Cuestiones de Álgebra Lineal

Algunas de las cuestiones que aparecen en esta relación están pensadas para ser introducidas en un plataforma interactiva de aprendizaje de modo que los parámetros a, b que aparecen en el enunciado son convertidos en números enteros, adecuados al enunciado y entre -9 y 9, de modo que la respuesta del alumno es comprobada a partir de la fórmula de solución que aparece encuadrada al final del enunciado.

1. Si tres vectores e_1, e_2, e_3 de un espacio vectorial E verifican $3e_1 + 4e_2 - e_3 = 0$; entonces, se verifica

   a) $\boxed{\text{x}}$ $\dim\langle e_1, e_2, e_3\rangle \leq 2$.
   b) $\boxed{}$ $\dim\langle e_1, e_2, e_3\rangle = 3$.
   c) $\boxed{}$ $\dim\langle e_1, e_2, e_3\rangle = 2$.

2. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y $B = \{x^2 + 1, 2x^2 - 1\}$. Entonces:

   a) $\boxed{}$ B es una base de $\mathbb{P}_2$.
   b) $\boxed{}$ B es un sistema de generadores de $\mathbb{P}_2$.
   c) $\boxed{\text{x}}$ B es un sistema de vectores linealmente independientes de $\mathbb{P}_2$.

3. Si un espacio vectorial E tiene dimensión finita, entonces:

   a) $\boxed{}$ E tiene un número finito de vectores.
   b) $\boxed{}$ E tiene un número finito de subespacios vectoriales.
   c) $\boxed{\text{x}}$ Ninguna de las anteriores.

4. Consideramos el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$. Se pide, marcar todas las afirmaciones ciertas de entre las siguientes:

   a) $\boxed{}$ Cualquier familia $\{f_1, f_2, f_3\}$ de tres vectores constituye base de $\mathbb{R}^3$.
   b) $\boxed{\text{x}}$ Si tres vectores f_1, f_2, f_3 de $\mathbb{R}^3$ verifican $4f_1 + 4f_2 - f_3 = 0$; entonces, $\dim_{\mathbb{R}}\langle f_1, f_2, f_3\rangle \leq 2$.
   c) $\boxed{\text{x}}$ Todas las bases de $\mathbb{R}^3$ tienen tres elementos.
   d) $\boxed{\text{x}}$ $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^3$.
   e) $\boxed{}$ $\mathbb{R}^3$ sólo tiene un número finito de subespacios vectoriales.
   f) $\boxed{}$ El subconjunto $H = \{(x, y, z) \colon x + y = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio vectorial.

5. En $\mathbb{R}^3$ consideramos la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ con $u_1 = (1,2,0)$ y $u_2 = (4,3,7)$. Poner en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor de la tercera componente de u_3 teniendo en cuenta que las coordenadas del vector $e = (3,2,a)$ en la base B son $(1,2,4)$.

   $\boxed{a/4 - 3.5}$

6. Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ no es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces:

   a) [x] $\{u_1, u_2, u_3\}$ no es un sistema de vectores linealmente independientes.
   b) [ ] $\{u_1, u_2, u_3\}$ se puede completar hasta formar una base de $\mathbb{R}^3$.
   c) [x] $\{u_1, u_2, u_3\}$ no es un sistema de vectores generadores.

7. Un espacio vectorial de dimensión 3, ¿puede tener un subespacio vectorial de dimensión 4?

   a) [ ] Sí.
   b) [x] No.

8. Consideramos dos subespacios H_1, H_2 de $\mathbb{R}^4$ de dimensión dos, entonces:

   a) [x] Si $H_1 + H_2 = \mathbb{R}^4$ entonces $H_1 \cap H_2 = (0)$.
   b) [ ] $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$.
   c) [ ] $\dim(H_1 + H_2) \leq 3$.

9. Sea $T \colon E \to F$ una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E, F. Entonces,

   a) [ ] $\dim E = \dim F$.
   b) [ ] $\operatorname{rango} T = \dim F$.
   c) [x] Ninguna de las anteriores.

10. Sea $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, entonces:

    a) [x] T no puede ser epiyectiva.
    b) [ ] T es inyectiva.
    c) [ ] $\dim \operatorname{Im} T = 2$.

