

Cuestiones de Álgebra Lineal

Algunas de las cuestiones que aparecen en esta relación están pensadas para ser introducidas en un plataforma interactiva de aprendizaje de modo que los parámetros a, b que aparecen en el enunciado son convertidos en números enteros, adecuados al enunciado y entre -9 y 9 , de modo que la respuesta del alumno es comprobada a partir de la fórmula de solución que aparece encuadrada al final del enunciado.

1. Si tres vectores e_1, e_2, e_3 de un espacio vectorial E verifican $3e_1 + 4e_2 - e_3 = 0$; entonces, se verifica
 - a) $\dim\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \leq 2$.
 - b) $\dim\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = 3$.
 - c) $\dim\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = 2$.
2. Sea \mathbb{P}_2 el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y $B = \{x^2 + 1, 2x^2 - 1\}$. Entonces:
 - a) B es una base de \mathbb{P}_2 .
 - b) B es un sistema de generadores de \mathbb{P}_2 .
 - c) B es un sistema de vectores linealmente independientes de \mathbb{P}_2 .
3. Si un espacio vectorial E tiene dimensión finita, entonces:
 - a) E tiene un número finito de vectores.
 - b) E tiene un número finito de subespacios vectoriales.
 - c) Ninguna de las anteriores.
4. Consideramos el espacio vectorial real \mathbb{R}^3 . Se pide, marcar todas las afirmaciones ciertas de entre las siguientes:
 - a) Cualquier familia $\{f_1, f_2, f_3\}$ de tres vectores constituye base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Si tres vectores f_1, f_2, f_3 de \mathbb{R}^3 verifican $4f_1 + 4f_2 - f_3 = 0$; entonces, $\dim_{\mathbb{R}}\langle f_1, f_2, f_3 \rangle \leq 2$.
 - c) Todas las bases de \mathbb{R}^3 tienen tres elementos.
 - d) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ constituye una base de \mathbb{R}^3 .
 - e) \mathbb{R}^3 sólo tiene un número finito de subespacios vectoriales.
 - f) El subconjunto $H = \{(x, y, z) : x + y = 1\}$ de \mathbb{R}^3 es un subespacio vectorial.

5. En \mathbb{R}^3 consideramos la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ con $u_1 = (1, 2, 0)$ y $u_2 = (4, 3, 7)$. Poner en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor de la tercera componente de u_3 teniendo en cuenta que las coordenadas del vector $e = (3, 2, a)$ en la base B son $(1, 2, 4)$.

$a/4 - 3.5$

6. Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ no es una base de \mathbb{R}^3 , entonces:
- a) $\{u_1, u_2, u_3\}$ no es un sistema de vectores linealmente independientes.
 - b) $\{u_1, u_2, u_3\}$ se puede completar hasta formar una base de \mathbb{R}^3 .
 - c) $\{u_1, u_2, u_3\}$ no es un sistema de vectores generadores.
7. Un espacio vectorial de dimensión 3, ¿puede tener un subespacio vectorial de dimensión 4?
- a) Sí.
 - b) No.
8. Consideramos dos subespacios H_1, H_2 de \mathbb{R}^4 de dimensión dos, entonces:
- a) Si $H_1 + H_2 = \mathbb{R}^4$ entonces $H_1 \cap H_2 = (0)$.
 - b) $\dim(H_1 \cap H_2) = 1$.
 - c) $\dim(H_1 + H_2) \leq 3$.
9. Sea $T: E \rightarrow F$ una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E, F . Entonces,
- a) $\dim E = \dim F$.
 - b) $\text{rango } T = \dim F$.
 - c) Ninguna de las anteriores.
10. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, entonces:
- a) T no puede ser epiyectiva.
 - b) T es inyectiva.
 - c) $\dim \text{Im } T = 2$.
11. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal, entonces:
- a) T no es epiyectiva.
 - b) Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un sistema de vectores linealmente independientes entonces también lo es $\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$.
 - c) Si $T(e_1 - 3e_2 + e_3) = 0$ entonces $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un sistema de vectores linealmente dependientes.
 - d) Si $e_1 - 3e_2 + e_3 = 0_E$ entonces $\{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ es un sistema de vectores linealmente dependientes.

