Cálculo numérico I. Grado en Matemáticas.

Hoja 1 de Problemas

1. Dada la ecuación $e^x \ln x + x^3 - 2 = 0$ se pide:

   a) Demostrar que la ecuación tiene una única raíz y obtener un intervalo de acotación de la raíz.

   b) Obtener la raíz con dos dígitos exactos mediante bisección.

   c) Determinar un intervalo para el que el método de Newton converge para cualquier valor inicial en ese intervalo.

   d) Determinar experimentalmente el orden de convergencia y la constante asintótica del error para cada uno de estos tres métodos. Comparar con la predicción teórica.

2. Dada la ecuación $x + e^{-Bx^2} \cos x = 0$, $B > 0$, acotar su raíz en un intervalo. Utilizando como valor inicial $x_0 = 0$, estudiar la convergencia del método de Newton según se vayan considerando mayores valores de B (probar, por ejemplo, con $B = 1, 2, 5, 10$).

3. Sea α una raíz de $f(x) = 0$ con grado de multiplicidad $k > 1$.

   a) Demostrar que si el método de Newton aplicado sobre $f(x)$ converge, lo hace linealmente. Calcular la constante asintótica del error.

   b) Comprobar que el método de Newton aplicado a la función $h(x) = f(x)/f'(x)$ da lugar a un método cuya convergencia es cuadrática. Comentar las posibles ventajas e inconvenientes de este nuevo método.

4. Para obtener una raíz simple de la ecuación $f(x) = 0$ consideramos el siguiente algoritmo iterativo: dado x_n, construimos la aproximación de $f(x)$ mediante el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x = x_n$; denotemos este polinomio por $P_2(x)$. Resolvemos la ecuación cuadrática $P_2(x) = 0$ y tomamos como x_{n+1} la raíz más próxima a x_n.

   Comprobar que ese método se puede escribir

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2\dfrac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}}}$$

   Si linearizamos la raíz cuadrada utilizando la aproximación $\sqrt{1+z} \simeq 1 + z/2$ (lo que tiene sentido porque f es pequeña cerca de un cero), comprobar que el anterior método se puede aproximar por:

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left(1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\right)^{-1}$$

   que se conoce como *método de Halley*. Comprobar que tiene el mismo orden que el anterior método. ¿Cuál es ese orden?.

   Sugerir una función (elemental) para las que el método de Halley sea claramente más eficiente que el de Newton y otra para la que no se advierta diferencia.

5. Un segmento rectilíneo de longitud L se deforma hasta adquirir una longitud $L + \Delta$ ($\Delta << L$). Suponiendo que, tras deformarse, el segmento adquiere forma de arco perfectamente circular, ¿cuál es la distancia entre el punto central del arco y el punto medio de la recta que une los extremos del arco?.

   Diseñar un método numérico para obtener esta distancia sin que se pierda precisión (por muy pequeño que sea Δ/L).

6. Para cada una de las siguientes ecuaciones, se pide encontrar una función de iteración y un intervalo I tales que se cumplan las hipótesis del teorema del punto fijo, de modo que el método converja $\forall x_0 \in I$:

a) $x^3 - x - 1 = 0$.

b) $x - \tan x = 0$, para la menor raíz positiva. Repetir para la tercer raíz positiva.

c) $e^{-x} - \cos x = 0$, para la menor raíz positiva.

7. La ecuación $e^x - 4x^2 = 0$ tiene una solución en $[4, 5]$ y otra en $[0, 1]$. Estudiar la convergencia de la iteración $g(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$ a cada una de esta raíces, proponiendo una alternativa en caso de que no resulte ser convergente.

8. Sea $y(x)$ una solución de una ecuación diferencial $y'' + A(x)y = 0$ con $A(x) > 0$ y sea α tal que $y(\alpha) = 0$. Dada la iteración de punto fijo

$$g(x) = x - \frac{1}{\sqrt{A(x)}} \arctan\left(\sqrt{A(x)}\,y(x)/y'(x)\right) ,$$

demostrar que existe un entorno de α, U, tal que la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$ converge a α para todo $x_0 \in U$.

Obtener el orden de convergencia del método.