Práctica 7

Ley de Gravitación Universal de Newton

7.1. Introducción

En esta práctica damos al alumno un guión y una relación de referencias para que con su trabajo personal, que estimamos de 10 horas, realice un pequeño estudio e investigación que le permita dominar los fundamentos básicos de la Ley de Gravitación Universal.

Es muy recomendable que el alumno estudie y haga los ejemplos de aplicación que se dan en esta práctica porque serán objeto de examen en el control asociado a esta práctica. Con la asimilación correcta de los contenidos escritos que aquí se exponen queda garantizada, al menos, la superación del 80 % de los contenidos del control.

Se aconseja al alumno que utilice ([EP], secciones 5.1 y 6.4) y ([Gu], capítulo 1) como referencias bibliográficas de apoyo a lo aquí expuesto.

7.2. Leyes de Kepler y de Gravitación

De acuerdo con la *ley de gravitación de Newton* un satélite de masa m_S se encuentra atraído hacia la Tierra con una fuerza F_S cuya magnitud es directamente proporcional al producto de las masas de la Tierra, m_T, y del satélite e inversamente proporcional cuadrado de la distancia entre ellos:

$$F_S = G\frac{m_T \cdot m_S}{|r|^2} \cdot \frac{r}{|r|} \quad \text{y , análogamente,} \quad F_T = G\frac{m_T \cdot m_S}{|r|^2} \cdot \frac{-r}{|r|} \tag{7.1}$$

donde G es la constante de gravitación y $r = p_T - p_S$ el vector diferencia entre la posición de la Tierra, $p_T = (x_T(t), y_T(t), z_T(t))$, y la posición del satélite, $p_S = (x_S(t), y_S(t), z_T(t))$. En consecuencia, se verifica

$$(E_S)\colon m_S p_S'' = G\frac{m_T m_S}{|r|^2}\frac{r}{|r|} + m_S g_S; \quad (E_T)\colon m_T p_T'' = G\frac{m_T m_S}{|r|^2}\frac{-r}{|r|} + m_T g_T \tag{7.2}$$

para g_S, g_T las aceleraciones a las que se ven sometidas la Tierra y el satélite por acción de la atracción del resto del Universo. Podemos suponer que $g_S = g_T = g_U$ ya que la distancia

Tierra–satélite la consideramos insignificante frente a las distancias de la Tierra y cualquier objeto celeste distinto de sus satélites. De las dos igualdades anteriores se obtiene:

1. Si denotamos por $M = m_T + m_S$ la masa del sistema Tierra–satélite, la ecuación $(E_S) + (E_T)$ nos dice que la posición $p_C = \frac{1}{M}(m_S p_S + m_T p_T)$ del centro de masas Tierra–satélite verifica $p_C'' = g_U$ de lo que se deduce que la acción de atracción del Universo sobre el sistema Tierra–satélite recae sobre el centro de masas p_C.

2. La igualdad $m_S \cdot (E_T) - m_T \cdot (E_S)$ toma la expresión:

$$m_T m_S\, r'' = -G\frac{m_T m_S(m_T + m_S)}{|r|^3}\, r \tag{7.3}$$

y también

$$\left\{\begin{array}{rcl} X''(t) & = & -\dfrac{G \cdot M}{(X^2(t) + Y^2(t) + Z(t)^2)^{3/2}}\, X(t) \\ Y''(t) & = & -\dfrac{G \cdot M}{(X^2(t) + Y^2(t) + Z(t)^2)^{3/2}}\, Y(t) \\ Z''(t) & = & -\dfrac{G \cdot M}{(X^2(t) + Y^2(t) + Z(t)^2)^{3/2}}\, Z(t) \end{array}\right. \tag{7.4}$$

para $X = x_S - x_T$, $Y = y_S - y_T$ y $Z = z_S - z_T$.

3. La órbita de cualquier satélite queda determinada completamente sabiendo dos datos, a saber: la posición y la velocidad inicial. Esto se deduce de que el anterior sistema de ecuaciones diferenciales es de orden dos.

La solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales anterior es bien conocida, ver la sección 5.1 de [EP]: En las coordenadas polares (ρ, α) asociadas al plano orbital que contiene a ambos planetas y centradas en uno de ellos, se verifica:

$$\rho(\alpha) = \frac{4v_a^2/(G \cdot M)}{1 + \epsilon\cos(\alpha + \alpha_0)} \tag{7.5}$$

Mejor conocida aún que esta ecuación resultan las leyes físicas que describen el movimiento y que son conocidas como las *Leyes de Kepler* y que afirman, que respecto al sistema de referencia centrado en la Tierra (en realidad fueron enunciadas para el Sol y los planetas) se verifica:

Primera ley de Kepler: *La órbita que describe un satélite es una cónica* de excentricidad *ϵ y la Tierra uno de sus focos.*

Segunda ley de Kepler: *La velocidad areolar del movimiento del satélite, v_a, es constante.*

Tercera ley de Kepler: *El cuadrado del periodo de circunvalación del satélite es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.* Para ser más precisos, se verifica:

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} D^3} \tag{7.6}$$

7.3. Enunciados de las prácticas

Práctica A Calcular el valor de la constante de gravitación universal para las siguientes unidades de medida: como unidad de masa, UM, utilizamos la masa del Sol; como unidad de distancia; UA (en inglés AU), la unidad astronómica, es decir, la longitud del semieje mayor de circunvalación de la Tierra alrededor del Sol, $UA = 149\,597\,870.66$ [[km]]; y, como unidad de tiempo, UT, el año, $UT = 365.242199074$ [[días]].

Práctica B Calcular el valor de la constante de gravitación universal para las siguientes unidades de medida: como unidad de masa, *um*, utilizamos la suma de la masa de la Tierra y de la Luna; como unidad de distancia, *ud*, la longitud del semieje mayor de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra, $ud = 384\,400$ [[km]]; y, como unidad de tiempo, *ut*, el periodo de revolución de la Luna alrededor de la Tierra, $ut = 27.322$ [[días]].

Práctica puntuable C A partir del experimento de Cavendish se sabe que la constante de gravitación universal tiene el valor $G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ [[$\mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}$]]. Con las notaciones de las dos prácticas anteriores, calcular el valor en kilogramos de UM y *um*. El cálculo de *um* se valorará con 1 punto.

Práctica puntuable D Carontees una de las lunas de Plutón. Se pide calcular su masa y su relación con la masa de Plutón a partir de los datos:

masa de Plutón	$0.12886842 \cdot 10^{23}$ [[kg]]
período de Caronte	6.38724 [[días]]
semieje mayor Plutón–Caronte	19 640 [[km]]

Práctica puntuable E Utilizamos un sistema de referencia cartesiano (X, Y, Z), heliocéntrico, en el que el plano XY es el plano orbital de la Tierra (también llamado *eclíptica*) y cuyas unidades de medida son las de la primera práctica.

El cometa Halley alcanzó su último perihelio (punto de la trayectoria más cercano al Sol) el 9 de Febrero de 1986. Su posición y velocidad en ese momento fueron:

$$P_0 = (0.325514, -0.459460, 0.166229)\ [\![\mathrm{UA}]\!]$$

$$V_0 = (-9.096111, -6.916686, -1.305721)\ [\![\mathrm{UA/año}]\!]$$

Suponiendo que sobre el cometa Halley sólo actúa la fuerza de atracción del Sol, se pide obtener los siguientes elementos de la órbita del cometa Halley:

1. Su representación dentro de su plano orbital.
2. El ángulo que forma con la eclíptica.
3. La longitud de sus semiejes mayor y menor y el valor de su excentricidad.
4. Su periodo y la fecha de su próximo perihelio.

