Recuperación del examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

6 de septiembre de 2012 (Teoría)

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

C_1 Considérese una función de dos variables que está definida sobre el círculo $x^2+y^2 \leq 10$, de radio $\sqrt{10}$. Se sabe que es continua en todos los puntos que están fuera del círculo $x^2 + y^2 \leq 5$, pero no se sabe si es continua o no en cada uno de los puntos de este círculo de radio $\sqrt{5}$. ¿Puede asegurarse que es integrable?

C_2 Sean D_1 y D_2 regiones simples en el plano. Explicar por qué, y bajo qué condiciones sobre D_1 y D_2, se puede extender la validez de la fórmula de Riemann-Green a la diferencia conjuntista $D = D_1 \backslash D_2$, suponiendo que previamente la fórmula de Riemann-Green se ha demostrado que es válida en todos los conjuntos que sean región simple en ambas direcciones.

C_3 Sea $\mathbf{\Phi}$ una parametrización de una superficie Σ y supongamos que $\mathbf{\Phi}$ es regular en un punto (u_0, v_0) de su dominio. Dar una fórmula para el plano tangente a Σ en el punto $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, explicando cómo se obtiene.

C_4 Al cambiar la orientación de una superficie, ¿cambia el signo del valor de la integral de un campo vectorial sobre la misma?; ¿y el signo del valor de la integral de un campo escalar sobre la superficie?

C_5 Sea $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ un campo vectorial $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 3\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Considérense estas dos propiedades que puede tener el campo $\boldsymbol{F}$:

1. $\boldsymbol{F}$ es el gradiente de alguna función escalar;
2. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

¿Alguna de las dos propiedades implica siempre la otra, para cualquier campo sobre este dominio D?

Recuperación del examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

6 de septiembre de 2012 (Problemas)

P₁ Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por las curvas $y = x$, $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$. Calcular $\iint_D (y^2 - x)\, dA$ de las dos formas siguientes:

(a) Directamente.

(b) Aplicando el Teorema de Riemann-Green. Comprobar que se obtiene el mismo resultado que en (a).

P₂ Integrar $x^2 + y^2 + 2z$ sobre la región W de $\mathbb{R}^3$ encerrada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 3$.

P₃ Sea C la curva determinada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $2x - 3y + z - 1 = 0$. Elegir una de las dos posibles orientaciones de C como orientación positiva. Consideremos el campo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 5y^3\, \boldsymbol{i} - 5x^3\, \boldsymbol{j} + z^7\, \boldsymbol{k}$. Calcular $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$. **Sugerencia:** Aplicar el Teorema de Stokes.

Entregar cada problema en una hoja distinta.