11. Sea $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal, entonces:

    a) [x] T no es epiyectiva.
    b) [ ] Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un sistema de vectores linealmente independientes entonces también lo es $\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$.
    c) [ ] Si $T(e_1 - 3e_2 + e_3) = 0$ entonces $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un sistema de vectores linealmente dependientes.
    d) [x] Si $e_1 - 3e_2 + e_3 = 0_E$ entonces $\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ es un sistema de vectores linealmente dependientes.

12. Para $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por la igualdad $T(x,y,z) = (z-y, 3x+2y-z)$, se verifica que su matriz asociada, respecto a las bases estándar, es:

$$a)\ \square \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad b)\ \boxed{\text{x}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad c)\ \square \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}; \quad B = A^{-1}$$

Se pide calcular el elemento $(3,4)$, tercera fila cuarta columna, de la matriz B. Poner, con dos cifras decimales, la solución en el recuadro siguiente:

$\boxed{(-1-b+a)/(13+b-4a), \quad \text{siempre que } 4a-b \neq 13}$

14. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 18 \\ 9 & 10 & a \end{pmatrix}$$

y la matriz X que verifica $A \cdot X = B$. Poner en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor del elemento (2,3), segunda fila tercera columna, de la matriz X.

$\boxed{5a-54}$

15. Denotamos por P_3 el espacio real de los polinomios de grado menor o igual que 3 y por $\mathcal{S}$ el sistema

$$\mathcal{S} = \{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3\}$$

Marcar todas las afirmaciones ciertas:

a) ☐ $\mathcal{S}$ es una base y las coordenadas de x^3+1 respecto a $\mathcal{S}$ son $(1,-3,3,0)$.

b) ☐ La aplicación $\mathrm{D}\colon P_3 \to P_3$ que a cada polinomio le asigna su derivada es epiyectiva.

c) ☒ Consideramos la aplicación $T\colon P_3 \to P_3$ que a cada polinomio p le asigna $p' + 2p$, la suma de la derivada de p y del doble de p. Entonces, el sistema $T(\mathcal{S}) = \{T(1), T(x+1), T((x+1)^2), T((x+1)^3)\}$ es una base de P_3.

16. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal caracterizada por ser

$$\begin{aligned} T(1,-1,2) &= (2,1) \\ T(2,2,-1) &= (1,0) \\ T(3,3,1) &= (-3,a) \end{aligned}$$

Poner, en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor del elemento (2,2), segunda fila segunda columna, de la matriz asociada a T respecto a la base estándar.

$\boxed{(a-1)/2}$

JUSTIFICACIÓN: Las condiciones $T(1,-1,2) = (2,1)$, $T(2,2,-1) = (1,0)$, $T(3,3,1) = (-3,a)$, se pueden escribir, las tres a la vez, poniendo:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

deduciéndose, para las incógnitas y_1, y_2, y_3, el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 - y_2 + 2y_3 & = & 1 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 & = & 0 \\ 3y_1 + 3y_2 + y_3 & = & a \end{array} \right.$$

y resolviendo que $y_2 = (a-1)/2$.

17. Si A es una matriz cuadrada de orden 3 con coeficientes reales entonces:

    a) ☐ $\det(-3A) = -3\det A$.
    b) ☒ $\det(-3A) = -27\det A$.
    c) ☐ $\det(-3A) = 27\det A$.

18. ¿Es diagonalizable un endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ del que se sabe que $C_T(x) = x^2(x-1)(x-3)$ es su polinomio característico y que $\dim \operatorname{Ker} T = 2$?.

    a) ☒ Sí.
    b) ☐ No.
    c) ☐ Depende.

19. Si E es un espacio vectorial real y T un endomorfismo de E, entonces:

    a) ☐ 0 es un valor propio de T.
    b) ☒ Si 0 es valor propio de T entonces T no es inyectivo.
    c) ☐ Si T es inyectivo entonces 0 es un valor propio de T.

