Cuestiones de Análisis Matemático

Algunas de las cuestiones que aparecen en esta relación están pensadas para ser introducidas en un plataforma interactiva de aprendizaje de modo que los parámetros a, b que aparecen en el enunciado son convertidos en números enteros, adecuados al enunciado y entre -9 y 9, de modo que la respuesta del alumno es comprobada a partir de la fórmula de solución que aparece encuadrada al final del enunciado.

34. La desigualdad de números reales $|x - y| \geq |x| - |y|$

   a) ☐ Es falsa.
   b) ☒ Es cierta.
   c) ☐ Sólo es cierta si $y \leq 0$.

35. El número $1.101001000100001\ldots$ es:

   a) ☒ Irracional.
   b) ☐ Racional.

36. La suma de dos números racionales es:

   a) ☐ Irracional.
   b) ☒ Racional.
   c) ☐ Unas veces racional y otras irracional.

37. El número $1 - \sqrt{2}$ es:

   a) ☐ Racional.
   b) ☒ Irracional.
   c) ☐ Entero.

38. La suma de dos números irracionales es:

   a) ☐ Irracional.
   b) ☐ Racional.
   c) ☒ Unas veces racional y otras irracional.

39. Marcar las afirmaciones que son ciertas para el número real

$$r = \sqrt{7 + \sqrt{48}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}}$$

a) ☐ r es irracional

b) ☒ r es positivo

c) ☒ r es natural

40. Marcar las afirmaciones que son ciertas para el número real

$$r = \sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{2}}$$

a) ☐ r es irracional

b) ☒ r es positivo

c) ☒ r es natural

41. Dados los números complejos

$$z_1 = 1 + i\,; \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_3 = \frac{\overline{z_1}\cdot z_2}{2}$$

Se pide rellenar, con dos cifras decimales, los siguientes recuadros teniendo en cuenta que en el recuadro (41*a*) debe aparecer la parte real de z_3, en (41*b*) debe aparecer la parte imaginaria de z_3, en (41*c*) debe aparecer el módulo de z_3 y en (41*d*) el argumento, en grados, de z_3.

a) ☐

b) ☐

c) ☐

d) ☐

42. Dados los números complejos $z_1 = 1 + i\,, z_2 = \dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Dar en el siguiente recuadro, en grados sexagesimales y con dos dígitos decimales, la expresión del argumento del número complejo $\overline{z_1}\cdot z_2$

☐

43. La ecuación $e^z + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$:

a) ☐ No tiene ninguna solución.

b) ☒ No tiene ninguna solución real.

c) ☐ Sólo se verifica para los número complejos de módulo 1.

44. La determinación principal de $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3}$ es

a) ☐ -1.

b) ☒ $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) ☐ $1_{-\pi/6}$.

45. ¿Es equilátero el triángulo de vértices $0, z, z \cdot w$, para $w = (\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})$ y z un número complejo distinto de cero?

   a) $\boxed{\text{x}}$ Sí.
   b) $\boxed{}$ No.
   c) $\boxed{}$ Depende del valor de z.

46. La función de Euler, $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $z(t) = e^{it}$, verifica:

   a) $\boxed{}$ $|z(t_1 + t_2)| = |z(t_1)| + |z(t_2)|$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
   b) $\boxed{\text{x}}$ $\operatorname{Arg} z(t) = t$.
   c) $\boxed{}$ $\dfrac{d^2 z}{dt^2} = z$.

47. Sea z un número complejo distinto de cero y tal que $0, z, z^2$ representan tres puntos alineados del plano complejo, entonces:

   a) $\boxed{\text{x}}$ z es un número real.
   b) $\boxed{}$ z^2 es un número imaginario.
   c) $\boxed{}$ z tiene igual parte real que imaginaria.

48. Sea z un número complejo distinto de cero y tal que z, z^2 representan dos vectores perpendiculares del plano complejo, entonces:

   a) $\boxed{}$ z es un número real.
   b) $\boxed{\text{x}}$ z^2 es un número imaginario distinto de cero.
   c) $\boxed{}$ z tiene igual parte real que imaginaria.