12. Para $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por la igualdad $T(x, y, z) = (z - y, 3x + 2y - z)$, se verifica que su matriz asociada, respecto a las bases estándar, es:

$$a) \quad \square \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad b) \quad \square \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad c) \quad \square \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 3 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}; \quad B = A^{-1}$$

Se pide calcular el elemento (3,4), tercera fila cuarta columna, de la matriz B . Poner, con dos cifras decimales, la solución en el recuadro siguiente:

$$\boxed{(-1 - b + a)/(13 + b - 4a), \text{ siempre que } 4a - b \neq 13}$$

14. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 18 \\ 9 & 10 & a \end{pmatrix}$$

y la matriz X que verifica $A \cdot X = B$. Poner en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor del elemento (2,3), segunda fila tercera columna, de la matriz X .

$$\boxed{5a - 54}$$

15. Denotamos por P_3 el espacio real de los polinomios de grado menor o igual que 3 y por \mathcal{S} el sistema

$$\mathcal{S} = \{1, x + 1, (x + 1)^2, (x + 1)^3\}$$

Marcar todas las afirmaciones ciertas:

- a) \mathcal{S} es una base y las coordenadas de $x^3 + 1$ respecto a \mathcal{S} son $(1, -3, 3, 0)$.
- b) La aplicación $D: P_3 \rightarrow P_3$ que a cada polinomio le asigna su derivada es epiyectiva.
- c) Consideramos la aplicación $T: P_3 \rightarrow P_3$ que a cada polinomio p le asigna $p' + 2p$, la suma de la derivada de p y del doble de p . Entonces, el sistema $T(\mathcal{S}) = \{T(1), T(x + 1), T((x + 1)^2), T((x + 1)^3)\}$ es una base de P_3 .

16. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal caracterizada por ser

$$\begin{aligned} T(1, -1, 2) &= (2, 1) \\ T(2, 2, -1) &= (1, 0) \\ T(3, 3, 1) &= (-3, a) \end{aligned}$$

Poner, en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor del elemento (2,2), segunda fila segunda columna, de la matriz asociada a T respecto a la base estándar.

$$\boxed{(a-1)/2}$$

JUSTIFICACIÓN: Las condiciones $T(1, -1, 2) = (2, 1)$, $T(2, 2, -1) = (1, 0)$, $T(3, 3, 1) = (-3, a)$, se pueden escribir, las tres a la vez, poniendo:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$$

deduciéndose, para las incógnitas y_1, y_2, y_3 , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 = 1 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_3 = 0 \\ 3y_1 + 3y_2 + y_3 = a \end{cases}$$

y resolviendo que $y_2 = (a-1)/2$.

17. Si A es una matriz cuadrada de orden 3 con coeficientes reales entonces:

- a) $\det(-3A) = -3 \det A$.
 b) $\det(-3A) = -27 \det A$.
 c) $\det(-3A) = 27 \det A$.

18. ¿Es diagonalizable un endomorfismo $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ del que se sabe que $C_T(x) = x^2(x-1)(x-3)$ es su polinomio característico y que $\dim \text{Ker } T = 2$?

- a) Sí.
 b) No.
 c) Depende.

19. Si E es un espacio vectorial real y T un endomorfismo de E , entonces:

- a) 0 es un valor propio de T .
 b) Si 0 es valor propio de T entonces T no es inyectivo.
 c) Si T es inyectivo entonces 0 es un valor propio de T .