20. Consideramos P_4 el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que cuatro y el endomorfismo $T\colon P_4 \to P_4$ definido por la igualdad $T(p(x)) = x \cdot \dfrac{d}{dx}(p(x))$
    Marcar todas las afirmaciones ciertas:

    a) ☒ T es diagonalizable.
    b) ☐ $\det T = 0$.
    c) ☒ T es un isomorfismo.
    d) ☐ $\operatorname{Im} T = P_3$, para P_3 los polinomios de grado menor o igual que tres.

21. De un endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sabemos:

a) $\ker T$ es el espacio vectorial de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x-y & = & 0 \end{array}\right.$$

b) $(1,0,1)$ y $(2,1,a)$ son vectores propios de valores propios 1 y b respectivamente.

Poner, en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor del elemento (1,2), primera fila segunda columna, de la matriz asociada a T respecto a la base estándar

$\boxed{(-(a+6)/2+4b)/a}$

JUSTIFICACIÓN: Se tiene $\operatorname{Ker} T = \langle (1,2,-3) \rangle$. Ahora, las condiciones del enunciado se pueden escribir

$$T\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot(b) & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & (a)\cdot(b) & 0 \end{pmatrix}$$

ya que las condiciones equivalen a que el transformado por T de la i-ésima columna de la primera matriz escrita en la igualdad anterior sea igual a la i-ésima columna de la segunda matriz.

Si denotamos (t_1,t_2,t_3) a la primera fila de la matriz de T, de la igualdad anterior, se deduce el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} t_1+t_3 & = & 1 \\ 2t_1+t_2+(a)\cdot t_3 & = & 2\cdot(b) \\ t_1+2t_2-3t_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

resolviendo se deduce que $t_2 = (-(a+b)/2+4b)/a$.

22. Denotamos por $C(x) = \det(x\operatorname{Id}-T) = x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$ al polinomio característico del endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto a la matriz estándar es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ b & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Poner, en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor del coeficiente c_1 del polinomio $C(x)$.

$\boxed{-2a-5+2b}$

23. De un endomorfismo $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sabemos que $C(x) = x^3-5x^2+6x$ es su polinomio característico. Marcar todas las afirmaciones correctas que se deducen de lo anterior:

a) [x] Los valores propios del endomorfismo $(1/3)\cdot T$ son $0, 1$ y $2/3$.

b) [ ] T no es diagonalizable.

c) [ ] T es un isomorfismo.

d) [x] El núcleo de T contiene un vector distinto de cero.

Justificación: De la igualdad $C(x) = x(x-3)(x-2)$ se deduce:

a) $\operatorname{Ker} T = V(0)$ es un espacio vectorial distinto del cero y, por tanto, que la afirmación cuarta es cierta.

b) Si e es un vector propio de T de valor propio λ entonces $[(1/3)\cdot T](e) = (\lambda/3)e$ de donde se deduce que si λ es un valor propio de T entonces $\lambda/3$ lo es de $(1/3)\cdot T$. De aquí se deduce que la primera afirmación del enunciado es cierta ya que $0, 3, 2$ son los valores propios de T.

c) T es diagonalizable porque todas las raíces de $C(x)$ son reales y distintas.

d) $\det T = -C(0) = 0$ y, por tanto, T no es un isomorfismo.

24. ¿Existe algún sistema lineal de ecuaciones con coeficientes reales que tenga exactamente dos soluciones?.

    a) ☐ Sí.
    b) ☒ No.

25. Se consideran los sistemas de ecuaciones $Ax = B_1$ y $Ax = B_2$, donde el primero es incompatible y el segundo es compatible determinado, entonces siendo $B = B_1 + B_2$, el sistema $Ax = B$ es:

    a) ☐ Homogéneo.
    b) ☐ Compatible indeterminado.
    c) ☒ Incompatible.

26. Sea $Ax = B$ un sistema lineal incompatible de 5 ecuaciones con 4 incógnitas del que sabemos que rango $A = 4$. Entonces:

    a) ☐ A es una matriz cuadrada.
    b) ☐ Existe $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ de modo que $Ax = B$.
    c) ☒ Si A^* es la matriz ampliada del sistema $Ax = B$ entonces rango $A^* = 5$.