49. Sea z un número complejo distinto de cero que verifica $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z^2 \neq 0$ entonces:

   a) $\boxed{\text{x}}$ $z + \overline{z} = 1$.
   b) $\boxed{}$ El módulo de z es $1/4$.
   c) $\boxed{}$ $\operatorname{Arg} z = \pi/4$.

50. Denotamos por $\operatorname{sen} x^o$, $\cos x^o$ las funciones seno, coseno cuando la x viene expresada en grados sexagesimales. Se pide marcar todas las contestaciones correctas:

   a) $\boxed{}$ $(\operatorname{sen} x^o)' = \cos x^o$.
   b) $\boxed{\text{x}}$ $(\operatorname{sen} x^o)' = \frac{\pi}{180} \cos x^o$.
   c) $\boxed{}$ $(\operatorname{sen} x^o)' = \frac{180}{\pi} \cos x^o$.
   d) $\boxed{}$ $(\cos x^o)' = -\operatorname{sen} x^o$.
   e) $\boxed{}$ $(\cos x^o)' = \frac{\pi}{180} \operatorname{sen} x^o$.
   f) $\boxed{\text{x}}$ $(\cos x^o)' = -\frac{\pi}{180} \operatorname{sen} x^o$.
   g) $\boxed{}$ $(\cos x^o)' = -\frac{180}{\pi} \operatorname{sen} x^o$.

JUSTIFICACIÓN: La relación entre medir x en sexagesimales, x^o, o en radianes, x^r, está dada por la igualdad $x^o = (180/\pi) \cdot x^r$. De aquí se deduce

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen} x^o)' &= \left(\operatorname{sen}(\frac{180}{\pi} x^r)\right)' = (180/\pi) \cdot (\cos(\frac{180}{\pi} x^r)) \\ &= (180/\pi) \cdot \cos x^o\end{aligned}$$

51. **Propiedades de las funciones trigonométricas.** Denotamos por $\cos z, \operatorname{sen} z$ el coseno y seno complejo y por $\operatorname{ch} z = (e^z + e^{-z})/2, \operatorname{sh} z = (e^z - e^{-z})/2$ el coseno y el seno hiperbólico. Se pide, marcar todas las afirmaciones ciertas de entre las siguientes:

   a) ☐ Para todo número complejo z se verifica $|\operatorname{sen} z| \leq 1$.
   b) ☒ Para todo número complejo z se verifica $\operatorname{sh}^2 z - \operatorname{ch}^2 z = -1$.
   c) ☐ La función real $\operatorname{ch} x, x \in \mathbb{R}$, verifica $(\operatorname{ch} x)' = -\operatorname{sh} x$.
   d) ☒ Existen infinitos números complejos z verificando $\operatorname{sen} z = 4$.
   e) ☒ No existe ningún número real x verificando $\operatorname{sen} x = 4$.
   f) ☒ Para todo número complejo z se verifica $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.

52. La expresión $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

   a) ☐ Vale $+\infty$.
   b) ☐ Vale cero.
   c) ☒ Vale ∞.

53. La expresión $\lim_{x \to 1, x > 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

   a) ☐ No existe.
   b) ☒ Vale $+\infty$.
   c) ☐ Vale uno.
   d) ☐ Vale $-\infty$.

54. Si la gráfica de la función $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, es simétrica respecto al eje x entonces:

   a) ☒ f es la función cero.
   b) ☐ $x = 1$ es una asíntota vertical de f.
   c) ☒ $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0$.

55. La función $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, verifica:

   a) ☐ Tiene un único cero positivo.
   b) ☒ Es una función creciente.
   c) ☐ Tiene dos puntos de inflexión.

56. La ecuación $x^5 + x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$, verifica:

a) ☐ No tiene ninguna solución negativa.

b) ☒ Tiene una única solución.

c) ☒ No tiene ninguna solución racional.

57. ¿Existe una función $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ de modo que su gráfica sea la circunferencia de radio uno y centro el origen?

a) ☐ Sí.

b) ☒ No.

58. La función $f(x) = x^2/\sqrt{x^2-1}, x \in \mathbb{R}$, verifica:

a) ☐ Su dominio es todo $\mathbb{R}$.

b) ☒ f es cóncava hacia arriba en todo el dominio de definición.

c) ☒ la recta $y = x$ es asíntota de f.

d) ☐ f no posee ninguna asíntota vertical.

e) ☒ Para $x = \pm\sqrt{2}$ la función f alcanza su valor mínimo.

