

Ecuaciones diferenciales y series de Fourier

con ejercicios resueltos

Rafael Granero-Belinchón
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria
email: rafael.granero@unican.es

ÍNDICE GENERAL

1	APERTURA	7
2	RECORDANDO LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	13
2.1	El problema de valores iniciales	14
2.2	El problema de valores de frontera	22
2.3	Conclusiones	27
2.4	Ejercicios sugeridos	27
3	ALGUNAS DE LAS PRINCIPALES ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES	29
3.1	La ecuación de transporte	29
3.1.1	Derivación	30
3.1.2	Solución	31
3.1.3	Velocidad finita de propagación	32
3.1.4	El método de las características	33
3.2	La ecuación de ondas	37
3.2.1	Derivación usando la conservación del momento	38
3.2.2	Derivación usando la Ley de Hooke	39
3.2.3	Solución	41
3.2.4	Conservación de la energía y unicidad de soluciones	43
3.2.5	Sistemas de primer orden	44
3.3	La ecuación del calor	47
3.3.1	Derivación usando caminos aleatorios	47
3.3.2	Derivación usando la ley de Fick	48
3.3.3	Solución	48
3.3.4	Disipación de la energía y unicidad de soluciones	50
3.3.5	Velocidad infinita de propagación	52
3.4	La ecuación de Laplace	52
3.4.1	Derivación usando estados estacionarios	52
3.4.2	Derivación usando la curvatura	53
3.4.3	No unicidad de soluciones	54
3.5	Clasificación y reducción a la forma canónica de EDP de segundo orden	54
3.6	Conclusiones	56
3.7	Ejercicios sugeridos	57
4	PROBLEMAS DE VALORES DE FRONTERA	59
4.1	La ecuación de ondas	60
4.1.1	Extremos fijos	60
4.1.2	Extremos libres	62
4.1.3	Otras condiciones de frontera	64
4.2	La ecuación del calor	64
4.2.1	Extremos con temperatura fija	64
4.2.2	Extremos aislados	65
4.2.3	Otras condiciones de frontera	66
4.3	La ecuación de Laplace	67
4.3.1	Condición de borde Dirichlet	67
4.3.2	Condición de borde Neumann	68
4.4	Separación de variables para ecuaciones con derivadas cruzadas	69
4.5	Problemas de autovalores	70
4.6	Conclusiones	72
4.7	Ejercicios sugeridos	72

5	SERIES DE FOURIER	75	
5.1	Revisitando la ecuación de ondas	75	
5.2	Series de Fourier exponenciales en $[-L, L]$	77	
5.2.1	Los coeficientes de la serie de Fourier y el espacio L^2		77
5.2.2	La suma parcial de la serie de Fourier	80	
5.2.3	Varias nociones de convergencia	84	
5.2.4	Teoremas de convergencia para las series de Fourier		85
5.2.5	Propiedades de las series de Fourier	91	
5.3	Series de Fourier trigonométricas en $[-L, L]$	92	
5.4	Series de Fourier trigonométricas en $[0, L]$	94	
5.5	Series de Fourier en términos de los polinomios de Legendre		98
5.6	Series de Fourier en términos de las funciones de Bessel		99
5.7	Conclusiones	100	
5.8	Ejercicios sugeridos	102	
6	EJERCICIOS ADICIONALES	105	
6.1	Una aplicación a EDOs	105	
6.2	Soluciones particulares de EDP	106	
6.3	Forma de D'Alembert de la solución (47)		110
6.4	El problema isoperimétrico	112	
6.5	El problema de Basilea	114	
7	TRANSFORMADAS INTEGRALES Y DISTRIBUCIONES	117	
7.1	La transformada de Fourier	117	
7.2	Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y el principio de Duhamel	123	
7.3	Transformada de Laplace	129	
7.4	Funciones ideales o distribuciones	132	
7.5	Conclusiones	141	
7.6	Ejercicios sugeridos	142	

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Las ecuaciones de Euler tal cual las escribió en <i>Principes généraux du mouvement des fluides</i> (1757).	8
Figura 2	Esquema de la vibración de cuerdas extraído de <i>Sur le mouvement d'un corde, que au commencement n'a ete ebranlee que dans un partie</i> (Euler, 1767)	38
Figura 3	Esquema de la cuerda	40
Figura 4	La ecuación de ondas tal cual la escribió Euler en 1767	41
Figura 5	Texto original de D'Alembert	42

1 | APERTURA

En este curso vamos a estudiar *ecuaciones en derivadas parciales* (de ahora en adelante EDP) y series de Fourier. Una EDP es una ecuación donde se relacionan una función (que depende de varias variables independientes entre si) con sus derivadas parciales. Nos referimos a un objeto como

$$G\left(\vec{x}, t, u(\vec{x}, t), \frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t}, \nabla u(\vec{x}, t), \dots\right) = 0.$$

Aquí, x denota típicamente el punto del espacio mientras que t denota el tiempo. Por su parte, la función u (que depende en general de las *variables independientes* x y t) es la *incógnita* a determinar. En el caso de que u sólo dependa de t estamos ante una ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Algunos ejemplos clásicos de EDPs son los siguientes

$$(1) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2},$$

$$(3) \quad \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2},$$

$$(4) \quad i \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial y^2},$$

$$(5) \quad 0 = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}.$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *ecuación de transporte*, *ecuación de ondas*, *ecuación del calor*, *ecuación de Schrödinger* y *ecuación de Laplace*, respectivamente. Este tipo de problemas es ubicuo en física, biología, química...

El tipo de preguntas que nos haremos en este curso girarán en torno a dos ejes principales: dada una EDP,

1. ¿existe al menos una solución? De ser así, ¿es dicha solución única? ¿depende de manera continua de los datos (es decir, ¿si cambiamos los datos iniciales o de borde *un poco*, la solución cambia *un poco*)?

La ecuación de ondas (2) fue la primera EDP escrita en la historia! La descubrió D'Alembert cuando estudiaba el movimiento de una cuerda vibrante en 1747. La ecuación del calor (3), por su parte, la descubrió Fourier en 1822. En el caso de funciones que no dependen del tiempo t , ambas se reducen a la ecuación de Laplace (5)! Finalmente, la ecuación de Schrödinger (4) es la base de la mecánica cuántica

$$\frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dx} \right) = \left(\frac{du}{dt} \right) + u \left(\frac{du}{dx} \right) + v \left(\frac{du}{dy} \right) + w \left(\frac{du}{dz} \right)$$

$$\frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dy} \right) = \left(\frac{dv}{dt} \right) + u \left(\frac{dv}{dx} \right) + v \left(\frac{dv}{dy} \right) + w \left(\frac{dv}{dz} \right)$$

$$\frac{1}{q} \left(\frac{dp}{dz} \right) = \left(\frac{dw}{dt} \right) + u \left(\frac{dw}{dx} \right) + v \left(\frac{dw}{dy} \right) + w \left(\frac{dw}{dz} \right)$$

Figura 1: Las ecuaciones de Euler tal cual las escribió en *Principes généraux du mouvement des fluides* (1757).

2. una vez que tenemos respuestas a las preguntas anteriores, bien porque somos capaces de escribir explícitamente una solución en el caso de problemas lineales (la inmensa mayoría de los problemas de este curso), bien por otros métodos, la pregunta relevante que queda es ¿podemos decir algo de cómo se comporta la solución?

La primera pregunta, aunque tras un primer vistazo parezca principalmente abstracta (eso de *infinitas soluciones* suena ciertamente esotérico), viene realmente de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales al mundo real. Si para una ecuación diferencial dada (que asumimos por el momento viene de un sistema físico), la solución no fuese única no podríamos decidir qué hará nuestro sistema. Por ejemplo, bajo ciertas hipótesis, uno puede escribir la EDO que describe el movimiento de una pelota que inicialmente está en un determinado lugar al botar. El que dicha EDO no tuviese solución única implicaría que nosotros seríamos incapaces de predecir la posición de la pelota por no poder distinguir cuál es la solución que realmente describe la trayectoria de la bola (que, ésta sí, la naturaleza se ocupa de que sea única). Es decir, la unicidad de soluciones es necesaria para que haya *determinismo*. Por otro lado, si tuviésemos una solución única pero esta no depende de manera continua de los datos, dicha solución sería, de nuevo, inútil para nuestro propósito de describir la realidad. Por ejemplo, supongamos ahora que uno obtiene la ecuación diferencial que describe la temperatura de un alambre que inicialmente está a una cierta temperatura. Sabemos la temperatura inicial porque la hemos medido. Supongamos también que dicha ecuación no dependiese de manera continua de los datos iniciales (en este caso, la temperatura inicial medida). Bien, pues entonces nuestra predicción de la temperatura a tiempo 5s, digamos, sería incorrecta y tendría un error, en principio, grande. La razón ahora es que la temperatura *real* del alambre no es la que nosotros hemos medido (esto es debido tanto a errores de medición como a otros factores). Es decir, la temperatura inicial real y la temperatura inicial que nosotros hemos medido no coinciden en general sino que sólo están cerca. ¡Si la solución cambia drásticamente si uno modifica *un poco* los datos iniciales, nuestra predicción estará *drásticamente* mal!

Obviamente, en la mayoría (por no decir la totalidad) de los problemas *reales* que aparecen en las aplicaciones, las ecuaciones no son *tan bonitas* como las anteriores. Sin embargo, podríamos decir que una buena comprensión de estas ecuaciones es el primer paso a dar de cara a futuros estudios de otras

EDPs, que en general tendrán términos *no lineales* tanto en la incógnita u como en sus derivadas parciales. Términos no lineales como, por ejemplo,

$$u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Además de por sus múltiples aplicaciones, parte de la dificultad (¡y el interés!) de las EDPs no lineales reside en que **no hay una teoría capaz de abarcar todos los casos**. La situación de hecho puede ser incluso más dramática. En palabras de Sergiu Klainerman [9]

Is there really a unified subject of Mathematics which one can call PDE? At first glance this seems easy: we may define PDE as the subject which is concerned with all partial differential equations. According to this view the goal of the subject is to find a general theory of all, or very general classes of PDE's. (...) it is now recognized by many practitioners of the subject that the general point of view as a goal in itself, is seriously flawed.

Por su parte, las series de Fourier son expresiones de la forma

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \phi_n(x),$$

donde $\phi_n(x)$ son elementos de un determinado conjunto de funciones. Así, estudiar las series de Fourier y sus propiedades consiste en parte en ver cuándo y en qué sentido una determinada función f se puede descomponer como *superposición de oscilaciones más simples* ϕ_n . Las expansiones más conocidas de este tipo son las series de Fourier en senos y cosenos o, equivalentemente en exponenciales complejas:

$$f(x) = b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx),$$

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx}.$$

El estudio de las series de Fourier tiene sus orígenes en los trabajos de Euler y Daniel Bernoulli pero se populariza con la memoria de Fourier sobre el calor. Desde entonces el estudio de las series y transformadas de Fourier son la base de una rama de las matemáticas conocida como *Análisis armónico*. Esta parte de las matemáticas tiene enormes aplicaciones en campos tan dispares como la teoría de números o la física cuántica.

NOTACIÓN

A lo largo de este curso escribiremos

$$u_x(x, y, t) = \partial_x u(x, y, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x},$$

$$u_y(x, y, t) = \partial_y u(x, y, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y},$$

$$u_t(x, y, t) = \partial_t u(x, y, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}.$$

El Laplaciano y el gradiente (en x, y, z) los denotaremos por

$$\Delta u(x, y, z, t) = u_{xx}u(x, y, z, t) + u_{yy}u(x, y, z, t) + u_{zz}u(x, y, z, t),$$

$$\nabla u(x, y, z, t) = (u_x(x, y, z, t), u_y(x, y, z, t), u_z(x, y, z, t)).$$

Además normalmente reservaremos la letra t para la variable independiente que refleje el *tiempo* y las letras x, y, z para las variables independientes que reflejen el *espacio*. Denotaremos por $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $d = 1, 2$ o 3 el dominio de definición de las variables espaciales y por Γ la frontera de Ω , *i.e.* $\Gamma = \partial\Omega$. Algunos de los espacios de funciones que usaremos más corrientemente a lo largo del curso son:

- El espacio de funciones continuas con dominio I . La norma en este espacio viene dada por

$$\|f\|_{C(I)} = \max_{t \in I} |f(t)|$$

- El espacio de funciones con n derivadas continuas definidas en el dominio I . La norma en este espacio viene dada por

$$\|f\|_{C^n(I)} = \sum_{\ell=1}^n \max_{t \in I} |f^{(\ell)}(t)|$$

- El espacio de funciones de cuadrado integrable en el intervalo I

$$L^2(I) = \left\{ u(x) \text{ tales que } \int_I |u(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

A este espacio vectorial lo podemos dotar del producto interno

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx,$$

y de la norma

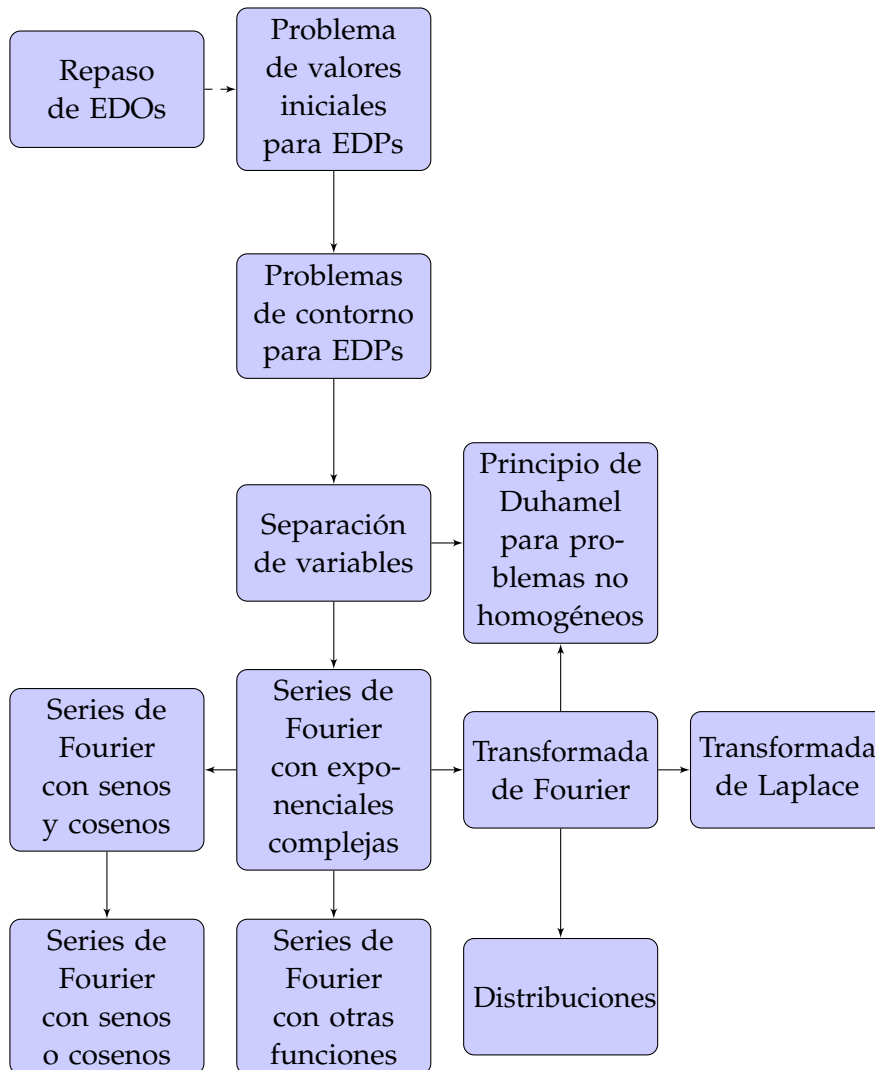
$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \left(\int_I |f(x)|^2 dx \right)^{0,5}.$$

- El espacio de las funciones test

$$C_c^\infty = \{ \phi \in C^\infty \text{ tales que } \phi = 0 \forall x \in K^c \text{ con } K \text{ conjunto compacto} \}.$$

MAPA DEL CURSO

Hay que decir que este curso es amplio. Se cubren muchos temas relacionados entre si, y, aunque en estos apuntes hay más de 60 ejemplos resueltos (algunos son ejercicios de los exámenes de otras convocatorias), a veces el estudiante puede perder la perspectiva y no tener del todo claro cómo se relaciona un concepto con los demás. Para evitarlo, hemos preparado un *índice alfabético* con los principales conceptos y además vamos a dejar aquí un *mapa del curso*:



Este mapa intenta indicar cómo se relacionan los conceptos entre si en este curso. Por supuesto, no hay una única manera de navegar entre ellos y otros libros o apuntes de otros profesores pueden motivar los distintos conceptos de distinta manera. Por ejemplo, uno puede llegar a definir las distribuciones de varias maneras distintas y que nuestro mapa diga que llegaremos desde la transformada de Fourier solo indica que en este curso lo haremos así, no que se la única ni la mejor manera de hacerlo.

2 | RECORDANDO LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Vamos a empezar el curso con un repaso rápido de algunos conceptos y teoremas para ecuaciones diferenciales ordinarias (de ahora en adelante, EDOs), esto es ecuaciones que relacionan una función de una única variable con su derivadas, es decir,

$$(6) \quad \frac{d^n \vec{y}(t)}{dt^n} = F \left(t, \vec{y}(t), \frac{d\vec{y}(t)}{dt}, \frac{d^2\vec{y}(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}\vec{y}(t)}{dt^{n-1}} \right),$$

donde $\vec{y}(t) \in \mathbb{R}^d$ es un vector d -dimensional, $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y

$$F : I \times \mathbb{R}^{nd} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

es una función. Por ejemplo una EDO con aplicaciones a la dinámica de poblaciones en ecología, es la ecuación logística

$$(7) \quad \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(1 - y(t)).$$

En este caso, la ecuación (7) se puede pensar como un modelo de la cantidad de un determinado tipo de organismo. Aquí $y(t)$ (la cantidad de organismos) es una función que, en principio, asumimos que sólo depende del tiempo t . Obviamente, dicha hipótesis es muy restrictiva ya que para la mayoría de organismos la distribución espacial es importante (y no uniforme). Por ejemplo podemos pensar en animales que migran, con lo que la cantidad de animales en una determinada región del espacio cambia (y en particular, depende de la región que uno considere).

El resumen sería el siguiente:

De dónde venimos: En vuestro anterior curso de EDOs ya se ha explicado en detalle tanto varios métodos de resolución de EDOs como la teoría de existencia y unicidad de soluciones para el problema de valores iniciales. Sin embargo, el problema de valores de contorno para EDOs no formaba parte del temario.

A dónde vamos: En este capítulo vamos a repasar brevemente la teoría de existencia y unicidad para el problema de valores iniciales así como daremos unas breves nociones de cómo estudiar rigurosamente el problema de contorno para EDOs. En particular, vamos a enfatizar que estos problemas de contorno tienen características diferentes y la unicidad de soluciones no se puede asegurar de manera general ni siquiera para problemas sencillos. Aunque esto pueda parecer una limitación, lo cierto es que será uno de los principales ingredientes para resolver ecuaciones en derivadas parciales con el método de separación de variables.

Los objetivos de este capítulo son

Objetivos mínimos	Objetivos avanzados
Entender las soluciones de ecuaciones diferenciales como límite de una sucesión de funciones	Comprender la diferencia entre problemas de valor inicial y de contorno para EDOs en relación a la unicidad de solución
Ser capaz de formular problemas de contorno para EDOs	Ser capaz de calcular (formalmente) derivadas de funcionales (saber cuándo un funcional tiene mínimos excede el contenido)

2.1 EL PROBLEMA DE VALORES INICIALES

En principio, lo normal es que la ecuación (6) tenga infinitas soluciones. Podemos pensar por ejemplo en la EDO

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t),$$

que tiene como soluciones toda la familia de funciones (dependiente del valor a tiempo $t = 0$) dada por

$$y(t) = Ce^t.$$

Lo cierto es que basta con conocer el valor de la función en un $t = t_0$ (no necesariamente cero) para conseguir determinar de manera única la solución de una EDO.

Una manera de evitar eso es añadirle datos iniciales apropiados a la ecuación (6). Por supuesto, en principio el problema (6) sin datos iniciales o con datos iniciales mal asignados podría tanto no tener solución, como tener una única solución o tener varias (e incluso infinitas) de ellas. Así vamos intuyendo ya que los datos iniciales (o, más adelante, de borde) tendrán un papel crucial en que exista una solución única.

Por ejemplo, uno podría considerar la EDO anterior con dato inicial $y(0) = 2$ con la que la única solución vendría dada por

$$y(t) = 2e^t.$$

Igualmente observamos que si en lugar de imponer únicamente $y(0) = 2$, tratamos de imponer $y(0) = 2$, $y_t(0) = 3$, el problema deja de tener solución. Es decir, no existe ninguna función $y(t)$ que cumpla todas las condiciones que estamos imponiendo. Esto es así porque estamos pidiendo demasiadas condiciones.

El problema principal de esta sección consiste en estudiar la trayectoria de una partícula de masa uno (en nuestras unidades favoritas) de la que conocemos tanto su posición inicial y_0 como su velocidad inicial y_1 y que está sujeta a una fuerza proporcional a su posición, $F = -y(t)$. La segunda ley de Newton,

$$\text{Fuerza} = \text{masa} \cdot \text{aceleración},$$

junto al hecho de que, si $y(t)$ es la posición de nuestra partícula, la aceleración viene dada por $y_{tt}(t)$, nos dice que la EDO a estudiar en este caso viene dada por *el oscilador armónico*

$$(8) \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0,$$

con datos iniciales apropiados

$$y(t) \Big|_{t=0} = y_0, \quad \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} = y_1.$$

La primera observación importante es que una ecuación de segundo orden como (8) se puede escribir como una ecuación vectorial de primer orden. En concreto, basta con definir una variable auxiliar v tal que

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= -y(t), \end{aligned}$$

así para $\vec{u} = (y(t), v(t))^T$ se tiene la EDO

$$(9) \quad \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = (v(t), -y(t))^T.$$

Una consecuencia de esta observación es que nos basta con desarrollar una teoría de existencia para EDOs de la forma

$$(10) \quad \frac{d\vec{y}(t)}{dt} = F(t, \vec{y}(t)),$$

con dato inicial

$$(11) \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Para el problema (10)-(11) hay varios teoremas que aseguran la existencia y, a veces, también la unicidad, de solución. El teorema principal de esta sección es

Teorema 1. Consideramos el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]^d$ conteniendo al punto (t_0, \vec{y}_0) y sea $F(t, \vec{y})$ una función continua en sus variables $(t, \vec{y}) \in R$ y $C^1([c, d]^d)$ en su variable $\vec{y} \in [c, d]^d$ para todo tiempo $t \in [a, b]$. Entonces existe una única solución de (10)-(11) en un intervalo de tiempo dado (al menos) por $(t_0 - h, t_0 + h)$ para cierto h suficientemente pequeño.

