Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

15 de junio de 2015 (Teoría)

- El 40 % de la nota del examen final se obtiene por las cuestiones y el 60 % restante se obtiene por los problemas.
- Todas las cuestiones puntúan por igual para la nota del examen final.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_3$ y $\mathbf{C}_4$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

$\mathbf{C_1}$) 1. Dar un ejemplo de un camino que no sea de clase $\mathscr{C}^1$ pero sí de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos.

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
   - *a*) La suma de un número finito de caminos de clase $\mathscr{C}^1$ también es de clase $\mathscr{C}^1$.
   - *b*) Un camino de clase $\mathscr{C}^1$ a trozos es suma de caminos de clase $\mathscr{C}^1$.

$\mathbf{C_2}$) El campo vectorial de dos variables que tiene por componentes $P = -y/(x^2+y^2)$, $Q = x/(x^2+y^2)$, ¿es conservativo? (es decir, ¿existe alguna función real f tal que $\nabla f = (P, Q)$?)

$\mathbf{C_3}$) Considérese una función acotada $f : [0,2] \times [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}$. Decir si es cierto que

1. Para que f sea integrable es condición necesaria que f sea continua.
2. f continua $\Rightarrow$ f integrable.
3. f no continua $\Rightarrow$ f no integrable.

$\mathbf{C_4}$) Considérese una superficie cilíndrica (sin las tapas), Σ, y su borde, $\partial\Sigma$. ¿Cuántas orientaciones admite la superficie y cuántas puede tener el borde? Describirlas todas.

$\mathbf{C_5}$) Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ y $W \subset \mathbb{R}^3$ conjuntos sobre los que son válidos, respectivamente, la fórmula de Green-Riemann y la fórmula de la divergencia de Gauss. ¿Existen campos vectoriales $\boldsymbol{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{G} : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tales que

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{ds}; \qquad V(W) = \frac{1}{3}\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{G}\cdot \boldsymbol{dS} \quad ?$$

Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

15 de junio de 2015 (Problemas)

- El 60 % de la nota del examen final se obtiene por los problemas y el 40 % restante se obtiene por las cuestiones.
- La puntuación de cada problema o parte de problema aparece junto a su enunciado.
- El problema $\mathbf{P}_2$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- El problema $\mathbf{P}_3$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

$\mathbf{P_1}$ Sea C la frontera de la región D de $\mathbb{R}^2$ limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Elegir una orientación para la curva C y calcular $\int_{C^+} y^2\,dx + x\,dy$.

$\mathbf{P_2}$ Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ determinada por las condiciones

$$x^2 + y^2 \geq 1, \quad 0 \leq y \leq x \leq 1.$$

Calcular $\iint_D xy\,dA$.

$\mathbf{P_3}$ Sea Σ la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, siendo la orientación de Σ la de las normales hacia adentro. Consideremos el campo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (1 + z + xy)\boldsymbol{k}$. Calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$.

$\mathbf{P_4}$ Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$. Sea $\boldsymbol{F}$ el campo definido por $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y^3 + z^3)\boldsymbol{i} + (x^4 - z^4)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Calcular $\iint_{\partial W^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, considerando en ∂W^+ la orientación de las normales exteriores.

Entregar los cuatro problemas en hojas distintas.