27. El siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & b \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 3 \end{cases}$$

posee una única solución $s = (s_1, s_2, s_3)$. Se pide calcular el valor de la expresión $s_1 + s_2 - 2s_3$ y ponerlo, con dos cifras decimales, en el recuadro siguiente:

$\boxed{b-3}$

28. El siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 7.09x_1 + 1.17x_2 - 2.23x_3 & = & -4.75 \\ 0.43x_1 + 1.4x_2 - 0.62x_3 & = & -1.05 \\ 3.21x_1 - 4.25x_2 + 2.13x_3 & = & a \end{cases}$$

posee una única solución $s = (s_1, s_2, s_3)$. Se pide poner, con dos cifras decimales, en el siguiente recuadro el valor de s_3.

$\boxed{0.7161870323a - 0.4222443524}$

29. El siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2.1x_2 + 3x_3 & = & 4 \\ x_2 - 1.41x_3 & = & a \\ -x_1 + 1.3x_2 - 2.52x_3 & = & b \end{array}\right.$$

posee una única solución $s = (s_1, s_2, s_3)$. Se pide calcular el valor de s_3 y ponerlo, con dos cifras decimales, en el recuadro siguiente:

$\boxed{0.758437 - 0.644671a + 0.18960094b}$

30. Sea $\langle u, v\rangle$, $u \neq 0$, un subespacio de dimensión uno del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

   a) [x] Si $w \in \mathbb{R}^3$ es perpendicular a u, entonces es perpendicular a v.
   b) [ ] Si $w \in \mathbb{R}^3$ es perpendicular a u, entonces $\{u, v, w\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$.
   c) [ ] Ninguna de las anteriores.

31. En $\mathbb{R}^2$ consideramos una métrica $*$ que verifica $e_1 * e_1 = e_2 * e_2 = 0$ para $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. De ello se deduce:

   a) [ ] $*$ es la métrica cero.
   b) [x] No es una métrica euclídea.
   c) [ ] e_1 y e_2 son vectores perpendiculares.

32. De un tetraedro $OABC$ sabemos que la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ del espacio vectorial definida por la igualdades

$$e_1 = \overrightarrow{OA}; \quad e_2 = \overrightarrow{OB}; \quad e_3 = \overrightarrow{OC}$$

verifica que la matriz G del producto escalar en la base $\mathcal{B}$ está dada por la igualdad

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Marcar las afirmaciones ciertas que se deducen de lo anterior:

   a) [ ] $OABC$ es una tetraedro regular cuyas aristas miden 4 unidades de longitud.
   b) [ ] El ángulo formado entre las caras OAB y OAC es de 60^o.
   c) [x] El vector $e_1 + e_2 - 3e_3$ es normal a la cara OAB.
   d) [x] Los segmentos OA y BC son perpendiculares.

33. En MAPLE realizamos la sesión que aparece reflejada a continuación

```
>with(linalg):
> M:=matrix(3,4,[[7,2,1,6],[2,4,3,1],[1,3,5,3]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>T:=hermite(M,x,'F'); F:=evalm(F);
```

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F := \begin{bmatrix} 11/65 & -7/65 & 2/65 \\ -7/65 & 34/65 & -19/65 \\ 2/65 & -19/65 & 24/65 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que denotamos por m_1, m_2, m_3 las tres filas de la matriz M, por t_1, t_2, t_3 las tres filas de T y por M_1, M_2, M_3, M_4 y T_1, T_2, T_3, T_4 las cuatro columnas de M y T, respectivamente.

a) [x] T_4 es la única solución del sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas cuya matriz ampliada es M.

b) [ ] El determinante de M vale 65.

c) [ ] F es la matriz inversa de M.

d) [ ] rango $M < 3$.

e) [x] $t_1 = \frac{1}{65} \cdot (11m_1 - 7m_2 + 2m_3)$, $t_2 = \frac{1}{65} \cdot (-7m_1 + 34m_2 - 19m_3)$, $t_3 = \frac{1}{65} \cdot (2m_1 - 19m_2 + 24m_3)$.

f) [x] $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle = \langle t_1, t_2, t_3 \rangle$.

Justificación: Se tiene

$$F \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$