Práctica 5

Método de Newton

5.1. Introducción

En esta práctica damos al alumno un guión y una relación de referencias para que con su trabajo personal, que estimamos de 6 horas, realice un pequeño estudio e investigación que le permita dominar los fundamentos básicos del Método de Newton para el cálculo de ceros de funciones derivables.

Es muy recomendable que el alumno estudie y haga los ejemplos de aplicación del método que se dan en esta práctica porque serán objeto de examen en el control asociado a esta práctica. Con la asimilación correcta de los contenidos escritos que aquí se exponen queda garantizada, al menos, la superación del 80 % de los contenidos del control.

5.2. Enunciado del problema

Nos planteamos la resolución de la ecuación

$$f(x) = 0; \qquad x \in [a, b]$$

de la que, por simplicidad, suponemos que $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable tres veces.

5.3. Funcionamiento del método de Newton

El método de Newton está basado en el uso de una línea tangente como aproximación de $f(x)$ cerca de los puntos donde el valor de la función es cero:

1. Se escoge una primera aproximación $x_0 \in [a, b]$ de la solución a la ecuación.
2. Se calcula la siguiente aproximación x_1 utilizando la fórmula de recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5.1}$$

3. Si $|x_n - x_{n+1}|$ es menor que nuestra tolerancia al error; entonces x_{n+1} es una solución de la ecuación. De otra forma se pasaría de nuevo al punto anterior.

5.4. Interpretación geométrica del método

En lugar de resolver la ecuación $f(x) = 0$ resolvemos la ecuación $t_{x_0}(x) = 0$ para t_{x_0} la recta tangente a f en una aproximación x_0. Si x_1 es la solución de la ecuación $t_{x_0} = 0$ continuamos con el proceso: de la solución de $t_{x_1} = 0$ obtenemos x_2 y así sucesivamente. En definitiva, obtenemos la solución de $f(x) = 0$ como el límite de la sucesión $\{x_n\}$:

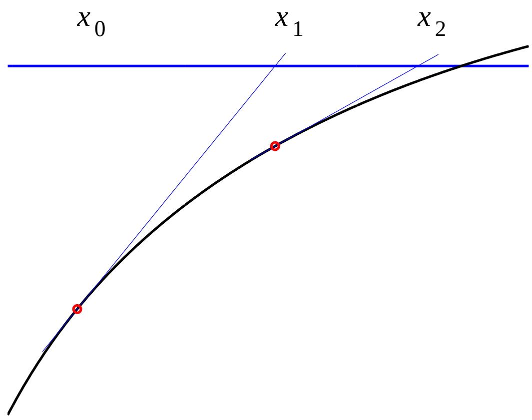
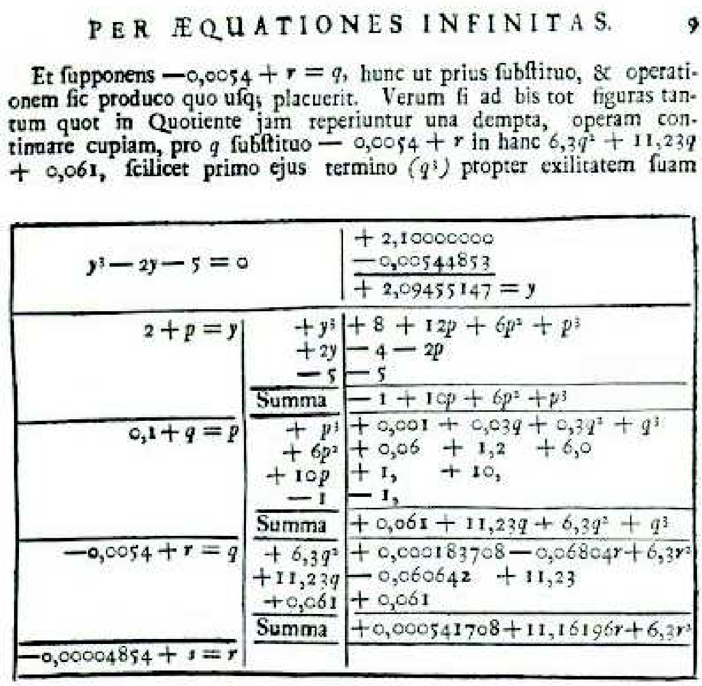


Figura 5.1: Interpretación geométrica del Método de Newton

Para obtener x_1 a partir de x_0 hemos de resolver la ecuación $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Esta ecuación se resuelve fácilmente teniendo $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ lo que justifica la fórmula (5.1) anterior.