Antes de empezar con la prueba vamos a ver varios ejemplos que nos ayuden a entender el teorema anterior:

Ejemplo 1. Estudiar la existencia de soluciones para el problema de valores iniciales

$$\frac{dy(t)}{dt} = (y(t))^{1/3}, y(0) = 0.$$

Solución. Esta EDO es *separable*, es decir, se puede resolver de manera explícita si hacemos

$$\frac{dy}{y^{1/3}} = dt,$$

e integramos

$$\frac{3}{2}(y(t))^{2/3} = t.$$

Denotamos el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en un intervalo I como $C(I)$. El espacio de las funciones derivables con derivada continua en el mismo intervalo se escribe $C^1(I)$ y así sucesivamente. Entonces, las hipótesis del teorema garantizan que tanto F como

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}, j = 1, 2, \dots, d$$

son funciones continuas en R . Este teorema no es óptimo en el sentido de que se le puede pedir un poco menos a F y sus derivadas y todavía seguir teniendo una única solución.

O, de manera equivalente,

$$y(t) = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}.$$

Ahora observamos que $y(t) = 0$ también es solución (¡ya hemos encontrado dos soluciones!). Es más, $y(t) = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ es otra solución. De hecho, podemos construir muchas más soluciones *pegando* los tres tipos anteriores entre sí. Lo que ocurre es que $F(t, y(t)) = y^{1/3}$ no es C^1 . Eso evita que podamos aplicar el teorema anterior y a la vez ocasiona que haya múltiples soluciones empezando desde el mismo punto $y(0) = 0$. \square

Ejemplo 2. Estudiar la existencia de soluciones para el problema de valores iniciales

$$\frac{dy(t)}{dt} = (y(t))^5, y(0) = 2.$$

Solución. Tenemos que $F(t, y) = y^5$ que es una función regular con infinitas derivadas continuas, por lo que el Teorema 1 nos garantiza que hay una única solución para un tiempo de existencia suficientemente corto. Vamos a resolver explícitamente esta ecuación usando que esta EDO es *separable*. Vemos que

$$\frac{dy}{dt} = (y(t))^5 \Rightarrow \frac{dy}{y^5} = dt.$$

Integrando

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{y^5} = \frac{(y(t))^{-4}}{-4} - \frac{(y_0)^{-4}}{-4} = t,$$

de donde

$$y(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{16} - 4t\right)^{1/4}}.$$

Vemos que

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{64}} y(t) = \infty,$$

y como consecuencia la solución $y(t)$ no se puede definir para cualquier valor de tiempo (tiene una asíntota). En estos casos se dice que la solución **existe localmente**. \square

Las funciones que satisfacen

$$|f(x) - f(y)|_{\mathbb{R}^d} \leq L|x - y|_{\mathbb{R}^d}$$

con $0 < L < 1$ se llaman *aplicaciones contractivas*. Una sucesión x_n es de Cauchy si satisface que $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \forall n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Es decir, la sucesión se *apelotona*. Es importante notar que n y m son arbitrarios, en particular, $m \neq n + 1$.

Así, unos puntos que conviene recordar son

1. Si el teorema no se puede aplicar, es muy posible que haya múltiples soluciones.
2. Aún pudiendo aplicar el teorema, eso no garantiza que la solución única exista para todo tiempo. Cuando no hay solución para todo tiempo puede significar que algo *especial* o *singular* esta pasando en tu sistema físico.

Antes de la prueba del Teorema 1 necesitamos un Lema previo

Lema 1 (Teorema del punto fijo de Banach). Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)|_{\mathbb{R}^d} \leq L|x - y|_{\mathbb{R}^d}$$

con $0 < L < 1$. Entonces f tiene un único punto fijo x^* tal que

$$x^* = f(x^*).$$

Demostración. Vamos a hacer la prueba en el caso $d = 1$, pero funciona en general. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario. Definimos la iteración

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| &\leq L|x_1 - x_0|, \\ |f(x_2) - f(x_1)| &\leq L|x_2 - x_1| = L|f(x_1) - f(x_0)| \leq L^2|x_1 - x_0|, \\ |f(x_n) - f(x_{n-1})| &\leq L^n|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Como consecuencia

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L^n|x_1 - x_0|.$$

Queremos probar que la serie anterior es de Cauchy. Fijamos $n > m \geq 1$ dos enteros. Entonces tenemos que

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_m| = |x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - x_m|, \dots$$

y

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_{m+1} - x_m| \\ &\leq L^{n-1}|x_1 - x_0| + L^{n-2}|x_1 - x_0| + \dots + L^m|x_1 - x_0| \\ &\leq L^m \left(1 + L + L^2 + \dots + L^{n-1-m} \right) |x_1 - x_0| \\ &\leq L^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} L^k \right) |x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{L^m}{1-L} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Sin más que tomar m suficientemente grande obtenemos que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon,$$

para cualquier ε fijado de antemano. Como consecuencia de que x_n es una sucesión de Cauchy obtenemos la existencia de un límite x^* .

Además, como f es continua se tiene que

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = f(x^*),$$

y x^* es un punto fijo.

Sólo nos falta probar que el punto fijo es único. Vamos a argumentar por contradicción. Asumamos que y fuese otro punto fijo. Entonces

$$|x^* - y| = |f(x^*) - f(y)| \leq L|x^* - y|.$$

Pero como $L < 1$ la desigualdad anterior es una contradicción. □

El teorema del punto fijo de Banach sigue siendo cierto si cambiamos \mathbb{R}^d por cualquier espacio vectorial normado y completo, \mathcal{X} , es decir, cualquier espacio dotado de una norma y donde cualquier sucesión de Cauchy es convergente dentro de \mathcal{X} sin más que cambiar las normas en \mathbb{R}^d , $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$, por normas en \mathcal{X} , $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. A los espacios vectoriales normados y completos se les llama espacios de Banach.

Ejemplo 3. Los babilonios (600 a.C.) solían calcular \sqrt{a} iterando la función

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x} + x \right).$$

¿Sabrías decir por qué?

Solución. Observamos que un punto fijo de f satisface que

$$f(x^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x^*} + x^* \right) = x^*,$$

y

$$\frac{1}{2}x^* = \frac{1}{2} \frac{a}{x^*},$$

o, de otra manera,

$$(x^*)^2 = a.$$

□

Ejemplo 4. El método de Newton es un procedimiento iterativo para encontrar soluciones a $f(x) = 0$. La iteración viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

¿Sabrías decir por qué?

Solución. Definamos

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Iterando llegamos a un punto fijo de g . Dicho punto fijo satisface

$$g(x^*) = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = x^*,$$

o

$$\frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = 0,$$

de donde

$$f(x^*) = 0.$$

□

Prueba del Teorema 1: Sin perder generalidad consideramos el caso donde $t_0 = 0$, $d = 1$ y el rectángulo es

$$R = [-a, a] \times [-c, c].$$

Sea $h < a$ un número que especificaremos luego y fijamos $t \in [0, h]$. Escribimos

$$M = \max_{(s, \xi) \in R} |F(s, \xi)|,$$

$$L = \max_{(s, \xi) \in R} \left| \frac{\partial F(s, \xi)}{\partial y} \right|.$$

Lo primero es notar que la EDO se puede escribir como

$$y(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y(s)) ds.$$

Vamos a usar esta forma integrada de la EDO para construir una secuencia de soluciones aproximadas a las que podamos aplicar el Teorema del punto fijo de Banach. El límite de la sucesión de soluciones aproximadas será la solución que buscamos. Empezamos con

$$y_1(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y_0) ds,$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y_1(s)) ds,$$

$$y_3(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y_2(s)) ds,$$

$$(12) \quad y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y_n(s)) ds.$$

Formalmente al menos, si $n = \infty$, se tiene que

$$y_\infty(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y_\infty(s)) ds,$$

y esta y_∞ sería una solución de nuestra EDO original. Definimos la aplicación

$$\mathcal{T}_t[y] = y_0 + \int_0^t F(s, y(s)) ds.$$

Observamos que nuestra iteración anterior se puede escribir como

$$(13) \quad y_{n+1}(t) = \mathcal{T}_t[y_n],$$

y nuestra solución vendría dada por

$$(14) \quad y_\infty(t) = \mathcal{T}_t[y_\infty],$$

es decir, sería un punto fijo de nuestra aplicación $\mathcal{T}_t[y]$. Esto sugiere que usemos el teorema del punto fijo de Banach.

Observamos que $Y(t) = \mathcal{T}_t[y]$ es una función continua (de t). Para convencerse de esto basta con ver que

$$Y(t + \alpha) - Y(t) = \mathcal{T}_{t+\alpha}[y] - \mathcal{T}_t[y] = \int_t^{t+\alpha} F(s, y(s)) ds \leq \alpha M.$$

Como consecuencia

$$\mathcal{T}_t[y] : C([-h, h]) \rightarrow C([-h, h]).$$

Además

$$\|\mathcal{T}_t[y]\|_{C((-h, h))} \leq y_0 + hM,$$

así que si

$$h < \frac{c - y_0}{M},$$

$\|\mathcal{T}_t[y]\|_{C((-h,h))} < c$. Esta última desigualdad implica que, para este valor de h (o menores) $\mathcal{T}_t[y]$ no abandona el rectángulo R (donde sabemos que F satisface ciertas buenas propiedades).

Para aplicar el teorema del punto fijo de Banach (en el espacio $C((-h,h))$) nos basta con probar que $\mathcal{T}_t[y]$ satisface

$$\|\mathcal{T}_t[y] - \mathcal{T}_t[x]\|_{C((-h,h))} \leq N\|y - x\|_{C((-h,h))}$$

con $N < 1$. Tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_t[y] - \mathcal{T}_t[x]\|_{C((-h,h))} &= \max_{t \in [-h,h]} \left| \int_0^t F(s, y(s)) - F(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \max_{t \in [-h,h]} \int_0^t |F(s, y(s)) - F(s, x(s))| ds \\ &\leq L \int_0^t \max_{t \in [-h,h]} |y(t) - x(t)| ds \\ &\leq Lh\|y - x\|_{C((-h,h))}. \end{aligned}$$

Si ahora tomamos

$$h \leq a < \min \left\{ \frac{c - y_0}{M}, \frac{1}{L} \right\},$$

podemos asegurar que

1.

$$\mathcal{T}_t[y] \in [-c, c] \quad \forall t \in [-h, h],$$

es decir, no abandonamos la región donde sabemos que F cumple determinadas propiedades,

2. $\mathcal{T}_t[y]$ satisface la desigualdad deseada

$$\|\mathcal{T}_t[y] - \mathcal{T}_t[x]\|_{C((-h,h))} \leq N\|y - x\|_{C((-h,h))}$$

con $N < 1$

Así $\mathcal{T}_t[y]$ tiene un único punto fijo $y(t)$. Además

$$y(t) \in C^1((-h, h)),$$

es decir, este punto fijo es la solución de la EDO. □

Ejemplo 5. Comprueba que el método de aproximaciones sucesivas de Picard realmente aproxima la solución de la EDO

$$y' = -y - 1, \quad y(0) = 0.$$

Solución. Vamos a denotar las aproximaciones sucesivas (o *iteradas de Picard*) como ϕ_n . Tenemos que

$$\phi_0(t) = y(0) = 0,$$

$$\phi_1(t) = - \int_0^t \phi_0 + 1 ds = -t,$$

$$\phi_2(t) = - \int_0^t 1 - s ds = -t + t^2/2,$$

$$\phi_3(t) = - \int_0^t 1 + (-s + s^2/2) ds = -t + t^2/2 - t^3/6.$$

Podemos intuir que el caso general vendrá dado por la fórmula

$$\phi_n(t) = -t + t^2/2 - t^3/6 + \dots - t^n/n!, \text{ si } n \text{ es impar,}$$

y

$$\phi_n(t) = -t + t^2/2 - t^3/6 + \dots + t^n/n!, \text{ si } n \text{ es par.}$$

De hecho, podemos probar las identidades anteriores usando inducción. Consideramos primero el caso n impar. Entonces

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(t) &= - \int_0^t 1 + (-s + s^2/2 - s^3/6 + \dots - s^n/n!) ds \\ &= - \left(t - t^2/2 + t^3/6 - \dots - t^{n+1}/n!(n+1) \right). \end{aligned}$$

Como $n+1$ es par (porque n es impar), hemos obtenido la fórmula correcta. De la misma manera se haría el caso de n par (y $n+1$ impar). Además, conocemos la siguiente fórmula de Taylor

$$e^{-x} = 1 - x + x^2/2 - x^3/6 + \dots$$

Eso nos permite intuir que el límite es

$$\phi_\infty = e^{-t} - 1.$$

Si resolvemos la EDO (de manera exacta) usando factores integrantes, tenemos que

$$\mu(t)y' + \mu(t)y = -\mu(t),$$

donde elegimos μ tal que

$$\mu' = \mu,$$

para que se tenga

$$\mu(t)y' + \mu(t)y = \mu(t)y' + \mu'(t)y = \frac{d}{dt} (\mu(t)y(t)).$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} (e^t y(t)) = -e^t$$

y se concluye que

$$e^t y(t) = -e^t + 1.$$

Simplificando se obtiene la solución final

$$y(t) = e^{-t} - 1,$$

y vemos que las iteradas de Picard convergen a la solución real. \square

2.2 EL PROBLEMA DE VALORES DE FRONTERA

En la sección anterior considerábamos el caso de una partícula moviéndose bajo efecto de una fuerza. De dicha partícula conocíamos tanto la posición inicial como la velocidad inicial. Para este tipo de problemas hemos desarrollado una teoría matemática que responde (bajo ciertas hipótesis) a la primera pregunta planteada en la Apertura, es decir, nos asegura que hay una única solución.

Si en lugar de conocer el período del péndulo conociésemos la posición y la velocidad iniciales de la lenteja el problema tiene la forma (10)-(11) estudiada en la sección anterior.

En esta sección consideramos un problema parecido. Ahora queremos conocer la posición de un péndulo forzado por una fuerza $f(t)$ (conocida) del cual conocemos su período, T , pero no su posición y velocidades iniciales. Cambiando la incógnita un poco podemos asumir que tanto su posición inicial (que coincide con su posición final después del período T) viene dada por $y_0 = 0 = y_T$. Nos gustaría recalcar que no conocemos la velocidad inicial del péndulo. Las fuerzas que actúan sobre la lenteja del péndulo tienen la forma

$$F = -y(t) + f(t),$$

donde $f(t)$ es conocido (podemos pensar en algún tipo de fuerza mecánica conocida por nosotros e independiente de la posición de la lenteja). Ahora la EDO es

$$(15) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = f(t),$$

con datos de frontera

$$y(t) \Big|_{t=0} = y_0 = 0, \quad y(t) \Big|_{t=T} = y_T = 0.$$

Obviamente no podemos escribir esta nueva EDO en la forma anterior (10)-(11), por lo que el Teorema 1 no lo vamos a poder aplicar. Ahora necesitamos otro tipo de técnicas. En lo que sigue vamos a centrarnos en la motivación y la idea más que en los detalles matemáticos.

A las aplicaciones que mandan funciones a números se les llama funcionales

Cambiamos un poco el problema y consideramos la siguiente EDO

$$(16) \quad -\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = f(t),$$

con datos de frontera

$$x(t) \Big|_{t=0} = 0, \quad x(t) \Big|_{t=1} = 0,$$

y la siguiente aplicación:

$$\mathcal{F}[y(t)] = \frac{1}{2} \int_0^1 (y_t)^2(s) + y^2(s) ds - \int_0^1 f y ds.$$

Tenemos que

$$\mathcal{F} : C^1((0, 1)) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Así, podemos considerar el problema de encontrar su mínimo:

$$\min_{y(t)} \mathcal{F}[y(t)] = \min_{y(t)} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (y_t)^2(s) + y^2(s) ds - \int_0^1 f y ds \right\}.$$

De momento no parece muy claro cuál es la relación entre el problema de encontrar un mínimo del funcional y el problema de encontrar una solución de una EDO. Lo cierto es que vamos a ver que, bajo ciertas condiciones, son equivalentes.

Saber si un funcional dado tiene un mínimo o no está lejos de ser una pregunta trivial y excede el nivel del presente curso. Para convencernos de su dificultad veamos un ejemplo clásico de qué puede ir mal:

Ejemplo 6. Encuentra el mínimo del funcional

$$\mathcal{J}[x(t)] = \int_{-1}^1 (tx_t(t))^2 dt,$$

donde $x(t)$ son funciones regulares tales que $x(1) = 1$ y $x(-1) = -1$.

Solución. Observamos que la sucesión de funciones

$$x_n(t) = \frac{\tanh(nt)}{\tanh(n)},$$

verifica

$$x_n(1) = 1, \quad x_n(-1) = -1,$$

y

$$\mathcal{J}[x_n(t)] = \int_{-1}^1 \left(t \frac{n}{\tanh(n)} \frac{1}{\cosh^2(nt)} \right)^2 dt \rightarrow 0$$

si $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto podemos conjeturar que 0 es el mínimo del funcional \mathcal{J} . Sin embargo, como el funcional retorna valores positivos o cero la única manera en que \mathcal{J} puede anularse es cuando $x_t = 0$. Pero no existe solución de dicha ecuación satisfaciendo las condiciones de borde. \square

Si bien ya nos hemos convencido de que el problema de minimización anterior no es trivial dado que estamos minimizando un funcional y no una función en \mathbb{R}^d . Sin embargo, vamos a ver, al menos formalmente, una manera de encontrar qué condiciones satisfacen los mínimos de un funcional (en caso de existir).

Asumamos por el momento que tenemos la función $F(\vec{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_d) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y que queremos buscar su mínimo. Sabemos (desde primero) que, en el punto de mínimo, todas las derivadas direccionales se anulan

$$D_{\vec{y}}F(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\vec{x} + h\vec{y}) - F(\vec{x})}{h} = 0.$$

Es bastante razonable que el mínimo de un funcional verifique la misma propiedad. En el caso de un funcional, la derivada direccional en la dirección $y(t)$ toma la siguiente forma

$$\mathcal{D}_{y(t)}\mathcal{F}[x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[x(t) + hy(t)] - \mathcal{F}[x(t)]}{h}.$$

Así, el mínimo debe satisfacer

$$\mathcal{D}_{y(t)}\mathcal{F}[x] = 0.$$

El estudio de los extremos de los funcionales pertenece a un área de las matemáticas llamada cálculo de variaciones.

Aquí $h \in \mathbb{R}$ e $y(t)$ satisface $y(0) = y(1) = 0$.

Calculamos

$$\mathcal{F}[x + hy] = \frac{1}{2} \int_0^1 (x_t)^2 + h^2(y_t)^2 + 2hx_t y_t + x^2 + h^2 y^2 + 2hxy - \int_0^1 f(x + hy),$$

de donde

$$\mathcal{F}[x + hy] - \mathcal{F}[x] = \frac{1}{2} \int_0^1 h^2(y_t)^2 + 2hx_t y_t + h^2 y^2 + 2hxy - \int_0^1 fhy,$$

y

$$\frac{\mathcal{F}[x + hy] - \mathcal{F}[x]}{h} = \frac{1}{2} \int_0^1 h(y_t)^2 + 2x_t y_t + hy^2 + 2xy - \int_0^1 f y.$$

Por lo tanto

$$(17) \quad \mathcal{D}_{y(t)} \mathcal{F}[x(t)] = \int_0^1 x_t(s)y_t(s) + x(s)y(s)ds - \int_0^1 f(s)y(s)ds.$$

Integrando por partes y usando $y(0) = y(1) = 0$ tenemos que

$$(18) \quad \mathcal{D}_{y(t)} \mathcal{F}[x(t)] = \int_0^1 (-x_{tt}(s) + x(s) - f(s))y(s)ds.$$

Por lo tanto, dado que $y(t)$ es arbitraria, si la anterior derivada direccional se anula para toda $y(t)$ (con lo que $x(t)$ sería un mínimo) es porque dicho mínimo $x(t)$ satisface la EDO

$$-x_{tt}(s) + x(s) - f(s) = 0.$$

Así vemos que **encontrar las funciones que minimizan un funcional (o demostrar que existen) es una buena herramienta para demostrar la solución de problemas de valores de frontera para EDOs.**

Vamos a recordar otra situación en la que minimizar un funcional es útil en Física. Volvamos por un momento al problema del péndulo del que conocemos el período con el que comenzamos la sección:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) &= 0, \\ x(t) \Big|_{t=0} &= x_0, \\ x(t) \Big|_{t=1} &= x_1. \end{aligned}$$

Observamos que el Hamiltoniano

$$H(x(t), x'(t)) = x(t)^2 + (x'(t))^2$$

se conserva. En efecto, si derivamos tenemos que

$$\frac{d}{dt} H = 2x_t(x + x_{tt}).$$

Este Hamiltoniano se obtiene como la suma de la energía cinética y la potencial:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}(x_t)^2,$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}x^2.$$

Otra cantidad importante es el Lagrangiano

$$L(x, x') = E_{kin} - E_{pot} = \frac{1}{2}(x_t)^2 - \frac{1}{2}x^2.$$

Así, dado el Lagrangiano, podemos definir la *acción* de una determinada trayectoria $x(t)$ como

$$\mathcal{A}[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x(s), x_t(s)) ds.$$

Así el *principio de mínima acción* nos dice que la trayectoria que realiza el sistema físico es la curva $x(t)$ que minimiza la acción sujeta a las restricciones

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1.$$

Asumamos que, por alguna razón, hemos olvidado la EDO del oscilador armónico pero recordamos la forma de la energía cinética y la potencial. Así podemos definir el Lagrangiano y la acción. Que la trayectoria minimice la acción quiere decir que

$$\left(\frac{d}{dh} \mathcal{A}[x(t) + hy(t)] \right) \Big|_{h=0} = 0,$$

para toda trayectoria $y(t)$ tal que $y(0) = y(1) = 0$. Obtenemos que

$$\mathcal{A}[x(t) + hy(t)] = \frac{1}{2} \int_0^1 -(x(s) + hy(s))^2 + (x_t(s) + hy_t(s))^2 ds,$$

por lo que

$$\frac{d}{dh} \mathcal{A}[x(t) + hy(t)] = \int_0^1 -(x(s) + hy(s))y(s) + (x_t(s) + hy_t(s))y_t(s) ds,$$

y

$$\left(\frac{d}{dh} \mathcal{A}[x(t) + hy(t)] \right) \Big|_{h=0} = \int_0^1 -x(s)y(s) + x_t(s)y_t(s) ds.$$

Integrando por partes tenemos que

$$\left(\frac{d}{dh} \mathcal{A}[x + hy] \right) \Big|_{h=0} = 0$$

es equivalente a

$$\int_0^1 (x(s) + x_{tt}(s))y(s) ds = 0.$$

Dado que $y(t)$ es arbitraria se tiene que

$$x(t) + x_{tt}(t) = 0.$$

Es decir, **encontrar el funcional de acción de un determinado sistema físico es útil para hallar las ecuaciones diferenciales que describen su dinámica.**

Ejemplo 7. Una partícula de masa unidad se mueve bajo el efecto del potencial $U(x)$. De dicha partícula conocemos su posición inicial y final:

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1.$$

Encontrar las ecuaciones del movimiento.

