Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

18 de junio de 2012 (Teoría)

- El 40 % de la nota del examen final se obtiene por las cuestiones y el 60 % restante se obtiene por los problemas.
- Todas las cuestiones puntúan por igual para la nota del examen final.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- Las cuestiones $\mathbf{C}_3$ y $\mathbf{C}_4$ se utilizan además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

$\mathbf{C_1}$ Considérese una función de tres variables que es acotada y está definida sobre la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 4$. Se sabe que es continua en todos los puntos menos en los del plano $x+y+z=1$ (en los puntos de ese plano no se sabe si es continua o no). ¿Puede asegurarse que es integrable?

$\mathbf{C_2}$ Explicar por qué se puede extender la aplicación de la fórmula de Riemann-Green a la corona circular

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 6\},$$

si primeramente se ha demostrado que es aplicable a todos los conjuntos que sean región simple en ambas direcciones.

$\mathbf{C_3}$ Sean una superficie orientada (con normal unitaria continua $\boldsymbol{N}$) y un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ definido sobre ella. Dar una fórmula que convierta la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre la superficie orientada en otra integral de un campo escalar sobre la misma superficie sin orientar.

$\mathbf{C_4}$ Al cambiar la orientación de una superficie, ¿cambia el signo del valor de la integral de un campo vectorial sobre la misma?; ¿y el signo del valor de la integral de un campo escalar sobre la superficie?

$\mathbf{C_5}$ Considérese la integral sobre una esfera orientada de un campo vectorial que sea el rotacional de otro campo de clase $\mathcal{C}^2$. Explicar por qué esa integral es necesariamente nula (utilizar el teorema de Stokes o el teorema de la Divergencia, a elegir).

Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

18 de junio de 2012 (Problemas)

- El 60 % de la nota del examen final se obtiene por los problemas y el 40 % restante se obtiene por las cuestiones.
- Todos los problemas puntúan por igual para la nota del examen final.
- El problema $\mathbf{P}_1$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del primer bloque.
- El problema $\mathbf{P}_2$ se utiliza además para recuperar, en su caso, la nota obtenida durante el curso en el examen del segundo bloque.

$\mathbf{P_1}$ Sea D la superficie de $\mathbb{R}^2$ encerrada por el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(2,1)$. Calcular $\iint_D y\,dA$.

$\mathbf{P_2}$ Hallar el volumen encerrado por el cono $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$ y la semiesfera $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$, $z \leq 1$.

$\mathbf{P_3}$ Sea Σ^+ la superficie cilíndrica definida por

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 1 \leq z \leq 4,$$

con la orientación de las normales hacia afuera. Consideremos el campo vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (\sqrt{z} - yz^3)\boldsymbol{i} + (x\sqrt{z} + yz)\boldsymbol{j} + (x^2y\sqrt{z})\boldsymbol{k}$. Calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$.

Entregar cada problema en una hoja distinta.