5.5. El primer ejemplo de Newton



PER ÆQUATIONES INFINITAS. 9

Et ſupponens $-0{,}0054 + r = q$, hunc ut prius ſubſtituo, & operationem ſic produco quo uſq; placuerit. Verum ſi ad bis tot figuras tantum quot in Quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0{,}0054 + r$ in hanc $6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061$, ſcilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem ſuam

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544853$ $+2{,}09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3$ $+2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
	Summa	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ $+0{,}06 \quad + 1{,}2 \quad + 6{,}0$ $+1, \quad + 10,$ $-1,$
	Summa	$+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$-0{,}0054 + r = q$	$+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$+0{,}000183708 - 0{,}06804r + 6{,}3r^2$ $-0{,}060642 \quad + 11{,}23$ $+0{,}061$
	Summa	$+0{,}000541708 + 11{,}16196r + 6{,}3r^2$
$-0{,}00004854 + s = r$		

Figura 5.2: Página de *De Analysi* donde Newton expone su método.

El primer ejemplo de Newton aparece en su libro *'De Analysi'*. Aquí, estudia la ecuación $y^3 - 2y - 5 = 0$. Comprueba que la solución está cerca de $y = 2$. Luego sustituye $y = 2 + p$, para obtener $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$. Como p es pequeño, elimina $p^3 + 6p^2$ de la ecuación para llegar a $10p - 1 = 0$, de donde aproximadamente es $p = 0.1$. Por tanto sería $y = 2.1$, esta es la primera aproximación de la raíz. Ahora toma $p = 0.1 + q$ y sustituye p en la ecuación anterior para llegar a $q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$. Otra vez desecha los términos $q^3 + 6.3q^2$ para de $11.23q + 0.061 = 0$ obtener aproximadamente $q = -0.0054$, de donde ahora $y = 2.0946$, y así sucesivamente.

¿Puedes reconocer el método de Newton tal como ahora lo explicamos de estos cálculos?

Esta sección está sacada de la página web del Prof. Bartolomé Barceló: `http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/cnumerico/recursos/newton.html`

5.6. La convergencia del método es cuadrática

Si $f(x) = 0$ posee una solución en $[a, b]$ y $f'(x) \neq 0$ en $[a, b]$, entonces, la convergencia del método de Newton es cuadrática. Con precisión se verifica:

Teorema 5.1 *Sea* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función tres veces derivable de la que sabemos que existe una solución* r *de la ecuación* $f(x) = 0$ *y tal que su primera derivada no es cero en ningún punto de* $[a, b]$. *Si el error cometido al aproximar* r *por* x_0 *es* δ; *entonces, el error cometido al aproximar* r *por* x_1 *es menor que* $\frac{M''}{2m'}\delta^2$ *para* M'' *el máximo de* $|f''|$ *en* $[a, b]$ *y* m' *el mínimo de* $|f'|$ *en* $[a, b]$.

Demostración: Teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor de f en el punto x_0, se verifica:

$$
\begin{aligned}
0 = f(r) &= f(x_0) + f'(x_0)(r - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(r - x_0)^2 \\
-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= r - x_0 + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)}\delta^2 \\
r - x_1 = r - \left[x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right] &\leq -\frac{M''}{2m'}\delta^2
\end{aligned}
$$

para ξ un punto intermedio entre r y x_0. De aquí se deduce $|r - x_1| \leq \frac{M''}{2m'}\delta^2$ que es precisamente lo que queríamos demostrar. ■