Solución. Como la partícula se mueve en el espacio, $x(t) \in \mathbb{R}^3$. La energía cinética es

$$E_{kit} = \frac{1}{2}|x_t|^2,$$

mientras que la energía potencial es

$$E_{pot} = U(x).$$

El Lagrangiano es

$$L(x, x_t) = \frac{1}{2}|x_t|^2 - U(x),$$

y la acción es

$$\mathcal{A}[x(t)] = \int_0^1 L(x(s), x_t(s)) ds = \int_0^1 \frac{1}{2}|x_t(s)|^2 - U(x(s)) ds.$$

Fijamos $y(t) \in \mathbb{R}^3$ tal que $y(0) = y(1) = 0$. Queremos calcular

$$\left(\frac{d}{dh} \mathcal{A}[x(t) + hy(t)] \right) \Big|_{h=0}.$$

Se tiene

$$\frac{d}{dh} \mathcal{A}[x(t) + hy(t)] = \int_0^1 (x_t(s) + hy_t(s)) \cdot y_t(s) - \nabla U(x(s) + hy(s)) \cdot y(s) ds,$$

y entonces

$$\left(\frac{d}{dh} \mathcal{A}[x(t) + hy(t)] \right) \Big|_{h=0} = \int_0^1 x_t(s) \cdot y_t(s) - \nabla U(x(s)) \cdot y(s) ds.$$

Integrando por partes y usando $y(0) = y(1) = 0$ obtenemos

$$\left(\frac{d}{dh} \mathcal{A}[x(t) + hy(t)] \right) \Big|_{h=0} = \int_0^1 (-x_{tt}(s) - \nabla U(x(s)) \cdot y(s)) ds.$$

Como esto tiene que ser cierto para toda $y(t)$, concluimos que

$$-x_{tt}(s) - \nabla U(x(s)) = 0,$$

que es la EDO que buscábamos. □

Vemos así que la idea de minimizar un funcional nos sirve para

1. probar la existencia de solución de una EDO determinada,
2. dado un sistema físico, encontrar la EDO correcta.

2.3 CONCLUSIONES

Este capítulo, además de para recordar algunos puntos claves de nuestro curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, nos ha servido para introducir una serie de ideas muy simples pero que serán importantes en nuestro estudio de las ecuaciones en derivadas parciales:

1. Aunque no podamos calcular explícitamente la solución de una ecuación diferencial, a veces podemos definirla como *límite de funciones más simples en forma de iteradas de Picard*. A veces dicho límite toma la forma de una serie de Taylor (o de potencias).
2. El número de datos iniciales necesario para determinar completamente un problema depende del número de derivadas temporales que aparecen en la ecuación. Sin los datos iniciales adecuados, el problema puede no tener solución o tener infinitas soluciones.
3. En (muchas) ocasiones el problema que estudiemos tendrá datos de borde. En este curso dichos datos de borde serán en las variables espaciales, sin embargo, hemos visto ejemplos de que la misma situación se podía dar en ecuaciones diferenciales ordinarias. De nuevo, sin los datos de borde adecuados, el problema puede no tener solución o tener infinitas soluciones.

2.4 EJERCICIOS SUGERIDOS

Ejercicio 1 (Ejercicio para practicar la regla de la cadena). Sea la EDO

$$u_{tt} = -V'(u),$$

donde V es una función regular. Podrías encontrar una cantidad conservada? Es decir, una función

$$F(u)$$

tal que

$$\frac{d}{dt}F(u) = 0.$$

Ejercicio 2 (Ejercicio para practicar la regla de la cadena). Sea la EDO

$$u_{tt} = -u^3.$$

Podrías encontrar una cantidad conservada? Es decir, una función

$$F(u)$$

tal que

$$\frac{d}{dt}F(u) = 0.$$

Ejercicio 3 (Ejercicio para practicar la regla de la cadena). Sea la EDO

$$u_t = -V'(u),$$

donde V es una función regular. Podrías encontrar una función de Lyapunov? Es decir, una función

$$F(u)$$

tal que

$$\frac{d}{dt}F(u) \leq 0.$$

Ejercicio 4 (Ejercicio para practicar la regla de la cadena). Sea $u(x)$ una solución de la ecuación

$$u''(x) = u(x).$$

Se define $v(x) = \log(u(x))$. Qué EDO satisface $v(x)$?

Ejercicio 5 (Ejercicio para practicar el teorema del valor medio). Sea

$$f(x) = x^3.$$

Donde es esta función una aplicación contractiva?

Ejercicio 6 (Ejercicio para practicar el teorema del valor medio). Sea

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donde es esta función una aplicación contractiva?

Ejercicio 7 (Ejercicio para practicar el teorema del valor medio). Sea

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Donde es esta función una aplicación contractiva?

Ejercicio 8 (Ejercicio para practicar la derivada de funcionales). Dada la curva

$$(x, f(x))$$

con $x \in (0, 1)$, sabemos del curso de cálculo integral que la longitud viene dada por

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Dados los puntos $(0, y_0)$ y $(1, y_1)$, encuentra la curva de longitud mínima entre las que los unen.

Ejercicio 9 (Ejercicio para practicar modelización). En cierto embalse ha habido un vertido de un contaminante. La velocidad a la que baja la densidad del contaminante es la mitad de la densidad que había en tiempo t . Escribe una ecuación diferencial para la evolución de la densidad de dicho contaminante en función del tiempo.

3 | ALGUNAS DE LAS PRINCIPALES ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

En este capítulo vamos a estudiar varias EDPs clásicas. Además, estas EDPs son *lineales*, es decir, que dadas dos soluciones de dicha EDP, u_1 y u_2 la función

$$u = u_1 + u_2$$

o, más generalmente,

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \forall \alpha_i \in \mathbb{R}$$

también son soluciones. Como también veremos más adelante, este *principio de superposición* es una propiedad muy importante de cara a construir soluciones. Antes de comenzar con el material veamos un breve resumen que explica cómo afrontamos el capítulo:

De dónde venimos: En el capítulo anterior hemos repasado el problema de valores iniciales para las EDOs y hemos introducido el problema de contorno. Algunas de las ideas de este capítulo pasan por reducir una determinada EDP a sistemas de EDOs de manera que si resolvemos los segundos, seremos capaces de resolver la primera.

A dónde vamos: En este capítulo vamos a introducir las principales ecuaciones en derivadas parciales y a estudiar algunas de sus propiedades básicas. Vamos a considerar que la variable espacial $x \in \mathbb{R}$, es decir, que no hay fronteras en el espacio.

Los objetivos de este capítulo son

Objetivos mínimos	Objetivos avanzados
Conocer algunas de las ecuaciones diferenciales clásicas así como sus propiedades	Familiarizarse con la idea de <i>scaling</i> de una ecuación diferencial
Ser capaz de usar el método de las características	Familiarizarse con los métodos de energía para estudiar la unicidad
Ser capaz de usar la fórmula de D'Alembert	
Conocer la clasificación de las EDPs de segundo orden	

3.1 LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE

Consideremos el siguiente problema: tenemos un camino donde el tráfico fluye en un único sentido y no se permiten adelantamientos. Vamos a asumir que el camino no tiene cruces con otros caminos y que por lo tanto podemos

modelizarlo como la recta real \mathbb{R} (usamos la variable x para denotar puntos kilométricos en el camino). Entonces, la pregunta que nos hacemos es, dada una distribución inicial (a tiempo $t = 0$) de coches en dicho camino, ¿cuál es la distribución de esos coches a tiempo $t = T$? Es decir, si usamos la notación $u(x, t)$ para la densidad (coches/km) de coches en el punto x (km) en el tiempo t (segundos), la pregunta se puede reformular como, dada la distribución inicial $f(x) = u(x, 0)$, ¿cuál es $u(x, T)$? Por supuesto, también deberemos que hacer hipótesis sobre la velocidad de dichos coches.

El problema así planteado consta de dos partes más o menos independientes:

1. debemos conseguir alguna ecuación que relacione las *leyes* del movimiento de los coches
2. debemos resolver dicha ecuación si es posible o, al menos, debemos intentar decir lo máximo posible sobre el comportamiento de su solución.

3.1.1 Derivación

Empecemos con la primera parte. Si denotamos el número de coches entre el punto x y $x + \delta x$ a tiempo t por $\#u(x, t)$ y número de coches que pasan por x por unidad de tiempo a un tiempo dado t por $\#v$, entonces tenemos que

$$\#u(x, t + \delta t) = \#u(x, t) + \#v(x, t)\delta t - \#v(x + \delta x, t)\delta t,$$

o, de otra manera: *los coches que hay en el futuro* ($\#u(x, t + \delta t)$) *son iguales a los que había antes* ($\#u(x, t)$) *más los que llegan* ($\#v(x, t)\delta t$) *menos los que se van* ($-\#v(x + \delta x, t)\delta t$). Como u era la densidad de coches, tenemos que

$$\#u(x, t) = u(x, t)\delta x.$$

Por lo tanto,

$$(u(x, t + \delta t) - u(x, t))\delta x = \#u(x, t + \delta t) - \#u(x, t) = -(\#v(x + \delta x, t) - \#v(x, t))\delta t,$$

o, de otra manera,

$$\frac{u(x, t + \delta t) - u(x, t)}{\delta t} + \frac{\#v(x + \delta x, t) - \#v(x, t)}{\delta x} = 0.$$

Usando el polinomio de Taylor

$$g(x+h) = g(x) + hg'(x) + h^2 \frac{g''(x)}{2!} + \dots$$

$$(19) \quad u_t(x, t) + v_x(x, t) = 0.$$

En general, resolver una EDP explícitamente será imposible más allá de unos cuantos ejemplos de EDPs lineales... :-)

Sin hacer hipótesis sobre el flujo de coches v no podemos continuar con el problema. En general, podemos asumir que el flujo de coches (que tiene que ver con la velocidad de los mismos) es una función de la densidad de coches. Al fin y al cabo, si en una determinada carretera hay mucho tráfico, el conductor *medio* reduce la velocidad. Así podemos pensar que

$$v(x, t) = v(u(x, t)),$$

de donde

$$\frac{\partial v(u(x, t))}{\partial x} = v'(u(x, t))u_x(x, t).$$

Además, asumiendo cierta regularidad de la función $v'(\cdot)$, tenemos que

$$v'(y) = q_0 + q_1y + q_2y^2 + \dots$$

De donde obtenemos que una primera aproximación al problema (válida si $|u| \ll 1$) viene dado por la ecuación

$$(20) \quad u_t(x, t) + q_0u_x(x, t) = 0.$$

Al obtener la ecuación (20) hemos acabado con la primera parte del problema, la de la formulación matemática. Ahora debemos afrontar la segunda parte, la resolución de dicha ecuación.

Cuando la incógnita u depende de varias variables espaciales, la ecuación del transporte toma la forma

$$u_t = \vec{q}_0 \cdot \nabla u.$$

3.1.2 Solución

Por el planteamiento original del problema, donde el camino que seguían los coches lo modelizabamos con la recta real, la variable espacial x pertenece a \mathbb{R} . Es decir, el dominio espacial donde nos planteamos el problema (20) es toda la recta real (y en particular no está acotado ni tiene frontera). Por supuesto, esto no es así siempre. En general, los problemas se plantearán en dominios acotados de \mathbb{R}^d (intervalos, cuadrados, bolas, etc) y tanto la geometría del dominio espacial donde nos planteamos el problema como el valor de la incógnita en dicha frontera del dominio tendrán un papel muy importante en la existencia y el comportamiento de las soluciones. Pero dejaremos eso por el momento para centrarnos en resolver el *problema de valores iniciales* para (20) (es decir, donde el dominio espacial no tiene frontera). En este tipo de problemas, la incógnita, además de tener que satisfacer una determinada EDP, tiene que partir de una función determinada a un tiempo fijo. Entonces podemos pensar que tenemos el valor a tiempo t_0 (que llamaremos *valor o dato inicial*) y una ley de cambio (la EDP) y nos preguntamos por el estado futuro de la función que cambia de acuerdo a la EDP y que partió del dato inicial. Es decir, consideramos

$$(21a) \quad u_t(x, t) + q_0u_x(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$(21b) \quad u = f, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Si forzamos un símil con lo que ya sabemos de EDOs nos damos cuenta de que, como la EDP sólo involucra primeras derivadas temporales, necesitamos un único valor inicial a tiempo $t = 0$.

Para resolver (21a-b) vamos a usar la regla de la cadena. Esto no es del todo sorprendente porque ya hemos visto como se aplicaba dicha fórmula para obtener la propia ecuación. *La idea es pensar en los coches como partículas que siguen una trayectoria $X(t)$ (que tendremos que determinar). Por lo tanto, la densidad de coches en un lugar preciso en un tiempo determinado vendrá dada en función de los coches cuyas trayectorias les hayan llevado a ese lugar en ese tiempo.* Esta idea es equivalente a buscar soluciones de la forma

$$u(X(t), t).$$

Así, tenemos que

$$\frac{du(X(t), t)}{dt} = u_t(X(t), t) + u_x(X(t), t) \frac{dX(t)}{dt}.$$

Por lo tanto, si elegimos la trayectoria $X(t)$ tal que

$$(22) \quad \frac{dX(t)}{dt} = q_0 \Rightarrow X(t) = X(0) + q_0 t$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{du(X(t), t)}{dt} &= u_t(X(t), t) + u_x(X(t), t) \frac{dX(t)}{dt} \\ &= u_t(X(t), t) + u_x(X(t), t) q_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

De donde

$$u(X(t), t) = u(X(0), 0) = f(X(0)) = f(X(t) - q_0 t),$$

y, volviendo a nuestra anterior notación

$$u(x, t) = f(x - q_0 t).$$

Por supuesto, podemos comprobar que

$$(23) \quad u(x, 0) = f(x)$$

y que

$$u_t(x, t) = -q_0 f'(x - q_0 t), \quad q_0 u_x(x, t) = q_0 f'(x - q_0 t),$$

y por lo tanto (23) es solución de la EDP (20) con el dato inicial f . Así hemos resuelto la segunda parte del problema planteado.

3.1.3 Velocidad finita de propagación

Consideremos por un momento el siguiente dato inicial

$$f(y) = \begin{cases} 1 - y^2 & \text{si } |y| < 1 \\ 0 & \text{si } |y| \geq 1 \end{cases}.$$

Para este dato inicial, la solución, tal cual hemos visto antes, es

$$u(x, t) = f(x - q_0 t) = \begin{cases} 1 - (x - q_0 t)^2 & \text{si } |x - q_0 t| < 1 \\ 0 & \text{si } |x - q_0 t| \geq 1 \end{cases}.$$

Por ejemplo, si $q_0 = 1$, la solución a tiempo $t = 1$ es

$$u(x, 1) = f(x - 1) = \begin{cases} 1 - (x - 1)^2 & \text{si } |x - 1| < 1 \\ 0 & \text{si } |x - 1| \geq 1 \end{cases}.$$

Esta solución tiene el mismo perfil que $f(y)$, es decir, sigue siendo una parábola. Sin embargo, ahora el máximo se da en $x = 1$. Vemos así que la solución consiste en *transportar* el mismo perfil $f(y)$ con una determinada velocidad.

Esto no es un comportamiento particular de la solución correspondiente a este dato inicial sino que es general. Si pensamos un poco lo que quiere decir la ecuación para nuestra trayectoria $X(t)$ nos damos cuenta de que (22) implica que los coches se mueven a velocidad constante q_0 (el signo de q_0

nos indica hacia qué lado se mueven). Si además observamos $u(x, t)$ para distintos tiempos nos percatamos de que dichas funciones se corresponden con el perfil inicial *trasladado* (de nuevo, el signo de q_0 nos indica hacia qué lado trasladamos el perfil, si hacia la derecha o hacia la izquierda). Es decir, la distribución inicial de coches se transporta con velocidad finita q_0 sin cambiar su forma. En ese sentido, se trata de un movimiento parecido a una *ola*. De manera equivalente, podemos pensar que si el dato inicial $f(x)$ cumple (para cierto $R > 0$)

$$f(x) = 0 \forall |x| > R > 0,$$

entonces existe un tiempo \underline{t} tal que

$$u(x, t) = 0 \forall |x| > R > 0, 0 < t \leq \underline{t}.$$

Es decir, la información proveniente del dato inicial tarda un rato en llegar a los puntos donde no está presente inicialmente. Aunque parezca de alguna manera extraño, este fenómeno no pasa para todas las EDPs. De hecho, veremos que para la ecuación del calor, la información proveniente del dato inicial viaja a velocidad infinita y, por lo tanto, llega a todo los puntos de manera instantánea.

En inglés onda y ola se dicen igual, wave. Sin embargo, en castellano ola transmite la idea de movimiento más o menos sin cambiar la forma mientras que la palabra onda viene asociada más a oscilaciones. Veremos que al final, dichas cosas están más relacionadas de lo que en principio podríamos pensar.

3.1.4 El método de las características

Hemos visto como solucionar la ecuación de transporte (19) *inventando una nueva variable* $X(t)$. En esta sección vamos a ver cómo generalizar esta idea a otras ecuaciones (quizá no lineales) de primer orden.

Consideremos la EDP

$$(24) \quad A(x, t, u(x, t))u_t(x, t) + B(x, t, u(x, t))u_x(x, t) = C(x, t, u(x, t)),$$

con dato inicial

$$u(y, 0) = f(y).$$

La idea es **definir 3 nuevas cantidades (una para x , una para t y una para u) que satisfagan un sistema de 3 EDOs de tal manera que la existencia de la solución para el sistema de EDOs sea equivalente a la existencia de solución para la EDP (24)**. Equivalentemente podemos pensar que estamos definiendo dos nuevas coordenadas (una para x y otra para t) donde la solución de mi EDP realmente satisface una EDO.

Definimos $X(s)$, $T(s)$ y $U(s)$ las incógnitas correspondientes a las EDOs (observamos que, en general, $s \neq t$). Obviamente, X es la que se corresponde con x , T la que se corresponde con t y U la que se corresponde con u . Por analogía con el caso $A = 1$, $B = q_0$, $C = 0$, vemos que la EDO para $U(s) = u(X(s), T(s))$ tiene que venir de la EDP. Usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d}{ds}U(s) = \frac{d}{ds}u(X(s), T(s)) = \frac{dT}{ds}u_t(X(s), T(s)) + \frac{dX}{ds}u_x(X(s), T(s)).$$

Así, parece razonable definir

$$\frac{d}{ds}T(s) = A(X(s), T(s), U(s)),$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}X(s) &= B(X(s), T(s), U(s)), \\ \frac{d}{ds}U(s) &= C(X(s), T(s), U(s)).\end{aligned}$$

Sabemos que si añadimos datos iniciales a este sistema de EDOs y las funciones A, B y C son suficientemente regulares existirá una única solución (local) para X, T y U . Así, usando el dato inicial ($u(y, 0) = f(y)$) para la EDP obtenemos que

$$T(0) = 0, \quad X(0) = y, \quad U(0) = u(X(0), T(0)) = f(y).$$

Antes de pasar a hacer unos ejemplos, veamos una motivación más geométrica (es decir, que no se apoya en la regla de la cadena) para este método. Consideremos la superficie

$$S = \{(x, t, u(x, t))\}.$$

Esta superficie tiene dos vectores tangentes

$$\tau_1 = (1, 0, u_x(x, t)),$$

$$\tau_2 = (0, 1, u_t(x, t)).$$

Observamos que entonces

$$n = (u_x(x, t), u_t(x, t), -1),$$

es un vector normal a S . Entonces, nuestra EDP se puede pensar como

$$(B(x, t, u(x, t)), A(x, t, u(x, t)), C(x, t, u(x, t))) \cdot (u_x(x, t), u_t(x, t), -1) = 0,$$

es decir, como una condición de *perpendicularidad*. Pero si el vector

$$(B(x, t, u(x, t)), A(x, t, u(x, t)), C(x, t, u(x, t))),$$

es perpendicular al vector normal a la superficie, entonces es que es un vector tangente. Así, podemos reconstruir la superficie S como una unión de curvas satisfaciendo esta condición de tangencia.

