Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

18 de junio de 2010 (Teoría)

- Todas las cuestiones puntúan por igual.
- El 40 % de la nota del examen final se obtiene por las cuestiones y el 60 % restante se obtiene por los problemas.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

C_1 De una función de tres variables $f(x, y, z)$ se sabe que está acotada, que es discontinua en todos los puntos del plano $x+y+z = 1$ y que es continua en los demás puntos de $\mathbb{R}^3$. ¿Puede asegurarse que es integrable sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$?

C_2 ¿Para qué tipos de funciones sirven las integrales impropias?

C_3 Considérese el cono $0 \leq z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5$. ¿Puede ponerse como imagen de alguna parametrización $\mathbf{\Phi}$ que sea de clase $\mathcal{C}^1$? (Si la respuesta es que sí, dar una parametrización de ese tipo. Y si es que no, decir por qué.)

C_4 Sea Σ una superficie que no admite ninguna orientación. ¿Tiene sentido plantearse calcular el área de Σ? ¿Tiene sentido plantearse calcular el flujo de un campo vectorial a través de Σ?

C_5 ¿En qué sentido el Teorema de Stokes es una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo y del Teorema de Riemann-Green?

Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

18 de junio de 2010 (Problemas)

- Todos los problemas puntúan por igual.
- El 60 % de la nota del examen final se obtiene por los problemas y el 40 % restante se obtiene por las cuestiones.

P$_1$ Hallar el volumen del "helado de cucurucho" W definido por las desigualdades

$$x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{5}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, \qquad z \geq 0$$

P$_2$ Evaluar $\int_{\mathbf{c}} y\, dx + (3y^3 - x)\, dy + z\, dz$ para cada una de las trayectorias $\mathbf{c}(t) = (t, t^n, 1)$, $0 \leq t \leq 1$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$.

P$_3$ Llueve bajo la acción de un fuerte viento de manera que el agua cae con un ángulo de 45°. La velocidad de caída del agua se describe mediante el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (-1, 0, -1)$. Hallar el flujo total de este campo a través del cono

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Interpretar el signo del resultado.

P$_4$ Calcular $\iint_{\Sigma^+} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = (-y, -z, -x)$ y Σ^+ es la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$, con la orientación hacia abajo.