^x$
4. $\displaystyle\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\log a} \qquad (a > 0)$
5. $\displaystyle\int \log x\ dx = x\log x - x$

Cocientes de polinomios de segundo grado

6. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\ dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \qquad (a \neq 0)$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\ dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| \qquad (a \neq 0)$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{x(ax+b)}\ dx = \frac{1}{b}\log\left|\frac{x}{ax+b}\right| \qquad (b \neq 0)$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\ dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| & (b^2 > 4ac,\ a \neq 0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & (b^2 < 4ac,\ a \neq 0) \\ -\dfrac{2}{2ax+b} & (b^2 = 4ac,\ a \neq 0) \end{cases}$
10. $\displaystyle\int \frac{x}{a^2+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\log\left|a^2+x^2\right|$
11. $\displaystyle\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\ dx = \frac{1}{2a}\log|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\ dx \qquad (a \neq 0)$

Funciones trigonométricas

12. $\displaystyle\int \sin x\ dx = -\cos x$
13. $\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x$
14. $\displaystyle\int \tan x\ dx = -\log|\cos x|$
15. $\displaystyle\int \cot x\ dx = \log|\sin x|$
16. $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{a}\ dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} \qquad (a > 0)$
17. $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{a}\ dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} \qquad (a > 0)$
18. $\displaystyle\int \arctan\frac{x}{a}\ dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\log(a^2+x^2) \qquad (a > 0)$
19. $\displaystyle\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$
20. $\displaystyle\int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$

21. $\displaystyle\int \sin^n x\ dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\ dx$

22. $\displaystyle\int \cos^n x\ dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\ dx$

23. $\displaystyle\int \tan^n x\ dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\ dx \qquad (n \geq 2)$

24. $\displaystyle\int \cos^m x \sin^n x\ dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\ dx =$

$$= -\frac{\cos^{m+1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x\ dx$$

25. $\displaystyle\int \sin ax \sin bx\ dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad (a^2 \neq b^2)$

26. $\displaystyle\int \sin ax \cos bx\ dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \qquad (a^2 \neq b^2)$

27. $\displaystyle\int \cos ax \cos bx\ dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \qquad (a^2 \neq b^2)$

Funciones con raíces cuadradas

28. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \qquad (a > 0)$

29. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\ dx = \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) \qquad (a > 0)$

30. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \qquad (a \in \mathbb{R})$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx = \arcsin\frac{x}{a} \qquad (a > 0)$

32. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ dx = -\arccos\frac{x}{a} \qquad (a > 0)$

33. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\ dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| \qquad (a \neq 0)$

34. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\ dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\ dx \qquad (a \neq 0)$

35. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\ dx = \frac{2(ax-2b)\sqrt{ax+b}}{3a^2} \qquad (a \neq 0)$

36. $\displaystyle\int x\sqrt{ax+b}\ dx = \frac{2(3ax-2b)(ax+b)^{3/2}}{15a^2} \qquad (a \neq 0)$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\ dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}}\log\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| & (a \neq 0,\ b > 0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} & (a \neq 0,\ b < 0) \end{cases}$

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\ dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\log\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| \qquad (a > 0)$

39. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} \qquad (a \neq 0)$

40. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} \qquad (a \neq 0)$

41. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| \qquad (a > 0)$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\log\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| \qquad (a > 0)$

43. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sqrt{x^2+a^2}$

44. $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \ (a \neq 0)$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\log\left|2ax+b+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right| & (a > 0) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{2ax+b}{b^2-4ac} & (a < 0,\ b^2 > 4ac) \end{cases}$

46. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\log\left|\dfrac{bx+2c+2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}}{x}\right| & (c > 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}} & (c < 0,\ b^2 > 4ac) \\ -\dfrac{2}{bx}\left(\sqrt{ax^2+bx}\right) & (c = 0) \end{cases}$

48. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \mp\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a^2x} \qquad (a \neq 0)$

50. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \qquad (a \neq 0)$

51. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{15}a^2\right)\sqrt{(x^2+a^2)^3}$

52. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{a^2-x^2}(2a^2+x^2) \qquad (a \neq 0)$

53. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x^4}\,dx = \mp\frac{(x^2\pm a^2)^{3/2}}{3a^2x^3} \qquad (a \neq 0)$

Otras funciones

54. $\displaystyle\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}x^n\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx \qquad (a \neq 0)$

55. $\displaystyle\int x^n \cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^n\sin ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx \qquad (a \neq 0)$

56. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\ dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\ dx \qquad (a \neq 0)$

57. $\displaystyle\int x^n \log ax\ dx = x^{n+1}\left(\frac{\log ax}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \qquad (a > 0)$

58. $\displaystyle\int x^n \log^m ax\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ \log^m ax - \frac{m}{m+1}\int x^n \log^{m-1} ax\ dx \qquad (a > 0)$

59. $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\ dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx) \qquad (a^2+b^2 \neq 0)$

60. $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\ dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx) \qquad (a^2+b^2 \neq 0)$

Referencias

[1] Tom M. Apostol. *Análisis matemático*, segunda edición. Editorial Reverté, 1981.