20. Consideramos P_4 el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que cuatro y el endomorfismo $T: P_4 \rightarrow P_4$ definido por la igualdad $T(p(x)) = x \cdot \frac{d}{dx}(p(x))$

Marcar todas las afirmaciones ciertas:

- a) T es diagonalizable.
 b) $\det T = 0$.
 c) T es un isomorfismo.
 d) $\text{Im } T = P_3$, para P_3 los polinomios de grado menor o igual que tres.

21. De un endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sabemos:

a) $\ker T$ es el espacio vectorial de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

b) $(1, 0, 1)$ y $(2, 1, a)$ son vectores propios de valores propios 1 y b respectivamente.

Poner, en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor del elemento (1,2), primera fila segunda columna, de la matriz asociada a T respecto a la base estándar

$$\boxed{(-a + 6)/2 + 4b/a}$$

JUSTIFICACIÓN: Se tiene $\text{Ker } T = \langle (1, 2, -3) \rangle$. Ahora, las condiciones del enunciado se pueden escribir

$$T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot (b) & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & (a) \cdot (b) & 0 \end{pmatrix}$$

ya que las condiciones equivalen a que el transformado por T de la i -ésima columna de la primera matriz escrita en la igualdad anterior sea igual a la i -ésima columna de la segunda matriz.

Si denotamos (t_1, t_2, t_3) a la primera fila de la matriz de T , de la igualdad anterior, se deduce el sistema

$$\begin{cases} t_1 + t_3 = 1 \\ 2t_1 + t_2 + (a) \cdot t_3 = 2 \cdot (b) \\ t_1 + 2t_2 - 3t_3 = 0 \end{cases}$$

resolviendo se deduce que $t_2 = -(a + b)/2 + 4b/a$.

22. Denotamos por $C(x) = \det(x \text{Id} - T) = x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ al polinomio característico del endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto a la matriz estándar es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ b & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Poner, en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor del coeficiente c_1 del polinomio $C(x)$.

$$\boxed{-2a - 5 + 2b}$$

23. De un endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sabemos que $C(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ es su polinomio característico. Marcar todas las afirmaciones correctas que se deducen de lo anterior:

- a) Los valores propios del endomorfismo $(1/3) \cdot T$ son 0, 1 y $2/3$.
 b) T no es diagonalizable.
 c) T es un isomorfismo.
 d) El núcleo de T contiene un vector distinto de cero.

JUSTIFICACIÓN: De la igualdad $C(x) = x(x - 3)(x - 2)$ se deduce:

- a) $\text{Ker } T = V(0)$ es un espacio vectorial distinto del cero y, por tanto, que la afirmación cuarta es cierta.
- b) Si e es un vector propio de T de valor propio λ entonces $[(1/3) \cdot T](e) = (\lambda/3)e$ de donde se deduce que si λ es un valor propio de T entonces $\lambda/3$ lo es de $(1/3) \cdot T$. De aquí se deduce que la primera afirmación del enunciado es cierta ya que $0, 3, 2$ son los valores propios de T .
- c) T es diagonalizable porque todas las raíces de $C(x)$ son reales y distintas.
- d) $\det T = -C(0) = 0$ y, por tanto, T no es un isomorfismo.

24. ¿Existe algún sistema lineal de ecuaciones con coeficientes reales que tenga exactamente dos soluciones?.

- a) Sí.
- b) No.

25. Se consideran los sistemas de ecuaciones $Ax = B_1$ y $Ax = B_2$, donde el primero es incompatible y el segundo es compatible determinado, entonces siendo $B = B_1 + B_2$, el sistema $Ax = B$ es:

- a) Homogéneo.
- b) Compatible indeterminado.
- c) Incompatible.

26. Sea $Ax = B$ un sistema lineal incompatible de 5 ecuaciones con 4 incógnitas del que sabemos que $\text{rango } A = 4$. Entonces:

- a) A es una matriz cuadrada.
- b) Existe $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ de modo que $Ax = B$.
- c) Si A^* es la matriz ampliada del sistema $Ax = B$ entonces $\text{rango } A^* = 5$.