5. Respecto al sistema de referencia (X, Y, Z), la posición y velocidad en el afelio (punto de la trayectoria más alejado del Sol). Éste es el único apartado de esta práctica sin resolver y, por tanto, el único apartado puntuable con dos puntos.

En realidad, los planetas mayores del sistema solar alteran la órbita del cometa Halley, por ello, sobre las soluciones aquí obtenidas hay que admitir un error relativo del 1 %.

Éste es un problema propuesto en [EP], p. 484.

Práctica puntuable F Utilizando las unidades de la segunda práctica y un sistema de referencia cartesiano centrado en la Tierra. Sabemos que $m_T = 0.987722529\,[\![\text{um}]\!]$ es la expresión de la masa de la Tierra en las unidades *um* y que las condiciones iniciales de dos satélites artificiales S_1, S_2 son:

$$(S_1):\ P_1 = (0, 0.1102098, 0)\,[\![\text{ud}]\!]; \quad V_1 = (18.8099327, 0, 0)\,[\![\text{ud/ut}]\!]$$

$$(S_2):\ P_2 = (0, 0.1102098, 0)\,[\![\text{ud}]\!]; \quad V_2 = (20.8099327, 0, 0)\,[\![\text{ud/ut}]\!]$$

Se pide:

1. Obtener una representación gráfica de su órbita.
2. Obtener la longitud de los semiejes mayor y menor de circunvalación de S_1 y S_2 alrededor de la Tierra.
3. Calcular los periodos de revolución de S_1 y S_2.
4. Comprobar que para las soluciones obtenidas en los dos puntos anteriores se verifica la tercera ley de Kepler.

El primer apartado de esta práctica está resuelto en estas páginas, los otros tres apartados son parte del trabajo puntuable y personal del alumno

Práctica puntuable G Instalarse el programa gratuito de emulación astronómica CELESTIA y situándose en una fecha cercana a la pronosticada para el próximo perihelio observar la emulación del citado fenómeno astronómico y enviar al profesor una fotografía del acontecimiento. Dicha fotografía deberá ser análoga a la que se muestra en la figura (7.1) y que corresponde al aspecto del cielo en el perihelio de 1986.

Práctica puntuable H Utilizamos las unidades de medida de la primera práctica salvo para el tiempo, que para conseguir una mayor simplificación, usamos $ut' = \dfrac{1}{2\pi}\,[\![\text{ut}]\!]$. Con estas nuevas unidades $\boxed{G = 1}$.

Estamos interesados en obtener las órbitas de recuperación de un vehículo espacial situado en los alrededores de la Luna. Con ese fin consideramos como sistema de referencia cartesiano (x, y) aquel que está centrado en el centro de masas Tierra–Luna y cuyo eje x es la línea Tierra–Luna, con ello, nuestro sistema de referencia se encuentra sometido a un movimiento de rotación de velocidad angular constante e igual a $1\,[\![\text{rad/ut'}]\!]$. Si denotamos por $m_L = 0.012277471\,[\![\text{um}]\!]$ el valor de la masa

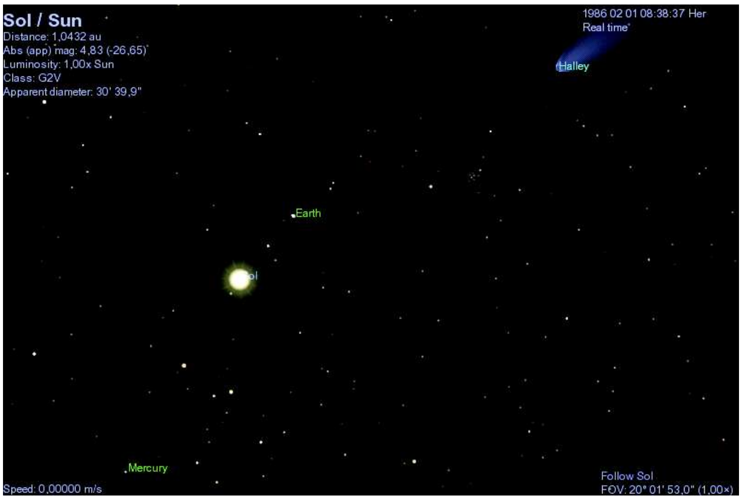


Figura 7.1: Emulación del perihelio de Halley obtenida con CELESTIA.

