Cálculo numérico I

Hoja 3 de Problemas

1. Obtener el grado de precisión de la siguiente regla de cuadratura:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{2}{3}\left(f(-\sqrt{2}/2) + f(0) + f(\sqrt{2}/2)\right)$$

2. Obtener el valor del espaciado entre nodos, h, para evaluar la integral

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x}dx$$

con un error absoluto mejor que 0.01 mediante la regla trapezoidal compuesta; evaluar la integral para este h y comparar con el resultado exacto.

Repetir el problema aplicando la regla de Simpson compuesta.

3. Dada $f(x)$ un función suficientemente derivable con continuidad en $[a, b]$, sea $P(x)$ el polinomio de menor grado verificando las condiciones de interpolación:

$$P(a) = f(a)\,, P'(a) = f'(a)\,, P(b) = f(b)\,, P'(b) = f'(b) \tag{1}$$

demostrar que la regla de cuadratura consistente en considerar

$$I(f) \equiv \int_{a}^{b} f(x)dx \approx \int_{a}^{b} P(x)dx \equiv Q(f) \tag{2}$$

se escribe

$$Q(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{h^2}{12}(f'(a) - f'(b)) \tag{3}$$

donde $h = b - a$. Encontrar una expresión para el error de esta regla de cuadratura, $E(f)$.

4. Deducir la regla de cuadratura de Gauss-Legendre con 3 nodos. Aplicarla al cálculo de

$$\int_{0}^{1} \frac{sin(x)}{1+x}dx$$

y comparar con el resultado "exacto": 0.2842269855

5. Obtener x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 y w_3 para que la regla de cuadratura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-x^2}dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

tenga el mayor *grado de precisión* posible. Aplicar esta regla de cuadratura a la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{1+x^2}e^{-x^2}dx$$

y acotar el error teniendo en cuenta que $\max_{x\in(-\infty,\infty)} |f^{(6)}(x)| = 45$ para $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.