5.7. Ejemplos de aplicación

5.7.1. La sucesión de Newton asociada a $x^2 = 2$

La sucesión de Newton asociada a la ecuación $x^2 = 2$ y que comienza con la aproximación $x_0 = 2$ verifica:

1. Está definida por la recurrencia

$$x_0 = 2, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

2. Cada x_n es un número racional.

3. $\{x_n\}$ es monótona decreciente como se puede observar a partir de la interpretación geométrica del método de Newton.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$. En efecto, por ser $\{x_n\}$ monótona y acotada existe $r = \lim x_n$ y tomando límites en la igualdad $x_{n+1} = (x_n^2+2)/(2x_n)$ resulta $r = (r^2+2)/(2r)$, por tanto, $r^2 = 2$ y, de aquí, $r = \sqrt{2}$.

5. Sus seis primeros términos son

n	0	1	2	3	4	5
x	2.	1.5	1.416666667	1.414215686	1.414213562	1.414213562

deduciéndose que $\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$

5.7.2. La ecuación $\operatorname{sen} x - \cos x = 1.1$

Consideramos la ecuación $\operatorname{sen} x - \cos x = 1.1$, $x \in [0, \pi/2]$. Para $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x - 1.1$, $x \in [0, \pi/2]$, se verifica $f(0) \cdot f(\pi/2) < 0$ y $f'(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \geq 0$, $x \in [0, \pi/2]$; de ello, se deduce que f es creciente y que tiene un único cero en $[0, \pi/2]$. Podemos calcularlo con la sucesión de Newton

$$x_0 = 1.; \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{\operatorname{sen} x_n - \cos x_n - 1.1}{\operatorname{sen} x_n + \cos x_n}$$

obteniendo:

n	0	1	2	3	4	5
x	1.	1.578120395	1.671509701	1.676568017	1.676583806	1.676583807

Tabla 5.3: Sucesión de Newton asociada a la ecuación $\operatorname{sen} x - \cos x = 1.1$

deduciéndose que la única solución de la ecuación $\operatorname{sen} x - \cos x = 1.1$, $x \in [0, \pi/2]$, es $r = 1.6765838\ldots$

Realizamos estos cálculos con MAPLE:

```
> f:=sin(x)-cos(x)-1.1;
> df:=diff(f,x); F:=unapply(x-f/df,x);
```

$$f := \sin(x) - \cos(x) - 1.1$$

$$df := \cos(x) + \sin(x)$$

$$F := x \to x - \frac{\sin(x) - \cos(x) - 1.1}{\cos(x) + \sin(x)}$$

```
> r:=1.; for ii from 1 to 5 do
> r:=F(r): print(r,ii):
> end do:
```

Los resultados de las últimas instrucciones son los incluidos en la tabla anterior.

5.7.3. La ecuación $3 \operatorname{sen} x + 4\cos x = 5$

Tal y como veremos en los cálculos con ordenador la función

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} x + 4\cos x - 5; \quad x \in [0, \pi]$$

verifica que su único cero, $r = 0.6435\ldots$, es también cero de su derivada, concretamente, su único cero coincide con su máximo. Estas son las situaciones en las que peor funciona el método de Newton porque no queda garantizada la convergencia cuadrática. De hecho, podemos observar en la siguiente tabla que la convergencia es lineal:

n	0	1	2	3	4
x	1.	0.8198384172	0.7314405847	0.6874424874	0.6654682634
n	6	8	10	12	14
x	0.6489926084	0.6448739736	0.6438442939	0.6435871277	0.6435226355