[2] Peter Baxandall y Hans Liebeck. *Vector calculus*, 2nd edition. Clarendon Press, 1983.

[3] Alexander Bogomolny. *Hyperintegers and Hyperreal Numbers.* http://www.cut-the-knot.org/WhatIs/Infinity/HyperrealNumbers.shtml. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[4] Alexander Bogomolny. *Infinitesimals. Non-standard Analysis.* http://www.cut-the-knot.org/WhatIs/Infinity/NSA.shtml. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[5] Frank E. Burk. *A garden of integrals.* Mathematical Association of America, 2007.

[6] Juan De Burgos. *Cálculo infinitesimal de varias variables.* McGraw-Hill, 1995.

[7] Ronald W. Gatterdam. *The planimeter as an example of Green's theorem.* The American Mathematical Monthly, vol. 88, no. 9 (1981), 701–704.

[8] Robert Goldblatt. *Lectures on the hyperreals.* Springer, 1998.

[9] Russell Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock.* American Mathematical Society, 1994.

[10] Ernest Hairer y Gerhard Wannern, Gerhard. *Analysis by its history.* Springer, 2008.

[11] James M. Henle y Eugene M. Kleinberg. *Infinitesimal calculus.* MIT Press, 1979.

[12] H. Jerome Keisler. *Elementary calculus. An infinitesimal approach.* On-line edition http://www.math.wisc.edu/~keisler/calc.html, University of Wisconsin, 2010. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[13] Stephen G. Krantz. *A mathematician comes of age.* Mathematical Association of America, 2012.

[14] Jacqueline Lelong-Ferrand y Jean-Marie Arnaudiès. *Analyse*, cuarta edición. Dunod, 1977.

[15] Jerrold E. Marsden y Anthony J. Tromba. *Cálculo vectorial*, quinta edición. Pearson, 2004.

[16] Louis Narens. *A nonstandard proof of the Jordan curve theorem.* Pacific Journal of Mathematics, vol. 36, no. 1, 1971, 19–229.

[17] Alain M. Robert. *Nonstandard analysis.* John Wiley & Sons, 1988. (Reimpresión: Dover Books on Mathematics, 2011.)

[18] Laurent Schwartz. *Analyse mathématique : Cours professé à l'École Polytechnique, Paris, vol. I.* Hermann, 1967.

[19] Laurent Schwartz. *Analyse mathématique : Cours professé à l'École Polytechnique, Paris, vol. II.* Hermann, 1967.

[20] Michael Spivak. *Cálculo en variedades.* Reverté, 1972.

[21] Keith D. Stroyan. *Calculus with infinitesimals.* En *The strength of nonstandard analysis*, 369–394. Springer, 2007.

[22] Keith D. Stroyan. *Mathematical background. Foundation of infinitesimal calculus.* Academic Press, 1998. 2nd edition (ebook), http://www.math.uiowa.edu/~stroyan/InfsmlCalculus/FoundInfsmlCalc.pdf. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[23] Keith D. Stroyan y José M. Bayod. *Foundations of infinitesimal stochastic analysis.* North-Holland, 1986.

[24] Terence Tao. *A cheap version of nonstandard analysis.* https://terrytao.wordpress.com/2012/04/02/a-cheap-version-of-nonstandard-analysis/. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[25] Nader Vakil. *Real analysis through modern infinitesimals.* Cambridge University Press, 2011.

[26] Martin Väth. *Nonstandard analysis.* Birkhäuser, 2007.

[27] Stan Wagon. *The Banach-Tarski paradox.* Cambridge University Press, 1993.

[28] Wikipedia. *atan2.* https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[29] Wikipedia. *Banach-Tarski paradox.* http://en.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski_paradox. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[30] Wikipedia. *Buffon's needle.* https://en.wikipedia.org/wiki/Buffon's_needle. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[31] Wikipedia. *Cantor function.* https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[32] Wikipedia. *Compactness theorem.* https://en.wikipedia.org/wiki/Compactness_theorem#Applications. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[33] Wikipedia. *Construction of the real numbers.* http://en.wikipedia.org/wiki/Construction_of_the_real_numbers. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[34] Wikipedia. *Gamma functiion.* https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[35] Wikipedia. *Binomial coefficient.* https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient#Generalization_and_connection_to_the_binomial_series. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[36] Wikipedia. *Hilbert's second problem.* https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_second_problem. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[37] Wikipedia. *Möbius strip.jpg.* http://en.wikipedia.org/wiki/Moebius_strip. Página visitada el 17 de enero de 2017.

[38] Wikipedia. *Multiple integral. Some practical applications.* http://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral#Some_practical_applications. Página visitada el 16 de enero de 2017.

[39] Wikipedia. *Space-filling curve.* http://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve. Página visitada el 16 de enero de 2017.