de la Luna en las unidades um; entonces, podemos poner que las coordenadas de la Tierra son $P_T = (-\mu, 0)$ y la de la Luna $P_L = (1-\mu, 0)$ para $\mu = \dfrac{m_L}{m_T + m_L} = m_L =$ 0.012277471 ⟦ud⟧. Análogamente, a lo obtenido en (7.4) se verifica que las ecuaciones que describen el movimiento de un vehículo espacial sometido a las fuerzas de atracción de la Tierra y de la Luna son

$$
\begin{aligned}
x'' &= x + 2y' - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{[(x+\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{[(x-1+\mu)^2 + y^2]^{3/2}} \\
y'' &= y - 2x' - \frac{(1-\mu)\,y}{[(x+\mu)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{\mu\,y}{[(x-1+\mu)^2 + y^2]^{3/2}}
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

donde los dos primeros sumandos de los términos derechos de las dos igualdades anteriores resultan al considerar las aceleraciones centrípeta y de Coriolis a las que se encuentra sometido el sistema de referencia como consecuencia de su movimiento angular.

En esta práctica, se pide representar las trayectorias del vehículo espacial en las primeras 12 unidades de tiempo ut' para las condiciones iniciales siguientes:

$$(A)\colon p_0 = (0.994, 0)\,[\![\text{ud}]\!], \quad v_0 = (0, -2.031732629557)\,[\![\text{ud/ut'}]\!]$$

$$(B)\colon p_0 = (0.994, 0)\,[\![\text{ud}]\!], \quad v_0 = (0, -2.001585106379)\,[\![\text{ud/ut'}]\!]$$

.

Problema propuesto en [EP], p. 478.

7.4. Elementos necesarios

```
> restart;
> macro(kk=(color=black,thickness=3,scaling=constrained));
```

$$kk$$

```
> with(plots):
> with(linalg):
```

7.5. Solución de las prácticas A y B

Con las unidades elegidas se tiene $T = 1$, $M = 1$ y $D = 1$ lo que llevado a la tercera ley de Kepler, ecuación (7.6), nos da $G = 4\pi^2$.

7.6. Cálculo de la masa del Sol: Solución a la práctica C

Se tiene

$$G = 4\pi^2 \frac{[\![\mathrm{UA}^3]\!]}{[\![\mathrm{UT}^2]\!] \cdot [\![\mathrm{UM}]\!]} = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{[\![\mathrm{m}^3]\!]}{[\![\mathrm{s}^2]\!] \cdot [\![\mathrm{kg}]\!]} \tag{7.8}$$

de donde

$$G = 4\pi^2 \frac{149\,597\,870\,660^3\, [\![\mathrm{m}^3]\!]}{(365.242199 \cdot 24 \cdot 3600)^2\, [\![\mathrm{s}^2]\!] \cdot [\![\mathrm{UM}]\!]} = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{[\![\mathrm{m}^3]\!]}{[\![\mathrm{s}^2]\!] \cdot [\![\mathrm{kg}]\!]} \tag{7.9}$$

obteniéndose $1\,[\![\mathrm{UM}]\!] = 0.19885584 \cdot 10^{31}\,[\![\mathrm{kg}]\!]$. Los cálculos los podemos hacer con el listado:

```
> ec:=6.673e-11*m^3*s^(-2)*kg^(-1)=(4*Pi^2)*UA^3*UT^(-2)*UM^(-1);
```

$$ec := \frac{0.6673\,10^{-10}\, m^3}{s^2\, kg} = \frac{4\,\pi^2\, UA^3}{UT^2\, UM}$$