Vamos con unos ejemplos:

Ejemplo 8. Calcula, usando el método de las características, una solución de

$$2u_t + xu_x = 0,$$

con dato inicial

$$u(y, 0) = f(y)$$

Solución. Definimos el sistema de EDOs

$$\frac{dT}{ds} = 2,$$

$$\frac{dX}{ds} = X(s),$$

$$\frac{dU}{ds} = 0,$$

con dato inicial

$$T(0) = 0, X(0) = a,$$

y entonces tenemos que

$$U(s) = u(X(s), T(s)) = u(X(0), 0) = f(a).$$

Podemos resolver y llegamos a

$$T(s) = 2s,$$

$$X(s) = ae^s.$$

Entonces

$$s = \frac{T}{2},$$

$$a = Xe^{-T/2}.$$

Entonces

$$u(X(s), T(s)) = f(X(s)e^{-T(s)/2}).$$

De otra manera,

$$u(x, t) = f(xe^{-t/2})$$

es la solución de la EDP. Comprobémoslo. Lo primero es observar que

$$u(x, 0) = f(x),$$

con lo que la solución verifica el dato inicial. Además

$$u_t = f'(xe^{-t/2})xe^{-t/2}(-1/2),$$

$$u_x = f'(xe^{-t/2})e^{-t/2}.$$

Por lo tanto,

$$2u_t + xu_x = -f'(xe^{-t/2})xe^{-t/2} + xf'(xe^{-t/2})e^{-t/2} = 0,$$

y también se satisface la ecuación en derivadas parciales original. \square

Ejemplo 9. Calcula, usando el método de las características, una solución de

$$2u_t + xu_x = u,$$

con dato inicial

$$u(y, 0) = f(y)$$

Solución. Definimos el sistema de EDOs

$$\frac{dT}{ds} = 2,$$

$$\frac{dX}{ds} = X(s),$$

$$\frac{dU}{ds} = U,$$

con dato inicial

$$T(0) = 0, X(0) = a,$$

y entonces tenemos que

$$U(s) = U(0)e^s = f(a)e^s.$$

Gracias al ejemplo anterior tenemos que

$$T(s) = 2s, \quad X(s) = ae^s,$$

$$s = \frac{T}{2}, \quad a = Xe^{-T/2}.$$

Entonces

$$u(X(s), T(s)) = f(X(s)e^{-T(s)/2})e^{T(s)/2}.$$

Así llegamos a que

$$u(x, t) = f(xe^{-t/2})e^{t/2},$$

es la solución buscada. Para comprobarlo calculamos

$$u_t = f'(xe^{-t/2})xe^{-t/2}(-1/2)e^{t/2} + f(xe^{-t/2})e^{t/2}/2,$$

$$u_x = f'(xe^{-t/2})e^{-t/2}e^{t/2}.$$

Por lo tanto,

$$2u_t + xu_x = -f'(xe^{-t/2})x + xf'(xe^{-t/2}) + f(xe^{-t/2})e^{t/2} = u.$$

□

Ejemplo 10 (Examen final curso 2018-2019). Resuelve el siguiente problema de valores iniciales

$$u_t + uu_x = 0, u(x, 0) = x.$$

Solución. Esta ecuación se conoce como ecuación de Burgers. Para la EDP considerada

$$1u_t + uu_x = 0, u(x, 0) = x,$$

escribimos el sistema característico

$$\frac{dT}{ds} = 1,$$

$$\frac{dX}{ds} = U(s),$$

$$\frac{dU}{ds} = 0,$$

con datos iniciales

$$T(0) = 0,$$

$$X(0) = a,$$

$$U(0) = a.$$

Entonces se tiene que

$$T(s) = s,$$

$$U(s) = U(0) = a.$$

Por lo tanto, integrando la ecuación para $X(s)$ obtenemos que

$$X(s) = a + as.$$

Es decir

$$a = U(s) = \frac{X(s)}{1+s} = \frac{X(s)}{1+T(s)}.$$

Deshaciendo el cambio llegamos a que

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}.$$

□

3.2 LA ECUACIÓN DE ONDAS

Antes de entrar en materia, conviene decidir qué se entiende por *onda*. Para ello podemos citar a Whitham [16]

There appears to be no single precise definition of what exactly constitutes a wave. Various restrictive definitions can be given, but to cover the whole range of wave phenomena it seems preferable to be guided by the intuitive view that a wave is any recognizable signal that is transferred from one part of the medium to another with a recognizable velocity of propagation. The signal may be any feature of the disturbance, such as a maximum or an abrupt change in some quantity, provided that it can be clearly recognized and its location at any time can be determined. The signal may distort, change its magnitude and change its velocity provided it is still recognizable. This may seem a little vague, but it turns out to be perfectly adequate and any attempt to be more precise appears to be too restrictive; different features are important in different types of waves.

Así, la idea crucial de un fenómeno ondulatorio parece ser la de *transferencia* o *transporte*, y así de nuevo vemos esa conexión entre *ondas* y la ecuación (20). La vaguedad de la *definición* de Whitham no debería desanimarnos de estudiar fenómenos ondulatorios. De hecho, según Bishop [1],

After all, our hearts beat, our lungs oscillate, we shiver when we are cold, we sometimes snore, we can hear and speak because our eardrums and our larynges vibrate. The light waves which permit us to see entail vibration. We move by oscillating our legs. We cannot even say vibration properly without the tip of the tongue oscillating (...) if we are prepared to stretch the definition of vibration a little, it quickly becomes apparent that many of the events of everyday life have an extraordinarily cyclic quality. It is a curiously shaky world we live in. It is no exaggeration to say that it is unlikely that there is any branch of science in which vibration does not play an important role.

Y es que hasta en las canciones de los los *Beach boys* encontramos referencias

I'm pickin' up good vibrations.

Dicho esto, pasemos al objeto de estudio. Consideremos una cuerda de guitarra de longitud L . Dicha cuerda esta fija en sus extremos $x = 0$ y $x = L$ al armazón de la guitarra. La pregunta que nos hacemos ahora es cómo podemos determinar la posición de la cuerda una vez pulsada y dejada vibrar libremente. Al igual que en la sección anterior, nos enfrentamos a un problema que tiene dos partes: la primera de modelización y traducción del problema físico a una EDP y la segunda de estudio de dicha EDP.

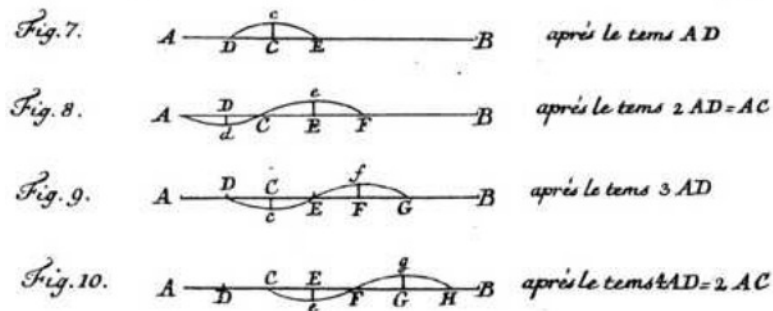


Figura 2: Esquema de la vibración de cuerdas extraído de *Sur le mouvement d'une corde, que au commencement n'a été ébranlée que dans un partie* (Euler, 1767)

3.2.1 Derivación usando la conservación del momento

Vamos a asumir que sobre la cuerda sólo actúa la tensión y que la cuerda sólo se mueve en un plano. Debido a esta hipótesis, si asumimos que la posición de equilibrio de la cuerda viene dado por el eje x , el desplazamiento desde la posición de equilibrio de la cuerda, es decir, la posición de dicha cuerda de guitarra, puede describirse por medio de la función $u(x, t)$. Consideramos también que la cuerda es tan delgada que podemos asumir que no tiene grosor y que su densidad viene dada por ρ (que es una constante). Observamos que esta última hipótesis hace que no haya efectos de compresión ni de estiramiento de la cuerda. Una vez que la densidad es constante, parece razonable imponer que la tensión es constante (y tangente a la cuerda).

El momento vertical entre a y b viene dado por

$$p(t) = \int_a^b u_t(x, t) \rho dx.$$

Sabemos que la fuerza es el cambio en momento por unidad de tiempo. Cómo no hay ninguna fuerza externa actuando sobre la cuerda en el intervalo (a, b) , el momento sólo puede cambiar por efecto de la tensión en sus extremos. Además, la tensión actúa en la dirección del vector tangente

$$\tau = \frac{(1, u_x(x, t))}{\sqrt{1 + (u_x(x, t))^2}}.$$

Como hablamos del momento vertical y asumiendo que el desplazamiento de la cuerda de su posición de equilibrio es pequeño (tal que $|u_x| \ll 1$), la contribución de la tensión (al cambio en la segunda coordenada) es

$$F_a = -Tu_x(a, t), \quad F_b = Tu_x(b, t),$$

donde T es la magnitud de la fuerza debida a la tensión (que hemos asumido constante). Por lo tanto, la conservación del momento

$$\frac{dp(t)}{dt} = Tu_x(b, t) - Tu_x(a, t),$$

de donde

$$\int_a^b u_{tt}(x, t)\rho dx = T \int_a^b u_{xx}(x, t)dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b (u_{tt}(x, t)\rho - Tu_{xx}(x, t))dx = 0,$$

y esto es así para todos a y b , por lo que

$$(25) \quad u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0,$$

con

$$0 < c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \in \mathbb{R}.$$

3.2.2 Derivación usando la Ley de Hooke

Como ya mencionamos anteriormente, la ecuación de ondas (25) fue la primera EDP de la historia (la descubrió D'Alembert en 1747). Sin embargo, la derivación original de D'Alembert no es la que hemos visto anteriormente sino que se basaba en unos trabajos previos de Johann Bernoulli (y también Daniel Benoulli). En 1727, Johann Bernoulli estudió el problema de un número (finito y arbitrario, digamos, N) de pesos conectados por muelles que satisfacen la ley de Hooke y derivó una ecuación para el desplazamiento $u_k(t)$ del peso k -ésimo como función del tiempo. Es en 1746 cuando D'Alembert comienza a estudiar el problema de la vibración de una cuerda de violín. Así, D'Alembert hizo tender la cantidad de pesos N a infinito mientras que el tamaño y la masa de los pesos tendían a cero de manera que la densidad (masa/longitud) quedase constante [10].

Esta derivación, además de interesante desde el punto de vista histórico, es importante desde el punto de vista matemático porque las ideas subyacentes son precursoras de un tipo de proceso de *paso al límite* que tiene un papel muy relevante en la física matemática. Más concretamente, en palabras de David Hilbert [8]

En 1900 David Hilbert [8] propuso una serie de problemas. En concreto, el sexto problema de Hilbert dice To treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which already today mathematics plays an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics.

Boltzmann's work on the principles of mechanics suggests the problem of developing mathematically the limiting processes, there merely indicated, which lead from the atomistic view to the laws of motion of continua.

Es decir, sugiere estudiar con detenimiento los límites (en el número de partículas) que llevan de la visión atomística (escalas muy pequeñas, número de partículas finito y grande) hacia el medio continuo (escalas grandes, un continuo de partículas).

Imaginemos un conjunto de pesos de masa m conectados entre si con muelles con constante de elasticidad k y longitud δx . Además asumimos que la masa de los muelles es despreciable.



Figura 3: Esquema de la cuerda

Denotamos por $u(x, t)$ el desplazamiento desde la posición de equilibrio del peso x -ésimo en tiempo t . Así la fuerza en el peso situado en $x + \delta x$ viene dada por

$$F_{\text{elastica}} = k(u(x + 2\delta x, t) - u(x + \delta x, t)) - k(u(x + \delta x, t) - u(x, t)).$$

Así la segunda ley de Newton nos dice que

$$(26) \quad u_{tt}(x + \delta x, t) = \frac{k}{m}(u(x + 2\delta x, t) - 2u(x + \delta x, t) + u(x, t)).$$

Si tenemos $N + 2$ pesos separados por una longitud δx (de manera que el primero y el último peso están fijos) y la longitud de la cuerda es L , entonces se tiene

$$(N + 1)\delta x = L.$$

Vemos que, si $N \rightarrow \infty$, entonces $\delta x \rightarrow 0$. De la misma manera, la masa total será

$$(N + 2)m = M,$$

y si $N \rightarrow \infty$, entonces $m \rightarrow 0$. Fijamos también

$$K = \frac{k}{N + 2}.$$

Cuando la incógnita u depende de varias variables espaciales, la ecuación de ondas toma la forma

$$u_{tt} = c^2 \Delta u.$$

Por lo tanto

$$u_{tt}(x + \delta x, t) = \frac{KL^2}{M} \frac{(N + 2)^2}{(N + 1)^2} \frac{(u(x + 2\delta x, t) - 2u(x + \delta x, t) + u(x, t))}{\delta x^2}.$$

Así,

$$0 < c^2 = \frac{KL^2}{M} \in \mathbb{R}$$

está fijo y, formalmente al menos, podemos usar el teorema de Taylor para escribir

$$F(x + h) - 2F(x) + F(x - h) \approx F''(x)h^2.$$

Podemos ahora pasar al límite $N \rightarrow \infty$ y conseguir

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t).$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = c c \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$$

Figura 4: La ecuación de ondas tal cual la escribió Euler en 1767

3.2.3 Solución

El ejercicio original que nos planteábamos en esta sección era el del estudio de la vibración de una cuerda de guitarra de longitud L y sujeta por sus extremos. Con esa aplicación en mente llegamos a escribir (25). Seguir con este ejercicio nos llevaría a un problema de valores de frontera para la ecuación de ondas, por lo que, de momento, vamos a dejar este planteamiento a un lado y a considerar que los extremos de la cuerda son $-L/2$ y $L/2$ donde $1 \ll L$ es un número enorme. Así podemos pensar que una buena aproximación viene dada cuando la variable espacial x vive en toda la recta real \mathbb{R} , por lo que de nuevo estamos ante un *problema de valores iniciales* para la ecuación de ondas (25):

$$(27a) \quad u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$(27b) \quad u = f, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$$

$$(27c) \quad u_t = g, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Como es una ecuación de segundo orden en tiempo (tiene dos derivadas temporales, sabemos de nuestro curso de EDOs que hacen falta dos datos iniciales. Para resolver dicho problema tenemos encontrar una u que cumpla todas las condiciones en (27a-c).

Volvamos atrás por un momento. Consideremos la ecuación de transporte (20) con $q_0 = c$. Tomando una derivada en tiempo de esta ecuación obtenemos

$$u_{tt} = -cu_{xt} = (-cu_t)_x = c^2 u_{xx}.$$

Es decir, **una solución de la ecuación de transporte es una solución de la ecuación de ondas**. Por supuesto, para encontrar una solución del problema de valores iniciales para la ecuación de ondas (27a-c) eso no parece muy útil porque, en principio, no está claro cómo relacionar los datos iniciales (27b-c) con este hecho. Sin embargo veremos que pensar en la ecuación de transporte sí que arroja alguna pista. Vimos que la solución de la ecuación de transporte tenía la forma

$$u(x, t) = f(x + ct),$$

es decir, no depende de x y t independientemente, sino de la variable $\alpha = x + ct$. Como la ecuación de ondas es independiente del signo de c (depende de c^2), parece razonable buscar una solución que dependa de las variables

$$\alpha^\pm = x \pm ct.$$

Así, queremos aplicar la regla de la cadena para traducir la EDP (25) de las variables x y t a las variables α^+ y α^- . La regla de la cadena dice que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \alpha^+}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \alpha^+} + \frac{\partial \alpha^-}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \alpha^-} = \frac{\partial}{\partial \alpha^+} + \frac{\partial}{\partial \alpha^-},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \alpha^+}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \alpha^+} + \frac{\partial \alpha^-}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \alpha^-} = c \frac{\partial}{\partial \alpha^+} - c \frac{\partial}{\partial \alpha^-}.$$

Entonces

$$u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^+} + \frac{\partial}{\partial \alpha^-} \right)^2 u = u_{\alpha^+ \alpha^+} + u_{\alpha^- \alpha^-} + 2u_{\alpha^+ \alpha^-},$$

$$u_{tt} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^+} - \frac{\partial}{\partial \alpha^-} \right)^2 u = c^2 (u_{\alpha^+ \alpha^+} + u_{\alpha^- \alpha^-} - 2u_{\alpha^+ \alpha^-}).$$

Así, la ecuación de ondas (27a) en las nuevas variables pasa a ser

$$(28) \quad u_{\alpha^+ \alpha^-}(\alpha^+, \alpha^-) = 0.$$

Si ahora integramos (28) llegamos a

$$u_{\alpha^+}(\alpha^+, \alpha^-) = C_1(\alpha^+),$$

Por $\int C_1(\alpha^+) d\alpha^+$ entendemos cualquier primitiva de la función C_1 .

y si integramos de nuevo observamos que

$$u(\alpha^+, \alpha^-) = \int C_1(\alpha^+) d\alpha^+ + C_2(\alpha^-).$$

Entonces tenemos que

$$u(\alpha^+, \alpha^-) = F(\alpha^+) + G(\alpha^-),$$

es decir

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Es decir, una solución de la ecuación de ondas tiene la forma de una superposición de pulsos viajando uno hacia la izquierda ($F(x + ct)$) y otro hacia la derecha ($G(x - ct)$).

Esto es justamente lo que hizo D'Alembert en 1747:

l'equation generale de la courbe est donc
 $y = \psi(t + s) + \Gamma(t - s).$

Figura 5: Texto original de D'Alembert

Sin embargo, aún no hemos encontrado una solución del problema de valores iniciales (27a-c) puesto que nuestra solución u (que satisface (27a)), para F y G arbitrarias no cumplirá (27b-c). Usando (27b) obtenemos que

$$f(x) = u(x, 0) = F(x) + G(x).$$

De la misma manera,

$$g(x) = u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x),$$

o, de manera equivalente,

$$\int_{-\infty}^x g(s) ds = c(F(x) - G(x)).$$

Ahora, dados f y g podemos resolver explícitamente para hallar F y G :

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{1}{c} \int_{-\infty}^x g(s) ds \right),$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^x g(s) ds \right).$$

Así, concluimos que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{x+ct} g(s) ds \right) + \frac{1}{2} \left(f(x - ct) - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{x-ct} g(s) ds \right)$$

y, agrupando términos,

$$(29) \quad u(x, t) = \frac{f(x + ct)}{2} + \frac{f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Desde esta fórmula ya vemos que, de la misma manera que para la ecuación de transporte, la solución tiene velocidad finita, c , de propagación.

3.2.4 Conservación de la energía y unicidad de soluciones

Volvamos al oscilador armónico por un momento

$$u_{tt}(t) + u(t) = 0.$$

Observamos que la *energía total* o Hamiltoniano

$$\mathcal{E}(t) = u_t(t)^2 + u(t)^2$$

se conserva. En efecto:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 2(u_t(t)u_{tt}(t) + u(t)u_t(t)) = 2u_t(t)(u_{tt}(t) + u(t)) = 0.$$

Al haber derivado la ecuación de ondas como límite de osciladores armónicos acoplados es razonable esperar que la *energía total* se conserve también para la ecuación de ondas. La principal diferencia es que ahora la energía total hay que calcularla en toda la cuerda, por lo que debemos integrar sobre la variable espacial.

Así, para (27) con $c = 1$, definimos

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t(x, t)^2 + u_x(x, t)^2 dx,$$

y calculamos (usando integración por partes)

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 2 \int_{\mathbb{R}} u_t(x, t) (u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t)) dx = 0.$$

Por lo tanto, sin más que integrar en tiempo la igualdad anterior, obtenemos que la ecuación de ondas tiene un comportamiento conservativo:

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t(x, t)^2 + u_x(x, t)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} u_t(x, 0)^2 + u_x(x, 0)^2 dx = \mathcal{E}(0).$$

Recordemos que la integral no es más que un límite de sumas...

Además de darnos pistas sobre el comportamiento de la solución de la ecuación de ondas, la propiedad anterior nos sirve para estudiar la unicidad de soluciones. En efecto, consideremos los problemas (similares a (27))

$$(30a) \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$(30b) \quad u = f_1, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$$

$$(30c) \quad u_t = g_1, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\},$$

$$(31a) \quad v_{tt} = v_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$(31b) \quad v = f_2, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$$

$$(31c) \quad v_t = g_2, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Es decir, consideramos el mismo problema de valores iniciales para la ecuación de ondas para dos pares de datos iniciales distintos (f_1, g_1) y (f_2, g_2) . Por lo visto anteriormente las soluciones u y v existen y verifican $\mathcal{E} < \infty$. Entonces la función $w = u - v$ satisface

$$(32a) \quad w_{tt} = w_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$(32b) \quad w = f_1 - f_2, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}$$

$$(32c) \quad w_t = g_1 - g_2, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}.$$

(¿por qué?). Usando el principio de conservación de la energía visto anteriormente obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} w_t(x, t)^2 + w_x(x, t)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (g_1(x) - g_2(x))^2 + (\partial_x f_1(x) - \partial_x f_2(x))^2 dx.$$

En particular, la unicidad podemos probarla con un argumento de contradicción. Asumamos que el problema (27) tuviese dos soluciones distintas u y v (para los mismos datos iniciales f, g) y que dichas soluciones verifican $\mathcal{E}(t) < \infty$. Entonces se tendría que $w = u - v$ verificaría

$$\int_{\mathbb{R}} w_t(x, t)^2 + w_x(x, t)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (g(x) - g(x))^2 + (f_x(x) - f_x(x))^2 dx = 0.$$

Como el lado de la izquierda es positivo tenemos que tanto w como w_t son idénticamente cero. Pero entonces $u = v$ y obtenemos la contradicción.