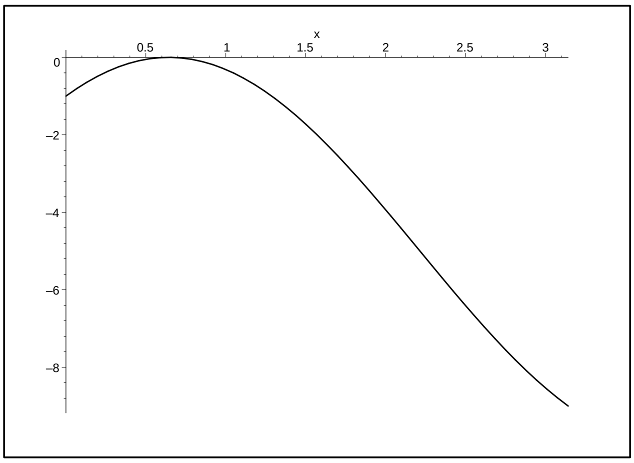
Tabla 5.4: Sucesión de Newton asociada a la ecuación $3 \operatorname{sen} x + 4\cos x = 5$

Realizamos estos cálculos con MAPLE:

```
> f:=3*sin(x)+4*cos(x)-5;
> df:=diff(f,x); F:=unapply(x-f/df,x);
```

$$f := 3\sin(x) + 4\cos(x) - 5$$
$$df := 3\cos(x) - 4\sin(x)$$
$$F := x \to x - \frac{3\sin(x) + 4\cos(x) - 5}{3\cos(x) - 4\sin(x)}$$

```
> plot(f,x=0..Pi);
```




```
> r:=1.; for ii from 1 to 15 do
> r:=F(r): print(r,ii):
> end do:
```

Los resultados de estas últimas instrucciones son los incluidos en la tabla anterior.

Para automatizar el cálculo con tolerancia *tol* de una solución de la ecuación $f(x) = 0$ a partir de una aproximación $x = x0$ podemos definir una función propia de nombre `newton` que con la simple instrucción `newton`(f, x, x_0, tol) nos permita su inmediato cálculo. Un ejemplo simple de tal función propia es el dado por el siguiente listado:

```
> newton:=proc(exp_,var,x0,tol)
> local Dexp_,fexp_,Fexp_,xn,ii:
> ii:=0;
> fexp_:=unapply( evalf(exp_),var);
> Dexp_:=diff(exp_,var):
> Fexp_:=unapply( evalf(var-exp_/Dexp_), var);
> xn:=evalf(x0):
> while(abs( fexp_(xn) )>tol) do
> print(xn,ii);
> xn:=Fexp_(xn):
> ii:=ii+1;
> if (abs(fexp_(xn))<tol) then return(xn,ii) end if:
> end do:
> end proc:
```

Como ejemplo de aplicación volvemos a calcular el cero de $x^2 - 2 = 0$ a partir de la aproximación inicial $x_0 = 2$:

```
> newton(x^2-2,x,2,1e-5);
```

$$2., 0$$
$$1.500000000, 1$$
$$1.416666667, 2$$
$$1.414215686, 3$$

5.8. Ejercicios

Encontrar, con una tolerancia de $1e-5$, todas las soluciones positivas de las siguientes ecuaciones:

(1) $\text{tg}(x) - x + 1 = 0,\ 0 < x < 3\pi$	(2) $\text{sen}(x) - 0.3e^x = 0,\ x > 0$
(3) $0.1x^3 - 5x^2 - x + 4 + e^{-x} = 0$	(4) $\log(x) - 0.2x^2 + 1 = 0$
(5) $x + x^2 + 3x^{-1} - 40 = 0$	(6) $0.5\exp(x/3) - \text{sen}(x) = 0$
(7) $\log(1+x) - x^2 = 0,\ x \in [0,2]$	(8) $\exp(x) - 5x^2,\ x \in [0,5]$
(9) $x^3 + 2x - 1 = 0$	(10) $\sqrt{x+2} - x = 0$
(11) $e^x = 1/\text{sen}\, x,\ x \in [0.1, 3.2]$	(12) $x^{1.4} - \sqrt{x} + 1/x - 100 = 0$

5.9. Referencias

Buscador Internet: *Poner las palabras clave* metodo newton
para hacer una búsqueda en internet.

Martín, I.; Pérez, V.M.: *Cálculo numérico para computación en Ciencia e Ingeniería*
Síntesis, Madrid, 1998. Capítulo 5.

Volkov, E.A.: *Métodos Numéricos*
URSS, Moscú, 1990. §25.