Física Estadística

Tercer curso del Grado en Física

J. Largo & J.R. Solana

largoju at unican.es solanajr at unican.es

Departamento de Física Aplicada
Universidad de Cantabria

Indice I

Gas de fotones en equilibrio

Densidad de estados cuánticos

La radiación está constituida por fotones de energía

$$\varepsilon = h\nu$$

Los fotones no interaccionan entre sí, aunque pueden interaccionar con la materia$\rightarrow$ gas ideal cuántico de Bose-Einstein.

Los fotones no tienen masa en reposo y por tanto no se conserva su número N $\mu = 0$ ya que el multiplicador de Lagrange α surge de la condición de conservación del número de partículas.

$$\alpha = -\mu/kT = 0$$

La expresión del número de partículas

$$N = \sum_j \bar{n}_j = \sum_j \frac{ze^{-\beta\varepsilon_j}}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_j}} = \sum_j \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_j} - 1}$$

donde $\bar{n}_j$ es el número medio de ocupación de un estado cuántico de energía ε_j:

$$\bar{n}_j = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_j} - 1}$$

Los fotones tienen spin 1, de manera que la degeneración de un estado cuántico debería ser 3, sin embargo, la condición de transversalidad del campo electromagnético reduce el número de estados de spin independientes a 2, que se corresponden a los dos estados posibles de polarización de una onda electromagnética, de manera que $g = 2$.

Determinar la densidad de estados cuánticos $D(\nu)$.

1. Se obtiene como para los fonones
2. En lugar de los tres modos independientes, 2.
3. c es aquí la velocidad de la luz.
4. No existe limitación en cuanto a la longitud de onda

$$g\frac{d^3V_q d^3V_p}{h^3} = 2\frac{4\pi V p^2 dp}{h^3}$$

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

$$D(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2$$

Función de partición

y propiedades termodinámicas

La función de partición macrocanónica del gas de fotones

$$\Xi = Q = \prod_j \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_j}} = \prod_j \frac{1}{1-e^{-h\nu_j/kT}}$$

$$\ln Q = -\sum_j \ln\left(1-e^{-h\nu_j/kT}\right)$$

Pasando a formulación continuo:

$$\ln Q = -\int_0^\infty D(\nu)\ln\left[1-e^{-h\nu/kT}\right]d\nu =$$

$$= -\frac{8\pi V}{c^3}\int_0^\infty \nu^2 \ln\left[1-e^{-h\nu/kT}\right]d\nu$$

Función de partición

y propiedades termodinámicas

Haciendo el cambio de variable $x = h\nu/kT$

$$\ln Q = -\frac{8\pi V}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^3 \int_0^\infty x^2 \ln\left(1 - e^{-x}\right) dx$$

y si integramos por partes

$$\ln Q = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{1}{3}\left(\frac{kT}{h}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$\ln Q = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{\pi^4}{45}\left(\frac{kT}{h}\right)^3$$

Función de partición
y propiedades termodinámicas

$$F = -kT \ln Q = -8\pi^5 V \frac{(kT)^4}{45\,(hc)^3} = -\frac{4\sigma}{3c} V T^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$$

σ es la constante de Stefan-Boltzmann.

Ley de distribución de Planck

El número de fotones con frecuencias comprendidas entre ν y $\nu + d\nu$ es:

$$dN(\nu, T) = D(\nu)\,\overline{n}\,d\nu = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$D(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 \quad y \quad \bar{n}_j = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_j} - 1}$$

el número total de fotones por unidad de volumen

$$\rho = \frac{N(T)}{V} = 8\pi \left(\frac{kT}{c\,h}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx =$$

$$= 8\pi \left(\frac{kT}{c\,h}\right)^3 2!\zeta(3)$$

$$\rho(T) \approx 0,244 \left(\frac{2\pi kT}{hc}\right)^3$$

$$\lim_{T\to 0} \rho = 0$$

Ley de distribución de Planck

La distribución espectral de energía en la cavidad

$$dU(\nu,T) = h\nu dN(\nu,T) = \frac{8\pi h\nu^3 V d\nu}{c^3\left[e^{h\nu/kT}-1\right]}$$

$\frac{dU(\nu,T)}{d\nu}$ es la densidad espectral de energía.