3.2.5 Sistemas de primer orden

Recordemos por un momento el problema de valores iniciales para el oscilador armónico

$$\begin{aligned} x_{tt} &= -x \\ x(0) &= x_0 \\ x_t(0) &= x_1. \end{aligned}$$

Esta EDO con datos iniciales se puede poner en el marco de un sistema de EDOs de primer orden. Para ello basta con definir el problema

$$\begin{aligned}x_t &= v \\v_t &= -x \\x(0) &= x_0 \\v(0) &= x_1.\end{aligned}$$

Obviamente, la transformación que nos cambia de la EDO de segundo orden al sistema de EDOs de primer orden no es único. Por ejemplo, podemos considerar las variables

$$x^\pm = x \pm x_t$$

Dichas variables satisfacen

$$\begin{aligned}x_t^+ &= -x^- \\x_t^- &= x^+ \\x^+(0) &= x_0 + x_1 \\x^-(0) &= x_0 - x_1.\end{aligned}$$

El poder reducir el orden de una ecuación escalar al escribirla como un sistema también ocurre en el estudio de EDPs. De hecho, nuestra manera de resolver la ecuación de ondas como una superposición de pulsos, uno viajando a la derecha y otro viajando a la izquierda, es un reflejo de que la ecuación de ondas, además de ser lineal, se puede escribir como un sistema de ecuaciones de transporte (una reflejando movimiento hacia la derecha y otra hacia la izquierda). Usando

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x) = \partial_{tt} - c\partial_{xx},$$

llegamos a que (25) es equivalente al sistema de ecuaciones de transporte

$$\begin{aligned}u_t - cu_x &= v \\v_t + cv_x &= 0.\end{aligned}$$

De nuevo, dicha transformación en el caso de EDPs ni es única ni tiene por qué ser útil. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}u_t &= v \\v_t &= u_{xx},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}u_t &= v_x \\v_t &= u_x,\end{aligned}$$

son otros dos sistemas equivalentes a (25).

Para resolver la ecuación de ondas (25) en la sección anterior observábamos, sin más que tomar una derivada temporal, una relación entre la ecuación de transporte (20) y la ecuación de ondas (25). De la misma manera a veces es interesante pasar de sistemas de primer orden a ecuaciones de orden superior.

Ejemplo 11. Las ecuaciones de Maxwell en el vacío son

$$\begin{aligned}c^{-2}\vec{E}_t &= \nabla \times \vec{B} \\ \vec{B}_t &= -\nabla \times \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}$$

donde $c \approx 2,998 \cdot 10^8$ m/s (es decir, la velocidad de la luz en el vacío). Concluir como hizo Maxwell que la luz es una onda electromagnética.

Solución. Si tomamos una derivada temporal de la ecuación para el campo eléctrico obtenemos

$$\vec{E}_{tt} = c^2 \nabla \times \vec{B}_t = -c^2 \nabla \times \nabla \times \vec{E} = -c^2 (\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}) = c^2 \Delta \vec{E}.$$

Es decir, el campo eléctrico satisface la ecuación de ondas en tres dimensiones. Haciendo una analogía con el caso unidimensional visto anteriormente, afirmamos que la solución de dicha ecuación viaja a la velocidad c (que es la velocidad de la luz). Desde aquí Maxwell conjeturó que la luz es una onda electromagnética. \square

Ejemplo 12. La ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial x^2},$$

se parece mucho a la ecuación del calor (3)

$$\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi(x, y, t)}{\partial x^2}.$$

Sin embargo, su comportamiento es mucho más parecido a la ecuación de ondas que a la ecuación del calor. ¿Sabrías decir por qué?

Solución. Si tomamos una derivada temporal más, llegamos a

$$i\psi_{tt} = \psi_{xxt} = \frac{1}{i}\psi_{xxxx},$$

o, equivalentemente,

$$\psi_{tt} + \psi_{xxxx} = 0.$$

Si ahora, *formalmente*, multiplicamos la ecuación por ψ_t e integramos en espacio obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_t^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \psi_{xx}^2 dx \right) = 0.$$

Es decir, la ecuación de Schrödinger conserva la energía

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} \psi_t^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \psi_{xx}^2 dx.$$

\square

3.3 LA ECUACIÓN DEL CALOR

3.3.1 Derivación usando caminos aleatorios

Consideremos el movimiento de un pequeño grano de polen que está inmerso en agua. Lo que veremos es una trayectoria básicamente *aleatoria*. Por *aleatorio* queremos decir que no veremos ningún patrón claro. Esto es así porque la superficie del grano de polen es golpeada por las partículas del fluido (que tampoco están quietas aunque nos parezca que el fluido está en reposo). Estos choques a escalas muy pequeñas no se reparten uniformemente por toda la superficie del grano de polen. De hecho incluso sufren grandes cambios. Por lo tanto la fuerza sobre el grano de polen debida a la presión del fluido cambia bastante y provoca esas oscilaciones en la trayectoria. Hoy en día este tipo de procesos se modelizan matemáticamente usando (entre otras cosas) lo que se llama *movimiento browniano* (por Robert Brown, que lo describió en 1827). Remarcablemente, este fenómeno permitió a Einstein [5] y a Smoluchowski [12] confirmar la existencia de átomos y moléculas.

Consideremos ahora una malla en dos dimensiones (una asociada al espacio y otra al tiempo)

$$\{(n\delta x, m\delta t), m, n \in \mathbb{Z}\}$$

con incrementos δx y δt . Consideremos una partícula que está en tiempo $t = 0$ en la posición $x = 0$ y asumamos que dicha partícula tiene una probabilidad $1/2$ de moverse hacia la derecha o hacia la izquierda en cada paso de tiempo. Así, la partícula siempre sube en la malla en el eje vertical mientras que en el eje horizontal unas veces salta hacia la izquierda y otras veces hacia la derecha. Vamos a escribir $p(n, m)$ para la probabilidad de que esta partícula esté en la posición $n\delta x$ en tiempo $m\delta t$.

Nos damos cuenta de que para que la partícula este en el punto $(n, m + 1)$ es necesario, o bien que estuviese antes en $(n - 1, m)$ y se moviese a la derecha o bien que estuviese en $(n + 1, m)$ y se moviese a la izquierda. Por lo tanto, usando probabilidades condicionadas, se tiene que

$$p(n, m + 1) = \frac{1}{2}(p(n - 1, m) + p(n + 1, m))$$

y por lo tanto,

$$p(n, m + 1) - p(n, m) = \frac{1}{2}(p(n - 1, m) - 2p(n, m) + p(n + 1, m)).$$

Si ahora suponemos que

$$(33) \quad \frac{\delta x^2}{\delta t} = 2D > 0$$

podemos escribir

$$\frac{p(n, m + 1) - p(n, m)}{\delta t} = D \frac{(p(n - 1, m) - 2p(n, m) + p(n + 1, m))}{\delta x^2}$$

Formalmente, haciendo $\delta x, \delta t \rightarrow 0$ pero guardando (33) se tiene que

$$p(n, m) \rightarrow u(x, t)$$

y obtenemos que la densidad verifica la ecuación del calor

$$(34) \quad u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t).$$

En esa época la naturaleza atómica de la materia aún era una idea controvertida. De hecho, le dieron el premio Nóbel a Perrin entre otras cosas por validar experimentalmente la teoría de Einstein sobre el movimiento del polen.

Cuando la incógnita u depende de varias variables espaciales, la ecuación del calor toma la forma

$$u_t = D\Delta u.$$

3.3.2 Derivación usando la ley de Fick

Vamos a derivar la ecuación del calor de principios físicos básicos. La energía termal de un alambre (que modelizamos como un segmento unidimensional, es decir, sin grosor) toma la forma

$$C = cmu,$$

donde m y u son la masa y la temperatura del alambre y c es el calor específico (la energía requerida para aumentar en 1 unidad la temperatura de una unidad de masa). También sabemos que el calor fluye de los lugares más cálidos a los más fríos. Por lo tanto, el flujo de calor es paralelo al gradiente. En el caso de un alambre (que es unidimensional) la situación es aún más fácil y tenemos

$$J = -Du_x.$$

Así, el cambio en el tiempo δ en la temperatura en el segmento $x + \delta x$ viene dado por

$$\delta x u(x, t + \delta t) - \delta x u(x, t).$$

Este cambio tiene que ser igual al flujo de calor en los extremos. Dicho flujo en los extremos toma la forma

$$J(x, t)\delta t - J(x + \delta x, t)\delta t.$$

Por lo tanto llegamos a

$$\delta x u(x, t + \delta t) - \delta x u(x, t) = J(x, t)\delta t - J(x + \delta x, t)\delta t,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{u(x, t + \delta t) - u(x, t)}{\delta t} = D \frac{u_x(x + \delta x, t) - u_x(x, t)}{\delta x}.$$

Si tomamos el límite en $\delta x, \delta t \rightarrow 0$ llegamos a (34).

3.3.3 Solución

En esta sección vamos a ver cómo encontrar *una* solución *concreta* para la ecuación del calor (34) (es decir, para un dato inicial determinado). Más adelante en el curso veremos cómo construir soluciones de la ecuación del calor (34) para cualquier dato inicial. Para encontrar esta solución particular vamos a introducir un tipo de argumentos que nos serán útiles al tratar con diversas EDP's: los argumentos de tipo scaling.

Para empezar vamos a asumir que, de alguna manera, tenemos una solución de la ecuación del calor (34), $u(x, t)$.

Para $\lambda > 0$ y ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (por determinar) definimos la función reescalada

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t).$$

Queremos encontrar α y β tal que, si u es una solución de la ecuación del calor, u_λ sea una solución de la ecuación del calor. Entonces calculamos usando la regla de la cadena lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial s},$$

donde $s = \lambda t$. De la misma manera,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \lambda^\beta \frac{\partial}{\partial y'}$$

con $y = \lambda^\beta x$. Entonces se tiene que

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} = \lambda^{\alpha+1} \frac{\partial u}{\partial s} - \lambda^{2\beta+\alpha} \frac{\partial u}{\partial y'^2}.$$

Observamos que si $\alpha + 1 = 2\beta + \alpha$ entonces

$$\lambda^{\alpha+1} \frac{\partial u}{\partial s} - \lambda^{2\beta+\alpha} \frac{\partial u}{\partial y'^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial y'^2} \right) \lambda^{2\beta+\alpha} = 0 \cdot \lambda^{2\beta+\alpha},$$

donde en la última igualdad hemos usado que u es una solución de la ecuación del calor. Para conseguir $\alpha + 1 = 2\beta + \alpha$ basta con tomar $\beta = 0,5$ y cualquier α . Como λ es arbitrario, lo elegimos $\lambda = t^{-1}$. Entonces

$$u_\lambda(x, t) = t^{-\alpha} u \left(\frac{x}{t^{-0,5}}, 1 \right) = t^{-\alpha} F(z),$$

con

$$z = \frac{x}{t^{-0,5}}.$$

Calculamos

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(x, t) = -\alpha t^{-\alpha-1} F(z) - \frac{1}{2} t^{-\alpha} F'(z) \frac{x}{t^{1,5}},$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\lambda(x, t) = t^{-\alpha} F''(z) \frac{1}{t}.$$

Si introducimos la fórmula para u_λ en la ecuación del calor (34) llegamos a

$$-\alpha t^{-\alpha-1} F(z) - \frac{1}{2} t^{-\alpha} F'(z) \frac{x}{t^{1,5}} = t^{-\alpha} F''(z) \frac{1}{t},$$

de donde

$$\alpha F(z) + \frac{1}{2} F'(z) z = -F''(z).$$

Así, el problema se reduce a encontrar una solución de esta EDO en la variable z . Ahora observamos que

$$(F(z)z)_z = F'(z)z + F(z)$$

por lo que si $\alpha = 0,5$ obtenemos

$$\frac{1}{2}(F(z)z)_z = -F_{zz}(z).$$

Si integramos esta EDO llegamos a

$$F_z(z) = -\frac{1}{2} F(z)z + c,$$

y, si además forzamos $c = 0$,

$$F(z) = Ce^{-\frac{z^2}{4}},$$

para alguna constante C . Finalmente, si deshacemos los cambios llegamos a

$$u(x, t) = Ct^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

para cualquier C . Así, por ejemplo, si consideramos como dato inicial a tiempo $t = 1$ la función

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}},$$

tenemos que basta tomar $C = \pi^{-0,5}$ para que la u descrita anteriormente sea la solución buscada.

3.3.4 Disipación de la energía y unicidad de soluciones

Habíamos visto que una característica importante de la ecuación de ondas es que conserva la energía

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t(x, t)^2 + u(x, t)^2 dx.$$

La ecuación del calor tiene un comportamiento radicalmente distinto. Si definimos

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t)^2 dx,$$

y calculamos (para el caso $D = 1$)

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 2 \int_{\mathbb{R}} u_t(x, t)u(x, t)dx = 2 \int_{\mathbb{R}} u_{xx}(x, t)u(x, t)dx = -2 \int_{\mathbb{R}} (u_x(x, t))^2 dx \leq 0.$$

$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t)^2 dx$ es un funcional de Lyapunov para la ecuación del calor

Por lo tanto, sin más que integrar en tiempo la igualdad anterior, obtenemos que la ecuación del calor tiene un comportamiento disipativo:

$$\mathcal{E}(t) + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (u_x(x, s))^2 dx ds = \mathcal{E}(0).$$

De nuevo, esta propiedad nos sirve para estudiar la unicidad de soluciones. En efecto, consideremos los problemas (similares a (34))

$$(35a) \quad u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$(35b) \quad u = f_1, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\},$$

$$(36a) \quad v_t = v_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$(36b) \quad v = f_2, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Es decir, consideramos el mismo problema de valores iniciales para la ecuación del calor para dos iniciales distintos f_1 y f_2 . Asumamos que las soluciones u y v existen y satisfacen $\mathcal{E} < \infty$. Entonces la función $w = u - v$ satisface

$$(37a) \quad w_t = w_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

$$(37b) \quad w = f_1 - f_2, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}.$$

(¿por qué?). Usando el principio de disipación de la energía visto anteriormente obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} w(x, t)^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (w_x(x, s))^2 dx ds = \int_{\mathbb{R}} (f_1(x) - f_2(x))^2 dx.$$

En particular, la unicidad podemos probarla con un argumento de contradicción. Asumamos que el problema (34) tuviese dos soluciones distintas u y v (para el mismo dato inicial f) y que dichas soluciones verifican $\mathcal{E}(t) < \infty$. Entonces se tendría que $w = u - v$ verificaría

$$\int_{\mathbb{R}} w(x, t)^2 dx + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (w_x(x, s))^2 dx ds = 0.$$

Como el lado de la izquierda es positivo tenemos que w debe ser idénticamente cero. Pero entonces $u = v$ y obtenemos la contradicción.

Puesto que la ecuación modela una temperatura, tiene sentido pensar que tanto el dato inicial como la solución sean funciones positivas. Entonces observamos que

$$\mathcal{E}^1(t) = \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)| dx = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$$

se conserva

$$\mathcal{E}^1(t) = \mathcal{E}^1(0).$$

Que \mathcal{E}^1 se conserve significa que la cantidad total de calor se preserva.

Ejemplo 13. Sea u una solución que decae a cero si $|x| \rightarrow \infty$ y positiva (esta hipótesis no es realmente necesaria) de la ecuación del calor (34). Fijemos $p \geq 1$. Demuestra que

$$\mathcal{E}^p(t) = \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^p dx$$

decae. Es decir, que se verifica

$$\mathcal{E}^p(t) \leq \mathcal{E}^p(0).$$

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}^p(t) &= \int_{\mathbb{R}} p(u(x, t))^{p-1} u_t(x, t) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(u(x, t))^{p-1} u_{xx}(x, t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} p[(u(x, t))^{p-1}]_x u_x(x, t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} p(p-1)(u(x, t))^{p-2} (u_x(x, t))^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ahora basta integrar en tiempo para concluir. □

3.3.5 Velocidad infinita de propagación

Hemos visto que tanto la ecuación del transporte como la de ondas tienen velocidad finita de propagación c . Esto, de nuevo, vuelve a ser radicalmente diferente en el caso de la ecuación del calor. Observamos que la ecuación del calor (34) se puede escribir como

$$u_t = (uv)_x,$$

con

$$v = (\log(u))_x.$$

De esta manera tenemos que la ecuación del calor, de alguna manera (nada rigurosa), toma la forma de una ecuación de transporte

$$u_t = u_x v + uv_x.$$

Si, por un momento nos olvidamos el término uv_x , tenemos que, tal cual habíamos visto al principio de este capítulo, la velocidad viene dada por v en el término $u_x v$. Consideremos ahora por un momento un dato inicial f tal que existe $R > 0$ y se cumple

$$f(x) = 0 \quad \forall |x| > R.$$

Entonces, en los puntos donde f es cero se tiene que la velocidad v toma *formalmente* el valor $\pm\infty$. De este razonamiento totalmente formal (y nada riguroso) podemos esperar que la ecuación del calor se vuelva estrictamente positiva para todo x si $t > 0$, o, de otra manera, que la velocidad de propagación de la solución es infinita. Por el momento nos conformaremos con este 'argumento'. Daremos una demostración rigurosa de este hecho más adelante en el curso.

3.4 LA ECUACIÓN DE LAPLACE

3.4.1 Derivación usando estados estacionarios

Consideramos por un momento la EDO

$$y_t = y(1 - y), \quad y(0) = 0,5.$$

Queremos calcular

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t).$$

Podríamos calcular la solución explícitamente, sin embargo para saber el límite de la solución no nos hace falta. Lo que hacemos es resolver

$$0 = y(1 - y).$$

Así encontramos que los estados estacionarios son

$$y_* = 0, \quad y^* = 1 \quad (\text{las soluciones de } 0 = y(1 - y)).$$

Además, es fácil ver que $y_t > 0$ si $0 < y < 1$, por lo que el estado estacionario estable es y^* .

Podemos hacernos la misma pregunta en el caso de una EDP. Así, podemos considerar la ecuación del calor (34) y sus estados estacionarios. Como son estados estacionarios no dependen del tiempo, es decir,

$$u_t^* = 0.$$

Sin embargo, pueden depender del espacio. Por lo tanto, los estados estacionarios de la ecuación del calor satisfacen la ecuación de Laplace

$$(38) \quad 0 = u_{xx}^*(x).$$

Cuando la incógnita u^ depende de varias variables espaciales, la ecuación de Laplace toma la forma*

$$-\Delta u = 0.$$

3.4.2 Derivación usando la curvatura

Consideremos la curva dada como el grafo de $f(x)$:

$$\Gamma = \{(x, f(x))\}.$$

Sabemos que

$$\tau = \frac{(1, f_x(x))}{\sqrt{1 + (f_x(x))^2}},$$

es un vector tangente de norma 1. Por lo tanto

$$\tau \cdot \tau = 1$$

y, derivando en x obtenemos

$$\tau_x \cdot \tau = 0$$

Es decir, que τ_x tiene que ser un vector normal a la curva. Definimos el vector normal (con norma 1) como

$$n = \frac{\tau_x}{|\tau_x|}.$$

Además, podemos usarlo para medir la *curvatura* de la curva. Para ello definimos la curvatura

$$\kappa(x) = \frac{\tau_x \cdot n}{\sqrt{1 + (f_x(x))^2}} = \frac{|f_{xx}(x)|}{(1 + (f_x(x))^2)^{3/2}}.$$

Por lo tanto la curvatura (con signo indicando hacia dónde nos curvamos conforme recorremos la curva) se define como

$$\kappa(x) = \frac{f_{xx}(x)}{(1 + (f_x(x))^2)^{3/2}}.$$

Vemos entonces que si queremos, dada una función $c(x)$, construir un grafo cuya curvatura sea $c(x)$ tenemos que resolver el problema

$$\frac{f_{xx}(x)}{(1 + (f_x(x))^2)^{3/2}} = c(x),$$

y, si asumimos que la función tiene derivada pequeña (y esto no impone que la segunda derivada sea pequeña), llegamos a la ecuación de Laplace no homogénea (también llamada ecuación de Poisson)

$$(39) \quad f_{xx}(x) = c(x).$$

De la misma manera, la curvatura (media) para una superficie dada como el grafo de una función

$$S = \{(x, y, f(x, y))\},$$

viene dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + (f_x)^2) f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + (f_y)^2) f_{xx}}{(1 + (f_x)^2 + (f_y)^2)^{3/2}}.$$

Por lo tanto, si prescribimos la curvatura media de una superficie y despreciamos los términos no-lineales llegamos a

$$(40) \quad \Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = c(x, y).$$

3.4.3 No unicidad de soluciones

Consideremos por un momento la ecuación de Laplace (38). Es claro que cualquier función lineal

$$u(x) = ax + b,$$

será solución de la ecuación. Observamos que la única solución con energía

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}} (u(x))^2 dx < \infty$$

es $u \equiv 0$. Este (y otros) tipos de condiciones son necesarias muchas veces para distinguir las soluciones *físicas* (que representan la realidad) de otras soluciones. Por ejemplo, antes dijimos que la ecuación del calor tenía una solución única... y eso es correcto *en el conjunto de funciones físicas que cumplen* $\mathcal{E}(t) < \infty$.

3.5 CLASIFICACIÓN Y REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA DE EDP DE SEGUNDO ORDEN

En esta sección vamos a considerar un operador diferencial de segundo orden general de la forma

$$\mathcal{L}[u] = Au_{xx}(x, y) + Bu_{xy}(x, y) + Cu_{yy}(x, y) + Du_x(x, y) + Eu_y(x, y) = f,$$

con $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$ y $\min\{|A|, |B|, |C|\} > 0$. Lo primero que observamos es que si

- $A = -1, E = 1, B = C = D = 0$, la ecuación anterior se reduce a la ecuación del calor,

- $A = -1, C = 1, B = D = E = 0$, la ecuación anterior se reduce a la ecuación de ondas,
- $A = 1, C = 1, B = D = E = 0$, la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Laplace.

Sin embargo, salvo esos casos particulares la ecuación $\mathcal{L}[u] = f$ parece muy distinta a todas las ecuaciones vistas anteriormente. En esta sección vamos a ver cómo se clasifican las ecuaciones generales de segundo orden en tres familias principales: las similares a la ecuación del calor, las similares a la ecuación de ondas y las similares a la ecuación de Laplace.