Equivalencias

```
> UA:=149587870.66*1000*m;
> UT:=365.242199074*24*3600*s;
```

$$UA := 0.1495878707\,10^{12}\, m$$

$$UT := 0.3155692600\,10^{8}\, s$$

```
> UM:=solve(ec,UM);
```

$$UM := 0.1988558492\,10^{31}\, kg$$

7.7. Cometa Halley: Solución a la práctica E

Los vectores P_0 y V_0 son perpendiculares, en consecuencia, si denotamos

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{P_0}{\|P_0\|} && = (0.554437, -0.782583, 0.283132) \\ w_2 &= \frac{V_0}{\|V_0\|} && = (-0.790862, -0.601372, -0.113526) \\ w_3 &= w_1 \times w_2 && = (0.259111, -0.160976, -0.952338) \end{aligned}$$

se verifica que $\mathcal{S} = \{w_1, w_2, w_3\}$ es una base ortonormal directa. Si utilizamos $\mathcal{S}$ como sistema de referencia y denotamos por $[U_1, U_2, U_3]$ las coordenadas de un vector (X, Y, Z) respecto al sistema $\mathcal{S}$; entonces, podemos afirmar:

1. El plano orbital del cometa Halley es el plano U_1U_2.
2. $P_0 = [\|P_0\|, 0, 0]$ y $V_0 = [0, \|V_0\|, 0]$.
3. La posición $[u_1(t), u_2(t), 0]$ del cometa Halley en el tiempo t queda completamente determinada por el hecho de ser u_1, u_2 las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1'' & = & -\dfrac{4\pi^2}{(u_1^2+u_2^2)^{3/2}}\, u_1 \\ u_2'' & = & -\dfrac{4\pi^2}{(u_1^2+u_2^2)^{3/2}}\, u_2 \end{array}\right. \tag{7.10}$$

   con condiciones iniciales $(u_1(0), u_2(0)) = (\|P_0\|, 0)$ y $(\dfrac{du_1}{dt}(0), \dfrac{du_2}{dt}(0)) = (0, \|V_0\|)$.

4. Las igualdades

$$\begin{array}{rcl} X(t) & = & 0.554437 \cdot u_1(t) - 0.790862 \cdot u_2(t) \\ Y(t) & = & -0.782583 \cdot u_1(t) - 0.601372 \cdot u_2(t) \\ Z(t) & = & 0.283132 \cdot u_1(t) - 0.113526 \cdot u_2(t) \end{array}$$

   nos dan la relación existente entre la posición cartesiana $(X(t), Y(t), Z(t))$ del cometa Halley en el tiempo t y la posición $[u_1(t), u_2(t)]$ del cometa en el plano orbital U_1U_2.

Damos a continuación el desarrollo de una sesión MAPLE que nos resuelve esta práctica, está dividido en dos subapartados, en el primero detallamos la obtención del sistema de referencia $\mathcal{S}$ y en el segundo resolvemos la ecuación diferencial que define el movimiento del cometa Halley.

7.7.1. Obtención del sistema de referencia $\{w_1, w_2, w_3\}$

```
> Digits:=8;
```

$$Digits := 8$$

```
> P[0]:=vector([0.325514,-0.459460,0.166229]);
> norma_P[0]:=norm(P[0],2); w[1]:=evalm(P[0]/norma_P[0]);
> V[0]:=vector([-9.096111,-6.916686,-1.305721]);
> norma_V[0]:=norm(V[0],2); w[2]:=evalm(V[0]/norma_V[0]);
> ww:=crossprod(P[0],V[0]);
> w[3]:=evalm(ww*(1/norm(ww,2)));
```