27. El siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & b \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 3 \end{cases}$$

posee una única solución $s = (s_1, s_2, s_3)$. Se pide calcular el valor de la expresión $s_1 + s_2 - 2s_3$ y ponerlo, con dos cifras decimales, en el recuadro siguiente:

28. El siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 7.09x_1 + 1.17x_2 - 2.23x_3 & = & -4.75 \\ 0.43x_1 + 1.4x_2 - 0.62x_3 & = & -1.05 \\ 3.21x_1 - 4.25x_2 + 2.13x_3 & = & a \end{cases}$$

posee una única solución $s = (s_1, s_2, s_3)$. Se pide poner, con dos cifras decimales, en el siguiente recuadro el valor de s_3 .

29. El siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + 2.1x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 - 1.41x_3 = a \\ -x_1 + 1.3x_2 - 2.52x_3 = b \end{cases}$$

posee una única solución $s = (s_1, s_2, s_3)$. Se pide calcular el valor de s_3 y ponerlo, con dos cifras decimales, en el recuadro siguiente:

$0.758437 - 0.644671a + 0.1896094b$

30. Sea $\langle u, v \rangle$, $u \neq 0$, un subespacio de dimensión uno del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 .

- a) Si $w \in \mathbb{R}^3$ es perpendicular a u , entonces es perpendicular a v .
 b) Si $w \in \mathbb{R}^3$ es perpendicular a u , entonces $\{u, v, w\}$ forma una base de \mathbb{R}^3 .
 c) Ninguna de las anteriores.

31. En \mathbb{R}^2 consideramos una métrica $*$ que verifica $e_1 * e_1 = e_2 * e_2 = 0$ para $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. De ello se deduce:

- a) $*$ es la métrica cero.
 b) No es una métrica euclídea.
 c) e_1 y e_2 son vectores perpendiculares.

32. De un tetraedro $OABC$ sabemos que la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ del espacio vectorial definida por la igualdades

$$e_1 = \overrightarrow{OA}; \quad e_2 = \overrightarrow{OB}; \quad e_3 = \overrightarrow{OC}$$

verifica que la matriz G del producto escalar en la base \mathcal{B} está dada por la igualdad

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Marcar las afirmaciones ciertas que se deducen de lo anterior:

- a) $OABC$ es una tetraedro regular cuyas aristas miden 4 unidades de longitud.
 b) El ángulo formado entre las caras OAB y OAC es de 60° .
 c) El vector $e_1 + e_2 - 3e_3$ es normal a la cara OAB .
 d) Los segmentos OA y BC son perpendiculares.

33. En MAPLE realizamos la sesión que aparece reflejada a continuación

>with(linalg):

> M:=matrix(3,4,[[7,2,1,6],[2,4,3,1],[1,3,5,3]]);

$$M := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

>T:=hermite(M,x,'F'); F:=evalm(F);

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F := \begin{bmatrix} 11/65 & -7/65 & 2/65 \\ -7/65 & 34/65 & -19/65 \\ 2/65 & -19/65 & 24/65 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que denotamos por m_1, m_2, m_3 las tres filas de la matriz M , por t_1, t_2, t_3 las tres filas de T y por M_1, M_2, M_3, M_4 y T_1, T_2, T_3, T_4 las cuatro columnas de M y T , respectivamente.

- a) T_4 es la única solución del sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas cuya matriz ampliada es M .
- b) El determinante de M vale 65.
- c) F es la matriz inversa de M .
- d) $\text{rango } M < 3$.
- e) $t_1 = \frac{1}{65} \cdot (11m_1 - 7m_2 + 2m_3)$, $t_2 = \frac{1}{65} \cdot (-7m_1 + 34m_2 - 19m_3)$, $t_3 = \frac{1}{65} \cdot (2m_1 - 19m_2 + 24m_3)$.
- f) $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle = \langle t_1, t_2, t_3 \rangle$.

JUSTIFICACIÓN: Se tiene

$$F \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$