Recordemos la clasificación de las curvas cuadráticas (secciones cónicas)

$$Ax^2 + Cy^2 + Bxy + Dx + Ey = f.$$

La parte principal de estas curvas está contenida en la matriz

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}.$$

De hecho, los términos de mayor orden se pueden escribir como

$$(x, y) \mathcal{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

De los cursos básicos donde se estudia geometría euclídea sabemos que las cónicas se clasifican en base al determinante de la matriz \mathcal{M}

$$-\det = \frac{B^2}{4} - AC.$$

Concretamente, la curva considerada será una

- parábola si $B^2 - 4AC = 0$ (por ejemplo, $A = -1, E = 1, B = C = D = 0$),
- hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$ (por ejemplo, $A = -1, C = 1, B = D = E = 0$),
- elipse si $B^2 - 4AC < 0$ (por ejemplo, $A = 1, C = 1, B = D = E = 0$).

Así, por analogía con las curvas cuadráticas anteriores, las tres familias de EDPs son

- parabólicas si $B^2 - 4AC = 0$ (la ecuación del calor $A = -1, E = 1, B = C = D = 0$),
- hiperbólicas si $B^2 - 4AC > 0$ (la ecuación de ondas $A = -1, C = 1, B = D = E = 0$),
- elípticas si $B^2 - 4AC < 0$ (la ecuación de Laplace $A = 1, C = 1, B = D = E = 0$).

Ejemplo 14 (Parcial 2, curso 2018-2019). Clasifica la siguiente EDP en función de si es elíptica, hiperbólica o parabólica

$$u_{tt} + u_t = u_x$$

Solución. No debemos dejar que el nombre de las variables nos confunda. Si viésemos la ecuación

$$v_t = v_{xx} + v_x$$

tendríamos claro que es una ecuación parabólica. Pues ahora basta con copiar el razonamiento para u y observar que

$$A = B = 0, C = D = E = 1.$$

□

3.6 CONCLUSIONES

Algunos de los puntos más importantes de lo visto anteriormente son:

Para ecuaciones de transporte:

$$A(x, t, u(x, t))u_t(x, t) + B(x, t, u(x, t))u_x(x, t) = C(x, t, u(x, t))$$

- Resolución por el método de las características.
- Tienen velocidad finita de propagación.
- Se trata de ecuaciones de tipo ondas.

Para la ecuación de ondas:

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

- Resolución por el método de las características.
- Tienen velocidad finita de propagación.
- Conserva la energía

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t(x, t)^2 + u_x(x, t)^2 dx,$$

y, en la clase de funciones con energía finita, la solución es única.

Muchos de estos puntos se extienden a ecuaciones hiperbólicas (de tipo ondas) más generales

$$u_{tt}(\vec{x}, t) = \sum a_{i,j} u_{x_i x_j}(\vec{x}, t).$$

Para la ecuación del calor:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

- Método del scaling
- Tienen velocidad infinita de propagación.
- Disipa la energía

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t)^2$$

y, en la clase de funciones con energía finita, la solución es única.

De nuevo, muchos de estos puntos se extienden a ecuaciones parabólicas (de tipo calor) más generales

$$u_t(\vec{x}, t) = \sum a_{i,j} u_{x_i x_j}(\vec{x}, t).$$

Para la ecuación de Laplace (o Poisson):

$$u_{xx}(x) = f(x)$$

- La solución no depende del tiempo, por lo que se puede pensar como soluciones estacionarias de ecuaciones de tipo ondas o calor,
- Es obvio que no hay unicidad de soluciones si no se impone algún tipo de condición (como puede ser buscar funciones con energía finita).

De nuevo, muchos de estos puntos se extienden a ecuaciones elípticas (de tipo Laplace) más generales

$$\sum a_{i,j} u_{x_i x_j}(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Remarcamos que la falta de unicidad de soluciones, aunque lo hemos visto usando la ecuación de Laplace como ejemplo, también para otras EDP como la ecuación del calor. Dicho de otra manera, la unicidad de soluciones depende de la clase de funciones donde se mira. En concreto, si algún tipo de energía no es finita, la unicidad de solución no suele darse.

3.7 EJERCICIOS SUGERIDOS

Ejercicio 10 (Ejercicio para practicar el método de la energía). Sea la EDP

$$u_t = u_x - u, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Asumamos que la solución existe y cumple que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

SIN USAR LA FORMA EXPLÍCITA DE LA SOLUCIÓN, calcula

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^2(x, t) dx.$$

Ejercicio 11 (Ejercicio para practicar el método de las características). Sea la EDP

$$u_t = u_x - u, \quad u(x, 0) = f(x).$$

Resuelve dicha EDP y calcula

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^2(x, t) dx.$$

Ejercicio 12 (Ejercicio para practicar el método de las características). Resuelve la siguiente EDP:

$$u_t = u_x + u \log(u), \quad u(x, 0) = f(x).$$

Ejercicio 13 (Ejercicio para practicar la fórmula de D'Alembert). Sea la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, u(x, 0) = \max\{1 - x^2, 0\}, u_t(x, 0) = 0.$$

Cuánto tarda en llegar la onda al punto $x = 10$?

Ejercicio 14 (Ejercicio para practicar la escritura como sistemas de EDPs). Escribe la siguiente ecuación de ondas

$$u_{tt} - x^2 u_{xx} = 0$$

como un sistema de ecuaciones de transporte.

4 | PROBLEMAS DE VALORES DE FRONTERA

Vamos a considerar de nuevo el movimiento de una cuerda vibrante. Con dicho problema físico en mente estudiamos la ecuación de ondas. Sin embargo, en el capítulo anterior tratamos el problema de valores iniciales, es decir, donde la cuerda se asumía de longitud infinita. Obviamente, dicha hipótesis está muy lejos de ser razonable. Así llegamos a considerar cuerdas de longitud finita, lo que da lugar a *extremos*.

Por ejemplo, si consideramos una cuerda cuyos extremos (localizados en $x = 0$ y $x = \pi$) están fijos, cuya posición inicial viene dada por $f(x)$ y cuya velocidad inicial es idénticamente cero tenemos que considerar **el problema de valores de frontera** siguiente

$$(41a) \quad u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T)$$

$$(41b) \quad u = f, \quad (x, t) \in (0, \pi) \times \{0\}$$

$$(41c) \quad u_t = g, \quad (x, t) \in (0, \pi) \times \{0\}$$

$$(41d) \quad u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$(41e) \quad u(\pi, t) = 0 \quad t \in (0, T).$$

Uno podría en principio intentar usar la fórmula de D'Alembert vista en el capítulo anterior. Por ejemplo, si $g = 0$ basta con considerar el problema de valores iniciales con

$$u(x, 0) = \tilde{f},$$

donde \tilde{f} es una extensión impar 2π periódica de f .

Sin embargo, vamos a optar por una aproximación más sistemática y, por lo tanto, aplicable de manera más fácil a distintos problemas. La idea básica es usar el *principio de superposición* para escribir la solución como una suma de ondas sencillas (de tipo seno y coseno). Para ello observamos que

$$u_n(x, t) = \cos(nt) \sin(nx)$$

es solución para todo número natural n para el caso $c = 1$.

La perspectiva desde la que vemos es te capítulo se puede resumir de la siguiente manera:

De dónde venimos: En el capítulo anterior introdujimos las principales ecuaciones en derivadas parciales cuando la variable espacial $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto no había fronteras en el espacio.

A dónde vamos: En este capítulo vamos a considerar varias ecuaciones en derivadas parciales cuando $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$. Así, la variable espacial *vive* en un dominio acotado y la función buscada debe satisfacer ciertas condiciones de borde en dicha frontera. Para encontrar la solución general de estos problemas vamos a presentar el método de separación de variables.

*Cuando la incógnita debe tener cierto valor fijo en la frontera se dice que el problema tiene **condiciones de borde Dirichlet**. Si además el valor es 0, se dicen **homogéneas**.*

Los objetivos de este capítulo son

Objetivos mínimos	Objetivos avanzados
Ser capaz de usar el método de separación de variables para encontrar soluciones generales de EDPs	Saber los obstáculos para aplicar el método de separación de variables a una ecuación diferencial
Conocer las diferentes condiciones de borde	Conocer los problemas de autovalores

4.1 LA ECUACIÓN DE ONDAS

4.1.1 Extremos fijos

Supongamos que queremos estudiar el movimiento de una cuerda cuyos extremos están fijos a altura determinada (esta altura en nuestras coordenadas favoritas se asume que vale 0). Llegamos al problema (41) con $c = 1$ y velocidad inicial arbitraria

$$(42a) \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T)$$

$$(42b) \quad u = f, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(42c) \quad u_t = g, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(42d) \quad u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$(42e) \quad u(L, t) = 0 \quad t \in (0, T),$$

donde L es fijo (pero arbitrario).

Ejemplo 15. Resuelve (42)

Solución. Queremos usar esa idea de que las funciones de tipo

$$u_n(x, t) = \cos(nt) \sin(nx)$$

resuelven el problema con $L = \pi$. Así buscamos una solución de variables separadas con la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Usando este *ansatz* llegamos a que X y T no pueden ser arbitrarias sino que deben satisfacer

$$T_{tt}(t)X(x) = T(t)X_{xx}(x),$$

de donde

$$\frac{T_{tt}(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)}.$$

Puesto que tenemos dos funciones de dos variables distintas que toman el mismo valor, dicho valor debe ser constante, digamos $-\lambda$. Fijémonos de momento en la EDO correspondiente a la variable espacial x :

$$(43a) \quad X_{xx} = -\lambda X \quad x \in (0, L)$$

$$(43b) \quad X(0) = 0,$$

$$(43c) \quad X(L) = 0.$$

Este es un problema de valores de frontera de los del capítulo 2. Vamos a distinguir tres casos en función del valor de λ . Si $\lambda = 0$ llegamos a que

$$X_{xx} = 0,$$

de donde

$$X(x) = c_1x + c_2,$$

que no cumple las condiciones de frontera (42d,e). Observamos que, en cuanto que EDO de segundo orden lineal con coeficientes constantes, podemos buscar soluciones de la forma

$$e^{x\theta}.$$

Así vemos que

$$\theta^2 = -\lambda,$$

y nos queda la solución

$$X(x) = C_1e^{x\theta^+} + C_2e^{x\theta^-}.$$

Si $\lambda < 0$ llegamos a $\theta^\pm = \pm\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R}$. Estas soluciones llevan a una solución general del problema que es combinación lineal de exponenciales reales que tampoco cumplen (42d,e) salvo en el caso de $C_1 = C_2 = 0$. Si $\lambda > 0$ nos queda $\theta^\pm = \pm i\sqrt{\lambda} \in \mathbb{C}$. Usando la fórmula de Euler

$$e^{i\zeta} = \cos(\zeta) + i \sin(\zeta),$$

llegamos a

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1e^{x\theta^+} + C_2e^{x\theta^-} \\ &= C_1(\cos(\sqrt{\lambda}x) + i \sin(\sqrt{\lambda}x)) + C_2(\cos(\sqrt{\lambda}x) - i \sin(\sqrt{\lambda}x)). \end{aligned}$$

Como queremos soluciones reales de este problema de valores de frontera tenemos que imponer que las constantes (complejas) C_i sean conjugadas

$$C_1 = \frac{a + bi}{2}, \quad C_2 = \overline{C_1} = \frac{a - bi}{2}.$$

Por lo tanto

$$X(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) - b \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Si ahora imponemos que X satisfaga las condiciones de borde llegamos a que

$$X(0) = 0 \Rightarrow a = 0,$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ o } \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

La opción $b = 0$ no es útil porque impondría $u(t, x) = 0$ y esa función no cumple los datos iniciales (42b,c). Por lo tanto se necesita

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

y concluimos

$$(44) \quad X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Ahora pasamos a estudiar el problema para la variable temporal

$$(45) \quad T_{tt} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}T.$$

De nuevo las soluciones de este problema tiene forma de senos y cosenos:

$$(46) \quad T(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right).$$

Usando que el problema (42) es lineal, podemos usar el principio de superposición y concluir que

$$(47) \quad \begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \end{aligned}$$

resuelve (42a,d,e). Para resolver (42b,c) necesitamos

$$(48) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

$$(49) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

□

Cuándo una función f admite un desarrollo en serie de la forma anterior (llamadas series de Fourier) lo veremos más adelante. Por el momento asumiremos que las funciones f y g tienen dicha expresión.

*Cuando es la derivada espacial de la incógnita la que debe tener cierto valor fijo en la frontera se dice que el problema tiene **condiciones de borde Neumann***

4.1.2 Extremos libres

Supongamos ahora que queremos estudiar el movimiento de una cuerda cuyos extremos están libres. Como en los extremos no actúa ninguna fuerza neta llegamos al problema

$$(50a) \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T)$$

$$(50b) \quad u = f, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(50c) \quad u_t = g, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(50d) \quad u_x(0, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$(50e) \quad u_x(L, t) = 0 \quad t \in (0, T),$$

donde hemos usado la expresión de la fuerza obtenida en el capítulo 3.

Ejemplo 16. Resuelve (50)

Solución. Buscamos soluciones en forma de variables separadas

$$u(t, x) = X(x)T(t).$$

Siguiendo los pasos anteriores llegamos al problema

$$(51a) \quad X_{xx} = -\lambda X \quad x \in (0, L)$$

$$(51b) \quad X_x(0) = 0,$$

$$(51c) \quad X_x(L) = 0.$$

De nuevo, separamos en 3 casos distintos según el signo de λ . El caso $\lambda = 0$ ahora tiene como solución

$$X_0(x) = C_0.$$

El caso $\lambda < 0$ se descarta con el argumento del ejemplo 15 anterior y llegamos a que el caso más interesante (el que no da soluciones idénticamente cero) es

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

$$(52) \quad X_n(x) = C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Usando que

$$1 = \cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right),$$

y que

$$X_0(x) = C_0 \cdot 1,$$

observamos que (52) se puede extender para cubrir también el caso $\lambda = 0$ anteriormente. El caso $\lambda = 0$ aparece en este ejemplo (y no aparece en el ejemplo 15) debido a las condiciones de frontera. De la misma manera, encontramos el problema (45) para la función de la variable temporal. Para los $\lambda > 0$ la solución de dicho problema viene dada por (46). En el caso $\lambda = 0$ (y tenemos que considerar este nuevo caso $\lambda = 0$ debido a las condiciones de frontera), nos queda que

$$T_{tt} = 0,$$

de donde

$$T_0(t) = A_0 + B_0t.$$

Así obtenemos que

$$(53) \quad \begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &\quad + A_0 + B_0t, \end{aligned}$$

resuelve (50a,d,e). Para los datos iniciales (50b,c) necesitamos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

De nuevo simplemente asumimos que disponemos de dicha expansión de las funciones f y g en serie de Fourier de cosenos. \square

4.1.3 Otras condiciones de frontera

No es difícil imaginarse problemas físicos con otras condiciones de frontera. Así, si uno considera una cuerda vibrante que tenga un extremo fijo y otro extremo libre llega al problema

$$(54a) \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T)$$

$$(54b) \quad u = f, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(54c) \quad u_t = g, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(54d) \quad u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$(54e) \quad u_x(L, t) = 0 \quad t \in (0, T).$$

Por supuesto, uno puede considerar el caso donde el extremo fijo no está anclado a una altura determinada sino que está anclado a un objeto móvil cuya altura es una función del tiempo (digamos $h(t)$). De esta manera uno formula

$$(55a) \quad u_{tt} = u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T)$$

$$(55b) \quad u = f, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(55c) \quad u_t = g, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(55d) \quad u(0, t) = h(t), \quad t \in (0, T)$$

$$(55e) \quad u_x(L, t) = 0 \quad t \in (0, T),$$

y así podríamos seguir...

4.2 LA ECUACIÓN DEL CALOR

4.2.1 Extremos con temperatura fija

Consideremos ahora cómo se difunde el calor en un alambre de longitud fija L cuyos extremos se encuentran a temperatura constante cero. De esta manera uno llega al siguiente problema de valores de frontera para la ecuación del calor

$$(56a) \quad u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T)$$

$$(56b) \quad u = f, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(56c) \quad u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$(56d) \quad u(L, t) = 0 \quad t \in (0, T).$$

Ejemplo 17. Resuelve (56)

Solución. De nuevo buscamos una solución de variables separadas con la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Entonces se debe tener que

$$T_t(t)X(x) = T(t)X_{xx}(x),$$

de donde

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)}.$$

Puesto que tenemos dos funciones de dos variables distintas que toman el mismo valor, dicho valor debe ser constante, digamos $-\lambda$. Fijémonos de momento en la EDO correspondiente a la variable espacial x :

$$(57a) \quad X_{xx} = -\lambda X \quad x \in (0, L)$$

$$(57b) \quad X(0) = 0,$$

$$(57c) \quad X(L) = 0.$$

De manera análoga a como lo hicimos para la ecuación de ondas llegamos a (44)

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Ahora pasamos a estudiar el problema para la variable temporal

$$(58) \quad T_t = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}T.$$

Ahora, en lugar de tener soluciones en forma de senos y cosenos tenemos soluciones de tipo exponencial

$$(59) \quad T(t) = a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Usando que el problema (56) es lineal, podemos usar el principio de superposición y concluir que

$$(60) \quad u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

$$(61) \quad = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

resuelve (56a,c,d). Para resolver (56b) necesitamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

□

4.2.2 Extremos aislados

Ahora queremos estudiar cómo se difunde el calor en un alambre de longitud fija L cuyos extremos están recubiertos de aislante. De esta manera uno llega al siguiente problema de valores de frontera para la ecuación del calor

$$(62a) \quad u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, T)$$

$$(62b) \quad u = f, \quad (x, t) \in (0, L) \times \{0\}$$

$$(62c) \quad u_x(0, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

$$(62d) \quad u_x(L, t) = 0 \quad t \in (0, T).$$

Ejemplo 18. Resuelve (62)

Solución. Buscamos soluciones en forma de variables separadas

$$u(t, x) = X(x)T(t).$$

Siguiendo los pasos anteriores llegamos al problema

$$(63a) \quad X_{xx} = -\lambda X \quad x \in (0, L)$$

$$(63b) \quad X_x(0) = 0,$$

$$(63c) \quad X_x(L) = 0.$$

De nuevo, separamos en 3 casos distintos según el signo de λ . El caso $\lambda = 0$ nos da

$$X_0(x) = c_1x + c_2 \cdot 1,$$

y, usando las condiciones de borde, $c_1 = 0$ y c_2 es arbitraria. El caso $\lambda < 0$ da lugar a exponenciales reales que llevan a la función idénticamente cero al usar las condiciones de borde. Así que llegamos a que el caso importante es

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \text{ para } n \in \mathbb{N},$$

y

$$X_n(x) = C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

donde, de nuevo, entendemos que

$$X_0(x) = C_0 \cdot 1 = C_0 \cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right).$$

De la misma manera, encontramos el problema (58) para la función de la variable temporal. Para los $\lambda > 0$, la solución de dicho problema viene dada por (59). Para el caso $\lambda = 0$ concluimos que

$$T_t = 0,$$

de donde T_0 es una constante. Finalmente obtenemos que

$$(64) \quad u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$$

$$(65) \quad = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

resuelve (62a,c,d). Para el dato inicial (62b) necesitamos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

□

4.2.3 Otras condiciones de frontera

De nuevo, uno puede imaginar otros casos donde las condiciones de frontera fuesen distintas. Por ejemplo, con un extremo siendo calentado de una manera dada por la función $h(t)$ mientras que el otro extremo está aislado, etc.