59. Consideramos la función real $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la igualdad $f(x) = x/\sqrt[3]{x^2-1}$. Se pide, marcar las afirmaciones ciertas de entre las siguientes:

a) ☐ La recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de f.

b) ☒ Los puntos $x = -3, 0, 3$ son de inflexión para f.

c) ☐ $x = \sqrt{3}$ es el único máximo relativo de f.

d) ☒ f es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.

60. La función $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x\sqrt{2})$ verifica:

a) ☐ Es periódica.

b) ☐ Está superiormente acotada por 1.

c) ☒ Tiene infinitos ceros.

61. La función real $f(x) = x^{33} \cdot \cos x$ tiene en el origen:

a) ☐ Un máximo relativo.

b) ☒ Un punto de inflexión.

c) ☐ Un mínimo relativo.

62. El desarrollo de Taylor en el origen de la función real $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $f(x) = \sqrt{3} + x^{33} + x^{34} + o \cdot x^{34}$. De ello se deduce que el carácter del origen para f es:

a) ☐ Un mínimo relativo.

b) ☒ Un punto de inflexión.

c) ☐ Ninguna de las anteriores.

63. De una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable se sabe que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces se puede afirmar:

a) ☐ f' es positiva en $[a,b]$.

b) ☒ Existe $c \in [a,b]$ de modo que $f'(c) = 0$.

c) ☐ Existe $c \in (a,b)$ de modo que $f(c) = 0$.

64. La función real $f(x) = x^{33} \cdot \operatorname{sen} x$ tiene en el origen:

a) ☐ Un máximo relativo.

b) ☐ Un punto de inflexión.

c) ☒ Un mínimo relativo.

65. El desarrollo de Taylor en el origen de una función en dos variables $z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es:

$$z(x,y) = -3 + x^2 - 2xy + y^2 + \mathrm{o} \cdot \|(x,y)\|^2$$

De ello se deduce que el carácter del origen para z es:

a) ☐ Un mínimo relativo.

b) ☐ Un punto de ensilladura.

c) ☒ Un quasi-mínimo.

66. El desarrollo de Taylor en el origen de una función en dos variables $z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es:

$$z(x,y) = 3 + 4x + 2y - x^2 + 2xy + \mathrm{o} \cdot \|(x,y)\|^2$$

De ello se deduce:

a) ☐ El origen es un punto de ensilladura para z.

b) ☐ El origen es un máximo relativo para z.

c) ☒ El origen no es un punto crítico para z.

67. Sea C la gráfica de la función integrable $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ y S el valor del área de la región plana limitada por C, los ejes coordenados y la recta $x = 3$. Entonces:

a) ☐ $S = \int_0^3 f(x)\,dx$.

b) ☒ $S = \int_0^3 |f(x)|\,dx$.

c) ☐ $S^2 = \int_0^3 f(x)^2\,dx$.

68. El valor L de la longitud de una curva plana que en coordenadas polares posee la expresión $\rho = \rho(\alpha)$, $\alpha \in [0,\pi]$, verifica:

a) ☒ $L = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\alpha) + \rho'^2(\alpha)}\,d\alpha$

b) ☐ $L = \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2(\alpha)\,d\alpha$

c) ☐ $L = \int_0^\pi \sqrt{2\rho(\alpha) + \rho^2(\alpha)}\,d\alpha$

69. Utilizamos un sistema de referencia cartesiano (X, Y, Z) con unidad de longitud el metro. Denotamos por A la región del plano XY limitada por las rectas $X = 3, X = 4, Y = 0$, y la gráfica de la función real $f\colon [3, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, y denotamos por H el sólido que se obtiene al revolucionar A respecto al eje Y. Entonces, el valor en metros cúbicos del valor del volumen de H es igual a:

   a) ☐ $\int_3^4 \pi f(x)^2\, dx$.
   b) ☒ $\int_3^4 2\pi\, x \cdot f(x)\, dx$.
   c) ☐ $\int_3^4 \pi\, x \cdot f(x)^2\, dx$.

