Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

6 de septiembre de 2011 (Teoría)

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

C_1 Tómamos una función definida sobre el intervalo $[0,1]$, de la que sabemos que está acotada y que es discontinua en todos los puntos racionales, pero continua en todos los irracionales (funciones como ésta existen, por raro que resulte). ¿Podemos asegurar que la función es integrable?

C_2 Si f es una función $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada, poner los límites de integración que faltan en la segunda integral reiterada:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_{x^2+y^2}^2 f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int \left(\int f(x,y,z)\, dy \right) dx \right) dz.$$

C_3

1. Sobre una circunferencia en $\mathbb{R}^3$ tomamos n puntos y medimos la suma de las longitudes de los segmentos que unen los puntos consecutivos, lo que da lugar a una poligonal que "se aproxima" a la circunferencia. A continuación pasamos al límite cuando n tiende a infinito, con la única condición de que, al variar n, la longitud máxima de los lados de las poligonales tienda a cero. ¿Podemos estar seguros de que la longitud de la poligonal tiende a la longitud de la circunferencia?
2. Sobre un cilindro en $\mathbb{R}^3$ tomamos n puntos y utilizándolos como vértices formamos una red de triángulos, es decir, un poliedro de caras triangulares que "se aproxima" al cilindro. Calculamos el área del poliedro sumando las áreas de los triángulos que forman sus caras y pasamos al límite cuando n tiende a infinito, con la única condición de que, al variar n, el máximo lado de todos los triángulos tienda a cero. ¿Podemos estar seguros de que el área del poliedro tiende al área del cilindro?

C_4 Al cambiar la orientación de una curva cerrada simple, ¿cambia el signo del valor de la integral de un campo vectorial sobre la misma?; ¿y el signo del valor de la integral de un campo escalar sobre la curva?

C_5 Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial definido sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ y de clase $\mathcal{C}^1$. Entre las propiedades siguientes, ¿qué implicaciones hay?

1. $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de algún campo.
2. El rotacional de $\boldsymbol{F}$ es nulo.
3. La integral de $\boldsymbol{F}$ sobre cualquier curva cerrada que no pase por el origen es nula.

Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

6 de septiembre de 2011 (Problemas)

$\mathbf{P_1}$ Calcular el volumen encerrado en el primer octante por los paraboloides

$$z = 2x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad z = 9 - x^2 - 2y^2.$$

$\mathbf{P_2}$ Sea Σ^+ la superficie definida por

$$x + y + z = 1, \quad x^2 + y^2 \leq 4,$$

con la orientación de las normales hacia abajo. Calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, siendo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$.

$\mathbf{P_3}$ Sea Σ^+ la semiesfera $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$, con la orientación de las normales hacia arriba. Sea $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial definido por

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = y^2 x\boldsymbol{i} + x^2 y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

(a) Probar que $\boldsymbol{F}$ es un campo conservativo.

(b) Aplicando (a), y sin hacer cálculos, decir cuál es el valor de $\int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.

(c) Calcular directamente $\int_{\partial\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, comprobando que se obtiene el mismo valor que en (b).

(d) Comprobar que se verifica el Teorema de Stokes para Σ y $\boldsymbol{F}$.