4.3 LA ECUACIÓN DE LAPLACE

4.3.1 Condición de borde Dirichlet

Consideramos el problema dado por

$$(66a) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in (0, L) \times (0, L)$$

$$(66b) \quad u(x, 0) = f, \quad x \in (0, L)$$

$$(66c) \quad u(x, L) = g, \quad x \in (0, L)$$

$$(66d) \quad u(0, y) = 0, \quad y \in (0, L)$$

$$(66e) \quad u(L, y) = 0 \quad y \in (0, L).$$

Ejemplo 19. Resuelve (66)

Solución. Buscamos soluciones en forma de variables separadas

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Así obtenemos

$$X_{xx}Y + XY_{yy} = 0,$$

de donde

$$\frac{X_{xx}}{X} = -\frac{Y_{yy}}{Y} = -\lambda.$$

Siguiendo los pasos anteriores llegamos al problema

$$(67a) \quad X_{xx} = -\lambda X \quad x \in (0, L)$$

$$(67b) \quad X(0) = 0,$$

$$(67c) \quad X(L) = 0,$$

donde hemos usado que

$$u(0, y) = X(0)Y(y) = 0, \quad u(L, y) = X(L)Y(y) = 0.$$

Ahora separamos en 3 casos en función del signo de λ . Si $\lambda = 0$ llegamos a

$$X(x) = ax + b$$

y las condiciones de borde fuerzan

$$X(x) = 0.$$

Si $\lambda < 0$ obtenemos

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Como son exponenciales reales las condiciones de frontera vuelven a forzar que $X(x)$ sea idénticamente cero. Por lo tanto nos queda el caso $\lambda > 0$ y, usando las condiciones de borde, llegamos a

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x \frac{n\pi}{L}\right).$$

La ecuación para Y es

$$Y_{yy} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}Y,$$

de donde

$$Y_n(y) = a_n e^{yn\pi/L} + b_n e^{-yn\pi/L}.$$

Por lo tanto,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right) \left(A_n \sinh\left(y\frac{n\pi}{L}\right) + B_n \cosh\left(y\frac{n\pi}{L}\right) \right).$$

Sólo quedaría imponer las condiciones de borde en y y usar las *series de Fourier* de f y g para concluir la solución. \square

4.3.2 Condición de borde Neumann

Ahora consideramos el problema

$$(68a) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in (0, L) \times (0, L)$$

$$(68b) \quad u(x, 0) = f, \quad x \in (0, L)$$

$$(68c) \quad u(x, L) = g, \quad x \in (0, L)$$

$$(68d) \quad u_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, L)$$

$$(68e) \quad u_x(L, y) = 0 \quad y \in (0, L).$$

Ejemplo 20. Resuelve (68)

Solución. Buscamos soluciones en forma de variables separadas

$$u(y, x) = X(x)Y(y).$$

Siguiendo los pasos anteriores llegamos al problema

$$(69a) \quad X_{xx} = -\lambda X \quad x \in (0, L)$$

$$(69b) \quad X_x(0) = 0,$$

$$(69c) \quad X_x(L) = 0.$$

Ahora separamos en 3 casos en función del signo de λ . Si $\lambda = 0$ llegamos a

$$X(x) = C.$$

Si $\lambda < 0$ la única solución que obtenemos es la idénticamente cero. Por lo tanto nos queda el caso $\lambda > 0$ y, usando las condiciones de borde, llegamos a

$$X_n(x) = c_n \cos\left(x\frac{n\pi}{L}\right).$$

La ecuación para Y es

$$Y_{yy} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}Y,$$

de donde

$$Y_n(y) = a_n e^{yn\pi/L} + b_n e^{-yn\pi/L}$$

si $\lambda \neq 0$ y

$$Y_0 = a_0 y + b_0$$

si $\lambda = 0$. Por lo tanto,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(x \frac{n\pi}{L}\right) \left(A_n \sinh\left(y \frac{n\pi}{L}\right) + B_n \cosh\left(y \frac{n\pi}{L}\right) \right) + A_0 y + B_0.$$

De nuevo quedaría imponer las condiciones de borde en y y usar las *series de Fourier* de f y g para concluir la solución. \square

4.4 SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA ECUACIONES CON DERIVADAS CRUZADAS

Ejemplo 21 (De [11]). Separa variables en

$$u_{xx} + u_{xy} + u_x = 0, \quad (x, y) \in (0, L) \times (0, L)$$

Solución. Buscamos una solución

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Llegamos a

$$X_{xx}Y + X_x Y_y + X_x Y = 0.$$

Dividiendo por XY llegamos a

$$\frac{X_{xx}}{X} + \frac{X_x}{X} \frac{Y_y}{Y} + \frac{X_x}{X} = 0.$$

Si operamos llegamos a

$$\frac{X}{X_x} \left(\frac{X_{xx}}{X} + \frac{X_x}{X} \right) = -\frac{Y_y}{Y}.$$

Finalmente,

$$\frac{X_{xx}}{X_x} + 1 = -\frac{Y_y}{Y}.$$

Usando los argumentos vistos anteriormente obtenemos las siguientes EDOs

$$Y_y = \lambda Y,$$

y

$$X_{xx} + X_x = -\lambda X_x.$$

Observamos que, al tener la dependencia en x separada de la dependencia en y podríamos (si nos hubiesen dado condiciones de borde) resolver las EDOs anteriores para encontrar una solución general. **Este ejemplo muestra que a veces se puede aplicar separación de variables a ecuaciones con derivadas cruzadas.** \square

Ejemplo 22. Separa variables en

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in (0, L) \times (0, L)$$

Solución. Buscamos una solución

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Llegamos a

$$X_{xx}Y + 2X_xY_y + XY_{yy} = 0.$$

Dividiendo por XY llegamos a

$$\frac{X_{xx}}{X} + 2\frac{X_x}{X}\frac{Y_y}{Y} + \frac{Y_{yy}}{Y} = 0.$$

Observamos que, al no tener la dependencia en x separada de la dependencia en y no podemos escribir las EDOs que nos llevarían a la solución general. Este ejemplo muestra que a veces no se puede aplicar separación de variables a ecuaciones con derivadas cruzadas. Aquí podríamos intentar solucionar el problema notando que la ecuación se puede escribir como

$$(\partial_x + \partial_y)^2 u = (\partial_x^2 + 2\partial_x\partial_y + \partial_y^2)u = 0.$$

□

4.5 PROBLEMAS DE AUTOVALORES

Hemos visto varios ejemplos donde buscar soluciones con variables separadas

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

llevaba naturalmente a EDOs donde había dos incógnitas, la función que verifica la EDO y un parámetro que denotamos λ y que servía para ligar la función X con la función T . Un ejemplo de lo anterior es la ecuación

$$X_{xx}(x) = -\lambda X(x),$$

con condiciones de borde

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Más generalmente se llega a ecuaciones como

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u = \lambda w(x)u$$

con condiciones de borde

$$X(0) = X(L) = 0,$$

o similares. En estos problemas el objetivo es encontrar los llamados autovalores λ tales que garantizan que hay solución no trivial (la solución trivial siempre se tiene). Estos problemas se conocen como *problemas de Sturm-Liouville* (ver [13] para más detalles). Aquí en vez de ver con mucho detalle la teoría para problemas de Sturm-Liouville vamos a contentarnos con resolver algunos ejemplos prácticos más.

Ejemplo 23. Resuelve el problema de Sturm-Liouville siguiente

$$u_{xx} - 2u_x + \lambda u = 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$u_x(0) = u_x(1) = 0.$$

Solución. Rápidamente nos damos cuenta de que $\lambda = 0$ y u constante es una solución. Es decir, en la jerga de los problemas de Sturm-Liouville $\lambda = 0$ y $u = 1$ son una pareja de autovalor y autofunción.

Para encontrar los demás vamos a buscar soluciones exponenciales de la EDO. Concretamente buscaremos soluciones que satisfacen la hipótesis

$$u(x) = e^{mx}.$$

Al introducir esta hipótesis en la ecuación llegamos al polinomio

$$m^2 - 2m + \lambda = 0$$

cuyas raíces son

$$m = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}.$$

Ahora vamos a separar en tres casos en función del signo de $1 - \lambda$. Antes de continuar vamos a ver el caso donde $1 - \lambda = 0$. En este caso la solución general de la EDO es

$$c_1 e^x + c_2 x e^x,$$

que choca con las condiciones de borde. Por lo tanto $\lambda = 1$ no es autovalor. Si ahora asumimos $1 - \lambda > 0$ llegamos a dos soluciones diferentes de tipo exponencial. Son estas dos exponenciales reales y como consecuencia no es posible encontrar c_1 y c_2 no triviales que den una solución que cumpla las condiciones de borde, por lo que este caso tampoco nos lleva a nuevos autovalores y autofunciones.

Finalmente queda el caso $1 - \lambda < 0$. En este caso llegamos a que la solución general tiene la forma de una combinación lineal de dos exponenciales complejas conjugadas

$$u(x) = c_1 e^x \cos(\sqrt{\lambda - 1}x) + c_2 e^x \sin(\sqrt{\lambda - 1}x).$$

Si ahora usamos las condiciones de borde, llegamos a que c_1 y c_2 resuelven el siguiente sistema

$$c_1 + \sqrt{\lambda - 1}c_2 = 0,$$

$$c_1 e \cos(\sqrt{\lambda - 1}) - c_1 e \sin(\sqrt{\lambda - 1})\sqrt{\lambda - 1} + c_2 e \sin(\sqrt{\lambda - 1}) + c_2 e \cos(\sqrt{\lambda - 1})\sqrt{\lambda - 1} = 0.$$

Tras operar llegamos a que para que dicho sistema tenga al menos una solución se hace de tener

$$\lambda \sin(\sqrt{\lambda - 1}) = 0.$$

Esta es la condición que deben cumplir los autovalores. Por un lado nos queda el que mencionamos anteriormente $\lambda = 0$ y por otro nos queda

$$\sqrt{\lambda - 1} = n\pi,$$

o

$$\lambda = 1 + n^2\pi^2,$$

con n un número natural cualquiera.

□

4.6 CONCLUSIONES

Al basarse en el principio de superposición, el método de separación de variables no funciona para EDPs no lineales.

Hemos visto que el principio de superposición unido a buscar soluciones en forma de variables separadas daba lugar a soluciones explícitas de ciertas EDPs lineales. Dichas soluciones explícitas tenían la forma de serie de funciones (senos y cosenos o, más generalmente, exponenciales complejas). Por supuesto el tipo de funciones que aparecían en la serie dependía de las condiciones de borde. Los coeficientes de esas series, llamadas **series de Fourier**, dependen de los datos iniciales (y, en ocasiones, también de los datos de frontera. Las series de Fourier dan lugar al siguiente capítulo del curso.

4.7 EJERCICIOS SUGERIDOS

Ejercicio 15 (Ejercicio para practicar el método de separación de variables). Encuentra la solución general de la siguiente EDP

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} \\u(0, t) &= 0 \\u_x(L, t) &= 0 \\u(x, 0) &= f(x) \\u_t(x, 0) &= g(x).\end{aligned}$$

Ejercicio 16 (Ejercicio para practicar el método de separación de variables). Encuentra la solución general de la siguiente EDP

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} \\u_x(0, t) &= 0 \\u(L, t) &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 17 (Ejercicio para practicar el método de separación de variables). Encuentra la solución general de la siguiente EDP

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + u_{yy} \\u(0, y, t) &= 0 \\u(L, y, t) &= 0 \\u(x, 0, t) &= 0 \\u(x, M, t) &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 18 (Ejercicio para practicar el método de separación de variables). Encuentra la solución general de la siguiente EDP

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + u_x \\u(0, y, t) &= 0 \\u(L, y, t) &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 19 (Ejercicio para practicar el método de separación de variables). Encuentra la solución general de la siguiente EDP

$$\begin{aligned}0 &= u_{xx} + u_{yy} \\ u(0, y, t) &= f(y) \\ u(L, y, t) &= 0 \\ u_x(x, 0, t) &= 0 \\ u_x(x, M, t) &= 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 20 (Ejercicio para practicar la clasificación de EDPs). Clasifica las siguientes EDPs en función de si son hiperbólicas, elípticas o parabólicas:

$$\begin{aligned}2u_t + u_{tt} &= u_{xx}, \\ 2u_{xt} + u_{tt} &= u_{xx}, \\ 2u_{xt} + u_{tt} &= -u_{xx}, \\ 2u_{xt} + u_{tt} &= -u_{xx}.\end{aligned}$$

5 | SERIES DE FOURIER

Veamos la perspectiva desde la que afrontamos este capítulo:

De dónde venimos: Hemos encontrado que un montón de problemas físicos se describen por medio de EDPs. La mayor parte de las veces dichas EDPs se ponen en un dominio acotado (un alambre, una cuerda, etc). Para resolver problemas de frontera hemos descubierto el método de separación de variables. Dicho método nos da la solución general como serie infinita de senos, cosenos, etc...

A dónde vamos: Así nos hemos encontrado con un montón de problemas de física donde la solución viene dada en términos de series infinitas de funciones. Para manejar estos artefactos necesitamos teoría nueva porque las cosas que hemos visto anteriormente no sirven. Por ejemplo, y sólo por atender a la pregunta más básica, no está nada claro como, desde la solución general, se puede encontrar la solución particular (esto es, dados f, g datos iniciales para la ecuación de ondas cómo sacar los coeficientes A_n, B_n).

Los objetivos de este capítulo son

Objetivos mínimos	Objetivos avanzados
Ser capaz de calcular series de Fourier	Comprender las diferencias de las diferentes maneras de converger
Saber cuándo y a qué converge puntualmente una serie de Fourier	Entender el fenómeno de Gibbs
Conocer la relación entre series de Fourier y soluciones particulares de EDPs	
Conocer las propiedades de las series de Fourier	

5.1 REVISITANDO LA ECUACIÓN DE ONDAS

En las secciones anteriores hemos escrito, al menos formalmente, soluciones *explícitas* de determinadas ecuaciones en derivadas parciales lineales. Decimos *al menos formalmente* porque en principio no está claro como seleccionar los coeficientes A_n y B_n que aparecen en las series anteriores. Dichos coeficientes **deben depender de los datos iniciales ya que es esa información la única que aún no hemos usado** (ver (48) y (49)).

En esta sección vamos a tratar de motivar cuál es la forma correcta que deben detener los A_n para el caso de la ecuación de ondas (42) cuya velocidad inicial sea idénticamente $g = 0$ en (42c).

Además de cómo escribir exactamente los coeficientes, hay otras preguntas relativas a las soluciones en forma de serie de Fourier igualmente importantes como por ejemplo

1. ¿cómo de regular es una serie de Fourier?
2. ¿tiene una serie de Fourier dos derivadas continuas?

Esta segunda pregunta, lejos de ser una cuestión puramente matemática, entronca con el concepto mismo de solución. En efecto, ya que si $u(x, t)$ en (47) no tuviese dos derivadas (tanto en t como en x), el sentido de ser solución de (42a) está lejos de ser el obvio...

A principios del capítulo 3 habíamos considerado el caso de $N + 2$ muelles unidos entre sí. Cuando el número de muelles tendía a infinito recuperábamos la ecuación de ondas (25). Por el problema físico considerado, se asumía que los bordes de la cuerda estaban fijos (como en (42)). Si escribimos

$$u^{(\ell)}(t) = u(\ell\delta x, t)$$

para el desplazamiento de la masa n -ésima del equilibrio, habíamos visto que el sistema de EDOs venía dado por

$$u_{tt}^{(n)} = \alpha^2(u^{(n+1)} - 2u^{(n)} + u^{(n-1)}) \text{ para } 1 \leq n \leq N,$$

donde

$$\alpha = \frac{k}{m}$$

era un parámetro físico (comparar con (26)). El hecho de que el primer y el último peso estuviesen fijos implicaba que

$$u^{(0)} = u^{(N+1)} = 0.$$

Euler resolvió el sistema anterior obteniendo

$$u^{(n)}(t) = \sum_{\ell=1}^N \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N u_0^{(j)} \sin\left(\frac{j\ell\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{n\ell\pi}{N+1}\right) \cos\left(2\alpha \sin\left(\frac{\ell\pi}{2N+2}\right) t\right),$$

donde

$$u^{(n)}(0) = u_0^{(n)}.$$

Si bien Euler fue el primero en obtener la solución explícita del sistema anterior [4], fue Lagrange el primero en intentar calcular el límite cuando el número de masas móviles N tiene a infinito. En este límite, y siendo L la longitud de la cuerda,

$$x = \frac{nL}{N+1},$$

mientras que

$$dx = \frac{L}{N+1}.$$

Lagrange, basándose en análisis dimensional, conjeturó que

$$2\alpha \sin\left(\frac{\ell\pi}{2N+2}\right) \rightarrow \frac{\ell\pi}{L}.$$

Usando que, al menos formalmente,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{L}{N+1} u_0^{(j)} \sin\left(\frac{j\ell\pi}{N+1}\right) = \int_0^L u(z, 0) \sin\left(\frac{z\ell\pi}{L}\right) dz,$$

se llega a

$$(70) \quad u(x, t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{L} \int_0^L u(z, 0) \sin\left(\frac{z\ell\pi}{L}\right) dz \sin\left(\frac{x\ell\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{L}t\right).$$

En esta fórmula ya se intuye la solución de la ecuación de ondas (47). Efectivamente, si tomamos el caso de $g \equiv 0$ (y por lo tanto $B_\ell = 0$) basta con tomar

$$A_\ell = \frac{2}{L} \int_0^L u(z, 0) \sin\left(\frac{z\ell\pi}{L}\right) dz,$$

para obtener que (47) es idéntica a (70).

Es conveniente hacer notar que en el capítulo 3 habíamos escrito el sistema de EDOs para los muelles y, sin resolverlo, después pasábamos al límite para obtener la ecuación de ondas. Sin embargo ahora primero resolvemos el sistema de EDOs y luego tomamos el límite para, en vez de obtener la ecuación de ondas, conseguir directamente su solución.

5.2 SERIES DE FOURIER EXPONENCIALES EN $[-l, l]$

5.2.1 Los coeficientes de la serie de Fourier y el espacio L^2

Sea $L > 0$ un parámetro arbitrario. Consideramos el intervalo $[-L, L]$ y las funciones

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{\pi}{L}xk}.$$

Como φ_k toma valores complejos, esta teoría sirve también para funciones que tomen valores complejos.

En esta sección (y en las siguientes) vamos a considerar **funciones $2L$ -periódicas**: es decir, funciones tales que

$$u(x) = u(x + 2L) \quad \forall x.$$

Aunque hasta ahora hemos visto desarrollos en forma de series trigonométricas (de senos y cosenos), las principales ideas de los desarrollos en series de Fourier ya están presentes en el caso de desarrollos en series de exponenciales complejas (de hecho, ambos desarrollos son esencialmente equivalentes). Como usando exponenciales las identidades son un poco más sencillas, vamos a tratar primero este caso y luego pasaremos al caso de series trigonométricas. Queremos ver cómo construir y bajo qué condiciones vamos a tener un desarrollo de la forma

Observamos que el desarrollo anterior se parece a (70) si usamos la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

$$u(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_\ell \varphi_\ell(x).$$

Vamos a olvidarnos por el momento del caso de desarrollos en serie de funciones y a centrarnos en el caso, ya conocido, del álgebra lineal en \mathbb{R}^N . En

dicho espacio (de dimensión finita N) tenemos combinaciones lineales de la forma

$$\vec{v} = \sum_{\ell=1}^N c_{\ell} \vec{\varphi}_{\ell},$$

donde $\vec{\varphi}_{\ell}$ forman una base ortonormal del espacio. Usando que $\vec{\varphi}_{\ell}$ forman una base ortonormal y escribiendo $\langle \vec{v}, \vec{\varphi}_n \rangle$ para el producto escalar, obtenemos

$$\langle \vec{v}, \vec{\varphi}_n \rangle = c_n.$$

Por lo tanto,

$$\vec{v} = \sum_{\ell=1}^N \langle \vec{v}, \vec{\varphi}_{\ell} \rangle \vec{\varphi}_{\ell},$$

Esta es la idea que queremos desarrollar en el caso de funciones. Este ejemplo motiva la definición del siguiente espacio (vectorial) de funciones:

Esta definición no es del todo exacta, pero servirá para el nivel de este curso.

$$(71) \quad L^2([-L, L]) = \left\{ u(x) \text{ tales que } \int_{-L}^L |u(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

A este espacio vectorial lo podemos dotar del producto interno

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-L}^L f(x) \overline{g(x)} dx,$$

y de la norma

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \left(\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx \right)^{0,5}.$$

Nos damos cuenta entonces de que las funciones continuas están contenidas en este espacio

$$C([-L, L]) \subset L^2([-L, L]),$$

pero además tenemos funciones discontinuas, como por ejemplo

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases},$$

o incluso funciones con algún tipo de singularidad como

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{|x|}}.$$

Lo primero es observar que, si $n \neq k$,

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle &= \int_{-L}^L \varphi_n(x) \overline{\varphi_k(x)} dx \\
 &= \int_{-L}^L \varphi_n(x) \varphi_{-k}(x) dx \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i\frac{\pi}{L}xn} e^{-i\frac{\pi}{L}xk} dx \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i\frac{\pi}{L}x(n-k)} dx \\
 &= \frac{1}{2L} \frac{1}{i\frac{\pi}{L}(n-k)} e^{i\frac{\pi}{L}x(n-k)} \Big|_{-L}^L \\
 &= \frac{1}{2L} \frac{1}{i\frac{\pi}{L}(n-k)} \left(\cos\left(\frac{\pi}{L}x(n-k)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{L}x(n-k)\right) \right) \Big|_{-L}^L \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle &= \int_{-L}^L \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(x)} dx \\
 &= \int_{-L}^L \varphi_n(x) \varphi_{-n}(x) dx \\
 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L 1 dx \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Así, las funciones $\varphi_k(x)$ son ortonormales (con respecto al producto interno que hemos definido) [3].

Por lo tanto, dada una función $u(x)$ podemos tratar de definir

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_\ell &= \langle u, \varphi_\ell \rangle \\
 &= \int_{-L}^L u(x) \overline{\varphi_\ell(x)} dx \\
 &= \int_{-L}^L u(x) \varphi_{-\ell}(x) dx,
 \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_\ell \varphi_\ell(x) \\
 &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \langle u, \varphi_\ell \rangle \varphi_\ell(x) \\
 &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} dz \varphi_\ell(x) \\
 (72) \quad &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L}x\ell}.
 \end{aligned}$$

Llegados a este punto y teniendo en cuenta la fórmula de Euler para exponenciales complejas, deberíamos comparar esta última fórmula con (70).

En un cierto sentido que especificaremos más adelante, podemos pensar que para calcular la serie de Fourier de una función lo que hacemos es realizar muchos tests o mediciones de qué hace esa función cuando la multiplicamos contra distintas exponenciales complejas e integramos. Siguiendo esta analogía se tiene que integrar contra las distintas exponenciales complejas, es decir, calcular los coeficientes de Fourier, sería, de alguna manera, realizar mediciones, de manera que si sabemos todas estas mediciones conocemos la función.

Hemos obtenido así una expresión de la función u como serie de exponenciales complejas. Sin embargo hay varias dudas razonables:

1. ¿cuándo converge la serie (72)? Cada vez que uno escribe una suma infinita tiene que preguntarse si dicha suma tiene, para empezar, sentido.
2. ¿qué funciones u se pueden desarrollar como serie de exponenciales complejas? Una manera de llegar a hacerse esta pregunta parte del hecho de que las funciones φ_n son regulares. Por lo tanto, una suma finita de ellas será igualmente regular. Así, uno podría pensar que (72) sólo tendría sentido para funciones infinitamente regulares o, por el contrario, que el hecho de que la suma en (72) sea infinita estropea la regularidad de u .
3. ¿qué significado *preciso* tiene el signo $=$ en (72)? De otra manera, ¿es verdad que, para cualquier $x_0 \in [-L, L]$ se tiene

$$u(x_0) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L} x_0 \ell} .?$$

Por supuesto, esta pregunta esta relacionada con la anterior.

5.2.2 La suma parcial de la serie de Fourier

Definimos la suma parcial

$$(73) \quad S_N u(x) = \sum_{\ell=-N}^N \hat{u}_\ell \varphi_\ell(x) = \sum_{\ell=-N}^N \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L} x \ell} .$$

Estamos interesados en ver cuándo y en qué sentido la suma parcial (73) converge.