$$P_0 := [0.325514,\ -0.459460,\ 0.166229]$$

$$norma\_P_0 := 0.58710726$$

$$w_1 := [0.55443703,\ -0.78258273,\ 0.28313225]$$

$$V_0 := [-9.096111,\ -6.916686,\ -1.305721]$$

$$norma\_V_0 := 11.501508$$
$$w_2 := [-0.79086247,\ -0.60137210,\ -0.11352607]$$
$$ww := [1.7496804,\ -1.0870069,\ -6.4307773]$$
$$w_3 := [0.25911138,\ -0.16097560,\ -0.95233825]$$

```
> evalf(arccos(-.952338252582)*180/Pi);
```

$$162.23918$$

El ángulo formado con la eclíptica es de 162^o2392

7.7.2. Ecuación del movimiento del cometa Halley

```
> Digits:=12;
```

$$Digits := 12$$

```
> d:=(U[1](t)^2+U[2](t)^2)^(3/2):
> ec1:=diff(U[1](t),t$2)=-4*Pi^2*U[1](t)/d;
> ec2:=diff(U[2](t),t$2)=-4*Pi^2*U[2](t)/d;
```

$$ec1 := \frac{d^2}{dt^2}\,U_1(t) = -\frac{4\,\pi^2\,U_1(t)}{(U_1(t)^2+U_2(t)^2)^{(3/2)}}$$
$$ec2 := \frac{d^2}{dt^2}\,U_2(t) = -\frac{4\,\pi^2\,U_2(t)}{(U_1(t)^2+U_2(t)^2)^{(3/2)}}$$

```
> Cond:=U[1](0)=norma_P[0], U[2](0)=0,
> D(U[1])(0)=0, D(U[2])(0)=norma_V[0];
```

$$Cond := U_1(0) = 0.58710726,\ U_2(0) = 0,\ \mathrm{D}(U_1)(0) = 0,\ \mathrm{D}(U_2)(0) = 11.501508$$

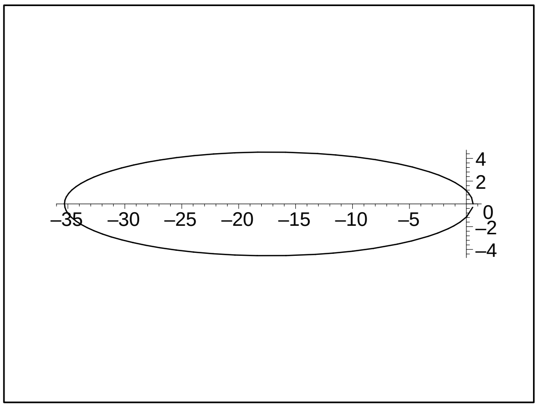
```
> Sol:=dsolve({ec1,ec2,Cond},{U[1](t),U[2](t)
> },type=numeric,output=listprocedure);
```

$$Sol := [t = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}\ ),\ U_1(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),$$
$$\frac{d}{dt}\,U_1(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ U_2(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),$$
$$\frac{d}{dt}\,U_2(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc})]$$

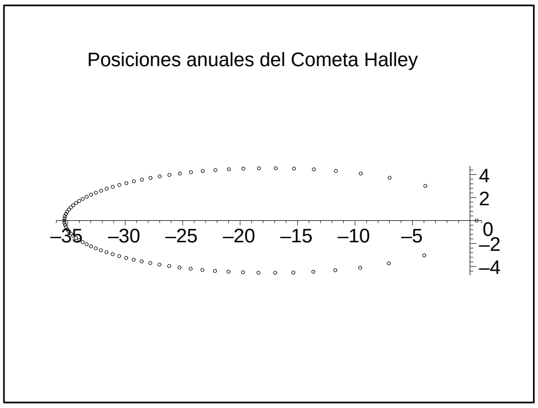
```
> u[1]:=subs(Sol,U[1](t)); u[2]:=
> subs(Sol,U[2](t)); Vu[1]:=subs(Sol,diff(U[1](t),t)); Vu[2]:=
> subs(Sol,diff(U[2](t),t));
```

$$u_1 := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$
$$u_2 := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$
$$Vu_1 := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$
$$Vu_2 := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

```
> plot([u[1],u[2],0..76],kk);
```




```
> mm := [[ u[1](n), u[2](n)] $n=0..75]:
> plot(mm,-36..1,style=point,symbol=circle,kk,title=`Posiciones
> anuales del Cometa Halley`);
```