70. El valor de la expresión $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$ es:

   a) ☒ $+\infty$.
   b) ☐ 0.
   c) ☐ -2.

71. Si f es una función real derivable, $\mathrm{D} = \frac{d}{dx}$ es el operador derivada, α es un número real y n un número natural. Entonces, son ciertas todas las opciones que marco a continuación:

   a) ☐ $\mathrm{D}^n(e^{\alpha x} f) = e^{\alpha x}[\mathrm{D}^n + \alpha] f$.
   b) ☒ $\mathrm{D}^n(e^{\alpha x} f) = e^{\alpha x}[\mathrm{D} + \alpha]^n f$.
   c) ☐ $(\mathrm{D} + \alpha)^n e^{\alpha x} f = e^{\alpha x} \mathrm{D}^n f$.

72. Queremos introducir en MAPLE, como variables, la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que expresamos a continuación

$$E\colon \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4.25x = 0$$

$$C\colon x(0) = 4, \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

para ello, ejecutamos las siguientes líneas, marcar todas las posibilidades correctas:

   a) ☒ > E:=(D@@2)(x)(t)+D(x)(t)+(425/100)*x(t)=0;
   >C:=x(0)=4,D(x)(0)=0;
   b) ☐ > E:(D@@2)(x)(t)+D(x)(t)+(425/100)*x(t)=0;
   >C:=x(0)=4,D(x)(0)=0;
   c) ☐ >E:=(D@2)(x)(t)+D(x)(t)+(425/100)*x(t)=0;
   >C:=x(0)=4,D(x)(0)=0;

73. Denotamos por $x(t)$ la única función real que verifica la ecuación diferencial

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - 2\,\dfrac{dx(t)}{dt} + 2x(t) & = & 0 \\ x(0) & = & a \\ \dfrac{dx(0)}{dt} & = & b \end{array}\right.$$

Poner en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor $x(0.5)$, es decir, el valor de la función $x(t)$ cuando $t = 0.5$.

$\boxed{0.584622a + 0.327669b}$

JUSTIFICACIÓN: La ecuación diferencial se puede expresar $(\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 2)x(t) = 0$. Ahora, teniendo en cuenta que las raíces del polinomio $\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D} + 2$ son $1 + i\,, 1 - i\,,$ y que la ecuación diferencial es homogénea resulta que $x_G(t) = Ae^t \operatorname{sen} t + Be^t \cos t$. Considerando las condiciones iniciales, resulta $x(t) = [-(a)+(b)]e^t \operatorname{sen} t + (a)e^t \cos t$ y que $x(0.5) = 0.584622a + 0.327669b$

74. Del desplazamiento horizontal en metros, $x(t)$, que realiza una partícula P en el instante t, t en segundos, sabemos que se encuentra descrito por la ecuación diferencial

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \dfrac{dx(t)}{dt} + 4.25x(t) & = & 0 \\ x(0) & = & 4 \\ \dfrac{dx(0)}{dt} & = & 0 \end{array}\right.$$

Con el fin de obtener la expresión explícita de dicho desplazamiento realizamos la siguiente sesión de MAPLE:

```
> E := (D@@2)(x)(t)+D(x)(t)+(425/100)*x(t)=0;
> C := x(0)=4, D(x)(0)=0;
> dsolve({E,C},x(t));
```

$$E := (\mathrm{D}^{(2)})(x)(t) + \mathrm{D}(x)(t) + \tfrac{17}{4}\,x(t) = 0$$

$$\mathrm{C} := \mathrm{x}(0)=4,\ \mathrm{D}(\mathrm{x})(0)=0$$

$$x(t) = e^{(-t/2)} \sin(2t) + 4e^{(-t/2)} \cos(2t)$$

Marcar todas las afirmaciones ciertas que se deducen de lo anterior:

a) ☐ P describe un movimiento armónico de amplitud constante igual a 4 metros.

b) ☒ El desplazamiento horizontal de la partícula P en el instante $t = 0.5$ ⟦s⟧ es de 233.85 ⟦cm⟧.

c) ☒ P describe un movimiento armónico amortiguado de amplitud decreciente y frecuencia 0.32 ⟦Hz⟧.

d) ☐ P describe un movimiento armónico de amplitud creciente y periodo 3.14 ⟦s⟧.