CÁLCULO INTEGRAL

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

EXAMEN FINAL, 6 DE SEPTIEMBRE DE 2017

Teoría, 40 % de la nota del examen
Todas las cuestiones valen lo mismo

RESPONDER DE FORMA RAZONADA A LAS SIGUIENTES CUESTIONES

C$_1$) De una función acotada $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ sabemos que es continua en todos los puntos de $[a,b] \times [c,d]$ menos en los que están en la imagen de un cierta función continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow [a,b] \times [c,d]$. ¿Podemos concluir que f es integrable Riemann?

C$_2$) Utilizando el teorema del cambio de variable para integrales triples y las propiedades de simetría de la función a integrar, demostrar (sin calcular una integral reiterada) que

$$\iiint_W \frac{x-y}{\sqrt{x^4+y^4+z+1}}\, dx\, dy\, dz = 0,$$

donde $W = [1,2]^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x,y,z \le 2\}$.

C$_3$) Considérense dos superficies distintas, Σ_1 y Σ_2, que estén dotadas de una orientación. Y un campo vectorial, $\boldsymbol{F}$, que sea de clase $\mathscr{C}^1$ y que esté definido sobre ambas superficies. Dar condiciones sobre las dos superficies que permitan garantizar que

$$\iint_{\Sigma_1^+} \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \pm \iint_{\Sigma_2^+} \boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

C$_4$) Supóngase que $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$ y que está definido sobre una región tridimensional que contiene a una curva simple orientada C^+ y a una superficie definida explícitamente y orientada Σ^+. Si $\boldsymbol{F}$ es tangente a la superficie en cada uno de los puntos de la misma, ¿puede asegurarse que $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$? Y si $\boldsymbol{F}$ es tangente a la curva C en cada punto regular de C, ¿puede asegurarse que $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$?

C$_5$) Rellenar los límites de integración que faltan en la siguiente igualdad:

$$\int_0^6 \int_0^{3-\frac{1}{2}z} \int_0^{2-\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}y} dx\, dy\, dz = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} dz\, dy\, dx.$$

CÁLCULO INTEGRAL

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

EXAMEN FINAL, 6 DE SEPTIEMBRE DE 2017

Problemas, 60 % de la nota del examen
Todos los problemas valen lo mismo

ENTREGAR CADA PROBLEMA POR SEPARADO

$\mathbf{P_1}$) Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por las rectas

$$x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = x.$$

Sea $\boldsymbol{F}$ el campo en $\mathbb{R}^2$ definido por $\boldsymbol{F}(x, y) = ye^x\boldsymbol{i} + xe^y\boldsymbol{j}$. Elegir una orientación positiva para ∂D y calcular $\int_{\partial D^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.

$\mathbf{P_2}$) Sea D la región del primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ encerrada por la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Calcular

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}\, dA.$$

$\mathbf{P_3}$) Calcular el volumen del sólido $W \subset \mathbb{R}^3$ limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ (inferiormente) y el plano $z = 2y$ (superiormente).

$\mathbf{P_4}$) Sea Σ la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Sea $\boldsymbol{F}$ el campo en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = 3x^2\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 8z\boldsymbol{k}.$$

Elegir una orientación postiva para la superficie Σ y calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$.