Calculamos el semiperiodo resolviendo la ecuación u_2(t)=0:

```
> sp:=fsolve(u[2](t),t= 10..40);
```

$$sp := 38.0130082401$$

Cálculo del semieje mayor y del periodo del cometa

```
> MáximaDistanciaAlSol:=-u[1](sp);
> SemiEjeMayor:=(u[1](0)-u[1](sp))/2;
> PeriodoHalley_EnAños:=2*sp;
```

$$MáximaDistanciaAlSol := 35.3056697657249146$$

$$SemiEjeMayor := 17.9463885128$$

$$PeriodoHalley\_EnAños := 76.0260164802$$

Próxima estimación del perihelio a partir de los datos y suponiendo sólo la acción del sol "Febrero de 2062"

Calculamos el semieje menor, como es el valor máximo de u_2(t), primero resolvemos la ecuación Vu_2(t)=0

```
> ss:=fsolve(Vu[2](t), t= 3..10);
```

$$ss := 7.30241489982$$

```
> SemiEjeMenor:=u[2](ss);
```

$$SemiEjeMenor := 4.55280048116109714$$

```
> ExcentricidadHalley:=1/sqrt(1+(SemiEjeMenor/SemiEjeMayor)^2);
```

$$ExcentricidadHalley := 0.969295325831$$

7.8. Órbitas de un satélite: Solución a la práctica F

```
> d:=(X(t)^2+Y(t)^2)^(3/2):
> ec1:=diff(X(t),t$2)=-4*Pi^2*m[T]*X(t)/d;
> ec2:=diff(Y(t),t$2)=-4*Pi^2*m[T]*Y(t)/d;
```

$$ec1 := \frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{X}(t) = -\frac{4\,\pi^2\,m_T\,\mathrm{X}(t)}{(\mathrm{X}(t)^2+\mathrm{Y}(t)^2)^{(3/2)}}$$

$$ec2 := \frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{Y}(t) = -\frac{4\,\pi^2\,m_T\,\mathrm{Y}(t)}{(\mathrm{X}(t)^2+\mathrm{Y}(t)^2)^{(3/2)}}$$

```
> m[T]:=0.987722529; #Masa de la Tierra
> m[L]:=1-m[T];      #Masa de la Luna
```

$$m_T := 0.987722529$$

$$m_L := 0.012277471$$

```
> Con1:=X(0)=0, Y(0)=0.1102098,
> D(X)(0)=18.8099327, D(Y)(0)=0;
> Con2:=X(0)=0, Y(0)=0.1102098, D(X)(0)=22.8099327, D(Y)(0)=0;
```

$$Con1 := \mathrm{X}(0) = 0,\ \mathrm{Y}(0) = 0.1102098,\ \mathrm{D}(X)(0) = 18.8099327,\ \mathrm{D}(Y)(0) = 0$$

$$Con2 := \mathrm{X}(0) = 0,\ \mathrm{Y}(0) = 0.1102098,\ \mathrm{D}(X)(0) = 22.8099327,\ \mathrm{D}(Y)(0) = 0$$

```
> S1:=dsolve({ec1,ec2,Con1},{X(t),Y(t)
> },type=numeric,output=listprocedure);
> S2:=dsolve({ec1,ec2,Con2},{X(t),Y(t)
> },type=numeric,output=listprocedure):
```

$$S1 := [t = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ \mathrm{X}(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}\ ),$$
$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{X}(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),\ \mathrm{Y}(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}),$$
$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Y}(t) = (\mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc})]$$

```
> X1:=subs(S1,X(t)); Y1:=subs(S1,Y(t));
```