La densidad espectral de energía específica

$$u(\nu,T) = \frac{dU(\nu,T)}{V d\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3\left[e^{h\nu/kT}-1\right]}$$

Ley de distribución de Planck

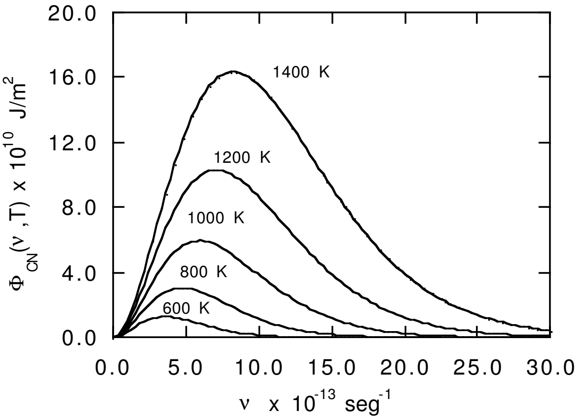
El flujo monocromático del cuerpo negro, es decir la energía por unidad de superficie, por unidad de tiempo y por unidad de intervalo de frecuencias emitida por un cuerpo negro en un hemisferio, se define mediante la relación:

$$\Phi_{CN}(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T) = \frac{C_1 \nu^3}{c^4 \left[e^{h\nu/kT} - 1 \right]}$$

que es la ley de distribución de Planck en la que:

$$C_1 = 2\pi h c^2$$

El flujo monocromático de un cuerpo negro



Ley de distribución de Planck

La ley de distribución de Planck en términos de la longitud de onda

$$\Phi_{CN}(\lambda, T)\, d\lambda = -\Phi_{CN}(\nu, T)\, d\nu = \Phi_{CN}(\nu, T)\, \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

con lo cual resulta:

$$\Phi_{CN}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[e^{c_2/\lambda T} - 1\right]}$$

siendo $c_2 = hc/k$.

Ley de desplazamiento de Wienn

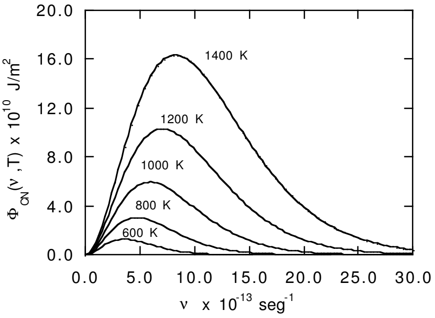


Figura: Flujo monocromático de la radiación del cuerpo negro, se observa que cada isoterma presenta un máximo que se desplaza progresivamente en la dirección de las altas frecuencias, a medida que aumenta la temperatura.

Ley de desplazamiento de Wienn

Para determinar la posición del máximo en función de la temperatura, impondremos la condición de máximo

$$d\Phi_{CN}(\nu, T)|_{\nu=\nu_m} = 0 \quad o \quad d\Phi_{CN}(\lambda, T)|_{\lambda=\lambda_m} = 0$$

según el caso, con el resultado:

$$x_{\text{máx}} = \frac{h\nu_{\text{máx}}}{kT} = 2,821439$$

$$\lambda_{\text{máx}} T = 0,289788\text{m K}$$

ley de desplazamiento de Wien. Es preciso resaltar que las distribuciones $\Phi_{CN}(\nu, T)$ y $\Phi_{CN}(\lambda, T)$ no son idénticas, de manera que sus respectivos máximos no se corresponden el uno con el otro.

Ley de Stefan-Boltzmann

El flujo total hemisférico del cuerpo negro es:

$$\Phi_{CN}(T) = \int_0^\infty \Phi_{CN}(\nu, T)\, d\nu =$$

$$= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 3!\zeta(4)$$

con $\zeta(4) = \pi^4/90$

$$\Phi_{CN}(T) = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4$$

que es la ley de Stefan-Boltzmann.