$$X1 := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

$$Y1 := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

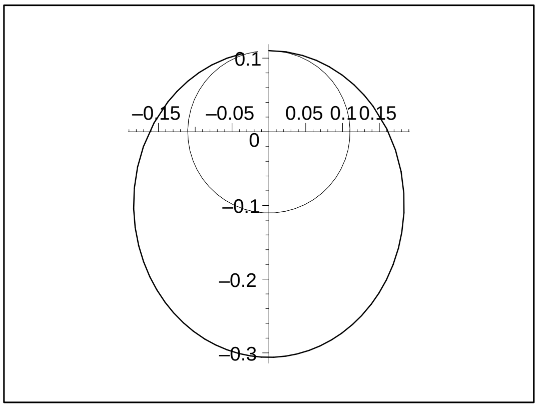
```
> X2:=subs(S2,X(t)); Y2:=subs(S2,Y(t));
```

$$X2 := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

$$Y2 := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

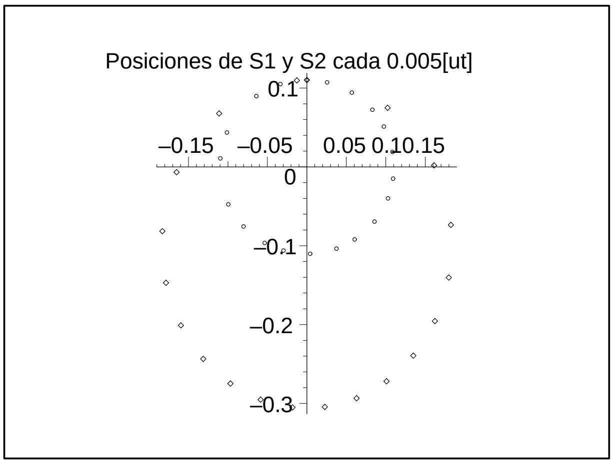
Representación de las trayectorias de S1 y S2, la de S2 con trazo grueso.

```
> P1:=plot([X1,Y1,0..0.036],kk,thickness=2):
> P2:=plot([X2,Y2,0..0.094],kk):
> display(P1,P2);
```




```
> mm := [[ X1[1](n*0.005), Y1[1](n*0.005)]
> $n=0..19]: P1:=plot(mm,style=point,symbol=circle,kk): mm := [[
> X2[1](n*0.005), Y2[1](n*0.005)] $n=0..19]:
> P2:=plot(mm,style=point,symbol=diamond,kk):

> display(P1,P2,title=‘Posiciones de S1 y S2 cada 0.005[ut]‘);
```



Para realizar una animación de las posiciones de S1 y S2 escribimos:

```
> for i from 0 to 95  do
> P[i]:=plot([[X1(i*0.001),Y1(i*0.001)],[X2(i*0.001),Y2(i*0.001)]],
> -0.2..0.2,style=point,symbol=circle,kk):
> end do:

> display([seq(P[i],i=0..95)],kk,insequence=true);
```

7.9. Órbitas de los proyectos Apolo: Solución a la práctica H

Esta práctica es puntuable, por ello, sólo mostramos la figura de la órbita del vehículo espacial que parte de las condiciones iniciales (A):

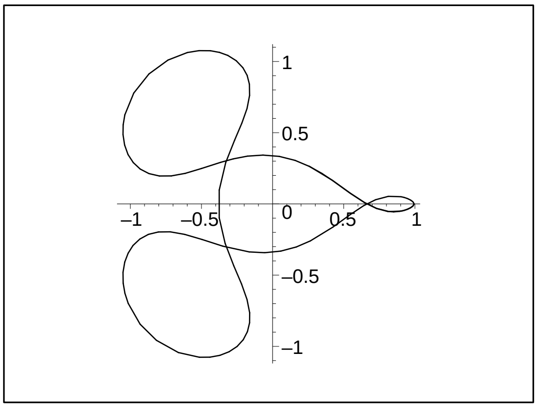


Figura 7.2: Órbita de los proyectos Apolo