Nuestra intención ahora es sumar la suma parcial (73) de manera que al final quede un operador integral de tipo convolución. Para eso tenemos el siguiente lema:

La función \mathcal{D}_N recibe el nombre de Núcleo de Dirichlet.

Lema 2. Tenemos que

$$(74) \quad S_N u(x) = \int_{-L}^L u(z) \mathcal{D}_N(x-z) dz,$$

con

$$\mathcal{D}_N(z) = \frac{1}{2L} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z}{2}\right)} .$$

Demostración. La prueba se basa en la fórmula de la suma parcial de la serie geométrica. Gracias a (73) tenemos que

$$\begin{aligned}
S_N u(x) &= \sum_{\ell=-N}^N \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L} x \ell} \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) \sum_{\ell=-N}^N e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} e^{i\frac{\pi}{L} x \ell} dz \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) \sum_{\ell=-N}^N e^{i\frac{\pi}{L} (x-z) \ell} dz \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) \sum_{\ell=-N}^N \left(e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)} \right)^\ell dz \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \sum_{\ell=-N}^N e^{i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \left(e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)} \right)^\ell dz \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \sum_{\ell=-N}^N \left(e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)} \right)^{N+\ell} dz \\
&= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \sum_{n=0}^{2N} \left(e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)} \right)^n dz.
\end{aligned}$$

Ahora usamos que

$$\sum_{j=0}^k r^j = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r},$$

para obtener

$$\mathcal{D}_N(x-z) = \frac{1}{2L} e^{-i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \left(\frac{1 - e^{(2N+1)i\frac{\pi}{L} (x-z)}}{1 - e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)}} \right).$$

Observamos que

$$\frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} = \frac{r^{-1/2} (1 - r^{k+1})}{r^{-1/2} (1 - r)} = \frac{r^{-1/2} - r^{k+1/2}}{r^{-1/2} - r^{1/2}}.$$

Por lo tanto, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_N(x-z) &= \frac{1}{2L} e^{-i\frac{\pi}{L} (x-z) N} \left(\frac{1 - e^{(2N+1)i\frac{\pi}{L} (x-z)}}{1 - e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)}} \right) \\
&= \frac{1}{2L} \frac{e^{-(N+1/2)i\frac{\pi}{L} (x-z)} - e^{(N+1/2)i\frac{\pi}{L} (x-z)}}{e^{-i\frac{\pi}{L} (x-z)/2} - e^{i\frac{\pi}{L} (x-z)/2}} \\
&= \frac{1}{2L} \frac{\sin \left((N + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{L} (x-z) \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{L} \frac{x-z}{2} \right)}.
\end{aligned}$$

□

Por lo tanto, para estudiar la convergencia de las series de Fourier basta con estudiar las propiedades del núcleo de Dirichlet. El siguiente lema recoge algunas propiedades básicas y, a la vez, útiles:

Lema 3. Se tiene que

$$(75) \quad \int_{-L}^L \mathcal{D}_N(z) dz = 1.$$

Como además $\mathcal{D}_N(z)$ es par, se tiene que

$$(76) \quad \int_0^L \mathcal{D}_N(z) dz = \int_{-L}^0 \mathcal{D}_N(z) dz = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Observamos que

$$\sum_{n=-N}^N e^{in\frac{\pi}{L}z} = 1 + \sum_{n=1}^N 2 \cos\left(n\frac{\pi}{L}z\right).$$

Entonces llegamos a que

$$\mathcal{D}_N(x) = \frac{1}{2L} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{L} \cos\left(n\frac{\pi}{L}z\right),$$

y se concluye el resultado. □

Ahora consideramos

$$I_N = \int_{-L}^L |u(x) - S_N u(x)|^2 dx.$$

La integral I_N aparece cuando uno considera la aproximación de una función u como suma finita de φ_ℓ de tal manera que se tenga menor error cuadrático medio. Es decir, es una especie de mínimos cuadrados.

Trivialmente se tiene

$$0 \leq I_N.$$

Observamos que

$$\|S_N u\|_{L^2}^2 = \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2,$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \overline{S_N u(x)} u(x) dx &= \int_{-L}^L \sum_{\ell=-N}^N \overline{\hat{u}_\ell \varphi_\ell(x)} u(x) dx \\ &= \sum_{\ell=-N}^N \overline{\hat{u}_\ell} \int_{-L}^L \overline{\varphi_\ell(x)} u(x) dx \\ &= \sum_{\ell=-N}^N \overline{\hat{u}_\ell} \hat{u}_\ell \\ &= \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2, \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^L S_N u(x) \overline{u(x)} dx = \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2.$$

Además, desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned}
 I_N &= \int_{-L}^L (u(x) - S_N u(x)) \overline{(u(x) - S_N u(x))} dx \\
 &= \int_{-L}^L |u(x)|^2 - \overline{S_N u(x)} u(x) - S_N u(x) \overline{u(x)} + |S_N u(x)|^2 dx \\
 &= \int_{-L}^L |u(x)|^2 dx - 2 \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2 + \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2 \\
 &= \|u(x)\|_{L^2}^2 - \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando que $I_N \geq 0$ obtenemos

$$(77) \quad \sum_{\ell=-N}^N |\hat{u}_\ell|^2 \leq \|u(x)\|_{L^2}^2,$$

y, tomando el límite $N \rightarrow \infty$, concluimos la **desigualdad de Bessel**

$$(78) \quad \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_\ell|^2 \leq \|u(x)\|_{L^2}^2.$$

Esto responde a la primera pregunta: **la serie no diverge y de converger no está del todo claro a qué (al menos en sentido de ser una función en el espacio L^2)**. De hecho, la desigualdad de Bessel sigue siendo cierta en casos más generales:

Lema 4 (Desigualdad de Bessel). Sea ϕ_n una familia ortonormal de funciones definidas en el intervalo $[a, a + 2L]$ para ciertos a y L en \mathbb{R} , i.e.

$$\int_a^{a+2L} \phi_n(x) \phi_\ell(x) dx = \delta_{\ell n}^n,$$

y sea

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|u\|_{L^2([a, a+2L])}^2,$$

y, como consecuencia,

$$c_n = \int_a^{a+2L} u(x) \phi_n(x) dx \rightarrow 0.$$

Demostración. La prueba es idéntica a la del caso $\phi_n = \varphi_n$. □

El lema 2 nos permite escribir

$$\begin{aligned}
 u(x) - S_N u(x) &= u(x) - \int_{-L}^L u(z) \mathcal{D}_N(x-z) dz \\
 &= u(x) + \int_{x+L}^{x-L} u(x-y) \mathcal{D}_N(y) dy \\
 &= u(x) - \int_{-L}^L u(x-z) \mathcal{D}_N(z) dz,
 \end{aligned}$$

ya que para una función periódica

$$\int_{a-L}^{a+L} f(x)dx = \int_{-L}^L f(x)dx \quad \forall a \geq 0.$$

Usando ahora el lema 3, obtenemos que

$$u(x) = u(x) \int_{-L}^L \mathcal{D}_N(z)dz,$$

y entonces

$$(79) \quad u(x) - S_N u(x) = \int_{-L}^L (u(x) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z)dz.$$

Por lo tanto, para probar la convergencia de las series de Fourier tenemos que estudiar las propiedades de la integral

$$\int_{-L}^L (u(x) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z)dz.$$

5.2.3 Varias nociones de convergencia

En general, los espacios de funciones tienen dimensión infinita. Eso hace que sus propiedades sean muy distintas a las de los espacios vectoriales de tipo \mathbb{R}^N . Veamos un ejemplo. Sabemos que si tenemos una sucesión acotada $\vec{v}_n \subset \mathbb{R}^N$ siempre podemos extraer al menos una subsucesión que sea convergente. Esto no ocurre en espacios de funciones en general. Por ejemplo podemos considerar la siguiente sucesión de funciones

$$v_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & \text{si } 0 \leq |x| \leq 1/n \\ 0 & \text{si } 1/n < |x| \end{cases}.$$

Observamos que v_n son todas funciones continuas. Se tiene que

$$v_n(0) = 1 \quad \forall n \neq 0,$$

mientras que

$$v_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x > 0.$$

Por lo tanto, toda subsucesión converge a

$$v_\infty(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \end{cases}.$$

De manera que no podemos elegir una subsucesión que tenga un límite continuo. Es decir, nuestra sucesión de funciones continuas cuya norma está uniformemente acotada no tiene subsucesiones convergentes. Para solucionar este y otros problemas sobre convergencia en espacios de funciones hay dos opciones. La primera opción es definir un nuevo concepto de integral, llamada integral de Lebesgue, pero eso escapa al contenido de este curso. La segunda es imponer condiciones extras de regularidad sobre las funciones que consideremos. En cualquier caso debemos ser muy precisos con varias nociones de convergencia:

Definición 1. Dadas una sucesión $u_n(x)$ y una función $u(x)$ definidas en un intervalo I ,

- u_n converge **puntualmente** a u si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) \quad \forall x \in I$$

- u_n converge **uniformemente** a u si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C(I)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in I} |u_n(x) - u(x)| = 0,$$

- u_n converge **en sentido L^2** a u si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{L^2(I)} = 0.$$

Así, volviendo an ejemplo anterior vemos que v_n converge en sentido L^2 a la función idénticamente cero mientras que converge puntualmente a la función v_∞ .

5.2.4 Teoremas de convergencia para las series de Fourier

El problema de la convergencia de las series de Fourier es un problema clásico que ha sido estudiado por multitud de matemáticos en la historia. Como cualquier tema de investigación candente no ha estado ausente de cierta polémica. Así durante el siglo XVIII y principios de XIX se creía que, dada una función continua cualquiera, la serie de Fourier de dicha función convergía puntualmente a dicha función. Es a finales del siglo XIX cuando du Bois-Reymond construye una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto. Finalmente, en 1966, Carleson [2] probó la convergencia puntual para *casi todo punto*.

Que alguna propiedad se verifique en casi todo punto quiere decir que se verifica salvo en un conjunto de longitud cero.

Antes de comenzar con los teoremas de convergencia de series de Fourier, necesitamos un lema previo:

Lema 5 (Lema de Riemann-Lebesgue). Sea $f \in C^1([-L, L])$ una función periódica. Entonces se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(z) \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right) dz = 0.$$

Demostración. Vamos a integrar por partes. Tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L}^L f(z) \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right) dz \\ &= \int_{-L}^L f(z) \partial_z \left(\frac{-\cos \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right)}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}} \right) dz \\ &= \int_{-L}^L \partial_z f(z) \frac{\cos \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right)}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}} dz \\ &\quad + \left(\frac{-f(z) \cos \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} z \right)}{\left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}} \right) \Big|_{z=-L}^{z=L}. \end{aligned}$$

El lema de Riemann-Lebesgue se puede probar con muchas menos hipótesis en la función f .

Usando la periodicidad llegamos a que

$$|I| \leq \left| \int_{-L}^L \partial_z f(z) \frac{\cos\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z\right)}{\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}} dz \right| \leq \frac{2L^2}{\pi(N+1)} \|f\|_{C^1}.$$

Por lo tanto, tomando el límite,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(z) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z\right) dz = 0.$$

□

Equipados con las tres nociones de convergencia de la definición 1, la expresión de la diferencia entre u y la suma parcial de la serie de Fourier $S_N u$ (79) y el Lema de Riemann-Lebesgue 5 ya podemos enunciar los siguientes teoremas que estudian la convergencia de las series de Fourier.

Comencemos por los teoremas que aseguran convergencia puntual:

Teorema 2. Sea $u(x) \in C^2((-L, L))$ una función periódica. Entonces la serie de Fourier converge uniformemente a u . Es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N u - u\|_{C(I)} = 0.$$

En particular, tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = u(x), \quad \forall x \in [-L, L].$$

Demostración. Tenemos que ver si

$$u(x) - S_N u(x)$$

converge a cero. Para eso tenemos que ver que

$$I_N = \int_{-L}^L (u(x) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz$$

converge a cero. Lo primero es observar que el núcleo de Dirichlet es una función par, por lo que

$$\int_{-L}^L \partial_x u(x) z \mathcal{D}_N(z) dz = 0.$$

Por lo tanto

$$I_N = \int_{-L}^L (u(x) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz - \int_{-L}^L \partial_x u(x) z \mathcal{D}_N(z) dz,$$

de donde

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{u(x) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z}{2}\right)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z\right) dz \\ &\quad - \int_{-L}^L \frac{\partial_x u(x) z}{\sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z}{2}\right)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z\right) dz \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{u(x) - u(x-z) - \partial_x u(x) z}{\sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z}{2}\right)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} z\right) dz. \end{aligned}$$

De la prueba sale que basta con que la función u tenga segunda derivada integrable. En cualquier caso, puesto que nuestra versión de Riemann-Lebesgue era barata, no podemos esperar probar un teorema muy fino con ella.

Definiendo

$$f^{(x)}(z) = \frac{u(x) - u(x-z) - \partial_x u(x)z}{2L \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)}$$

observamos que basta con aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue a la integral anterior. Para ello es suficiente con comprobar que la función $f^{(x)}(z) \in C^1([-L, L])$ (como función de z y para cualquier x). Dadas las hipótesis sobre la función u eso es fácil (basta con aplicar el teorema de Taylor a u y notar que el seno del denominador solo se anula en $z = 0$). \square

El teorema anterior es fácil de probar, pero no es muy útil porque impone muchas hipótesis a la función u . Una versión más general es

Teorema 3. Sea $u(x)$ una función continua a trozos cuya derivada $u_x(x)$ también es continua a trozos. Entonces se verifica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = \frac{u(x+) + u(x-)}{2},$$

donde $x+$ y $x-$ denotan los límites laterales. Es decir, la serie de Fourier converge puntualmente a la media de los límites laterales.

Demostración. Vamos a hacer un argumento distinto al anterior (aunque el argumento anterior se puede *afinar* hasta cubrir también este caso. Ahora nos vamos a apoyar en la desigualdad de Bessel (Lema 4) para obtener el mismo resultado que nos daba el Lema de Riemann-Lebesgue (Lema 5). Fijamos $x \in [-L, L]$. Usando las ideas anteriores y los lemas 2 y 3 tenemos que

$$\frac{u(x+) + u(x-)}{2} = u(x+) \int_{-L}^0 \mathcal{D}_N(z) dz + u(x-) \int_0^L \mathcal{D}_N(z) dz.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{u(x+) + u(x-)}{2} - S_N u(x) \\ &= \int_{-L}^0 (u(x+) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz \\ &\quad + \int_0^L (u(x-) - u(x-z)) \mathcal{D}_N(z) dz \\ &= \int_0^L \frac{u(x-) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L} dz \\ &\quad + \int_{-L}^0 \frac{u(x+) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L} dz. \end{aligned}$$

Ahora observamos que

$$\phi_N(z) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L},$$

satisfacen

$$\int_0^L \phi_n(z) \phi_\ell(z) dz = \frac{1}{8L} \delta_\ell^n,$$

donde δ_ℓ^n es la Delta de Kronecker que vale 1 si $n = \ell$ y 0 si no. Por lo tanto, para concluir que

$$\int_{-L}^0 \frac{u(x+) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L} dz \rightarrow 0,$$

y

$$\int_0^L \frac{u(x-) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{L}\right)}{2L} dz \rightarrow 0,$$

En un cierto sentido, lo que estamos haciendo es dar una nueva prueba del Lema de Riemann-Lebesgue anterior (Lema 5).

usando el Lema 4 basta con comprobar que las funciones

$$\frac{u(x-) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)}$$

y

$$\frac{u(x+) - u(x-z)}{\sin\left(\frac{\pi z}{2L}\right)}$$

están en $L^2([0, L])$ y $L^2([0, -L])$, respectivamente. Como u es derivable a trozos con derivada continua a trozos se tiene que las funciones anteriores son continuas a trozos, por lo que pertenecen a los espacios L^2 mencionados anteriormente y podemos concluir el resultado. \square

Vamos a concluir con un teorema que, si bien no asegura convergencia puntual, se puede aplicar a muchas funciones:

Teorema 4. Sea $u(x) \in L^2([-L, L])$ una función periódica. Entonces la serie de Fourier converge en sentido L^2 a u . Es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N u - u\|_{L^2([-L, L])} = 0.$$

Además, en este caso la Desigualdad de Bessel es una igualdad:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}_n|^2 = \|u\|_{L^2}^2.$$

Ejemplo 24. Calcula la serie de Fourier exponencial de la función 1-periódica

$$u(x) = x \quad x \in [0, 1].$$

Solución. Como la función es 1-periódica, tenemos que $L = 0,5$ (y $2L = 1$). Vamos a calcular el desarrollo

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx2\pi}.$$

Calculamos los coeficientes como

$$c_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$c_n = \int_0^1 x e^{-2\pi inx} dx = \frac{1}{2\pi in}.$$

Entonces

$$(8o) \quad u(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx2\pi}}{2\pi in}.$$

\square

Ejemplo 25. Decide razonadamente el límite puntual de las serie del ejercicio anterior. ¿Converge uniformemente la serie de Fourier anterior?

Solución. La función x como función 1 -periódica no es continua (es discontinua en 0 y en 1). Sin embargo si que es continua con derivada continua a trozos, por lo que podemos aplicar el teorema 3 para concluir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = x \quad \forall x \neq 0, 1,$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = \frac{1}{2} \quad \text{si } x = 0, 1.$$

Esto se intuía en (80), ya que, de poder sumarse la serie

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{2\pi in},$$

dicha serie debería sumar 0 . Como no tenemos convergencia puntual en todo punto, tampoco podremos tener convergencia uniforme en $[0, 1]$. Lo que si podremos asegurar gracias al teorema 4 es que $S_N u$ converge a x en sentido L^2 . \square

Ejemplo 26 (Convocatoria extraordinaria 2018-2019). Calcula la serie de Fourier de exponenciales complejas de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}.$$

Decide razonadamente el límite puntual de la N -ésima suma parcial de la serie de Fourier que has calculado.

Solución. Debemos calcular las siguientes integrales

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_0^{\pi} e^{-inx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} - \int_{-\pi}^0 e^{-inx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{e^{-inx}}{-in\sqrt{2\pi}} \Big|_0^{\pi} - \frac{e^{-inx}}{-in\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\pi}^0 \\ &= \frac{e^{-in\pi}}{-in\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{in\sqrt{2\pi}} - \left(\frac{1}{-in\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{in\pi}}{in\sqrt{2\pi}} \right) \\ &= \frac{2}{in\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{-in\pi} + e^{in\pi}}{in\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Dado que la función f es continua con derivada continua a trozos, usando el teorema 3, podemos asegurar que la serie

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}},$$

converge puntualmente a f en todo punto $x_0 \neq 0, \pm\pi$ que son los puntos de discontinuidad. En estos puntos además se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(\pi) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(-\pi) = 0.$$

\square

Ejemplo 27 (Fenómeno de Gibbs). Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}.$$

Calcula

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(0)$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f\left(\frac{\pi}{N}\right)$$

Solución. Ya sabemos, gracias al teorema 3, que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(0) = 0,$$

pero además podemos verlo ya que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{\hat{f}_n}{\sqrt{2\pi}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{2}{in2\pi} - \frac{e^{-in\pi} + e^{in\pi}}{in2\pi} = 0.$$

Observamos que, usando la fórmula de Euler

$$\frac{2}{in\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{-in\pi} + e^{in\pi}}{in\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{in\sqrt{2\pi}} - \frac{2\cos(n\pi)}{in\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{in\sqrt{2\pi}} - \frac{2(-1)^n}{in\sqrt{2\pi}},$$

y por lo tanto

$$\hat{f}_n = \frac{4}{in\sqrt{2\pi}} \text{ si } n \text{ es impar}$$

y

$$\hat{f}_n = 0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Además, para los n impares,

$$\hat{f}_n e^{inx} + \hat{f}_{-n} e^{-inx} = \frac{4}{in\sqrt{2\pi}} (e^{inx} - e^{-inx}) = \frac{8}{n\sqrt{2\pi}} \sin(nx).$$

Es decir,

$$S_N f(x) = 4 \sum_{n=1, n \text{ impar}}^N \frac{\sin(nx)}{\pi n}.$$

Si ahora denotamos

$$\text{sinc}(y) = \frac{\sin(\pi y)}{\pi y},$$

tenemos que

$$S_N f\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{4}{N} \sum_{n=1, n \text{ impar}}^N \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\frac{\pi n}{N}} = \frac{4}{N} \sum_{n=1}^N \text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right).$$

Observamos que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1, n \text{ impar}}^N \text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right)$$

es la suma de Riemann de la función sinc en el intervalo $(0, 1)$. Así

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1, n \text{ impar}}^N \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{N}\right) = \int_0^1 \operatorname{sinc}(y) dy > 0,5.$$

Vemos así que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f\left(\frac{\pi}{N}\right) = 4 \int_0^1 \operatorname{sinc}(y) dy \neq 0.$$

Este fenómeno se conoce como fenómeno de Gibbs y evidencia que la convergencia no es uniforme sino meramente puntual. \square

5.2.5 Propiedades de las series de Fourier

En esta sección vamos a ver algunas de las propiedades más básicas de las series de Fourier.

Teorema 5. Sean u y v dos funciones regulares y $2L$ -periódicas con series de Fourier dadas por

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_n \frac{e^{i\frac{\pi}{L}xn}}{\sqrt{2L}}$$

$$v(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{v}_n \frac{e^{i\frac{\pi}{L}xn}}{\sqrt{2L}}.$$

Entonces

- Si $w(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x)$ se tiene que

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{w}_n \frac{e^{i\frac{\pi}{L}xn}}{\sqrt{2L}},$$

con

$$\hat{w}_n = c_1 \hat{u}_n + c_2 \hat{v}_n$$

- Si $w(x) = \partial_x u(x)$ entonces

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \frac{\pi}{L} n \hat{u}_n \frac{e^{i\frac{\pi}{L}xn}}{\sqrt{2L}},$$

es decir,

$$\hat{w}_n = i \frac{\pi}{L} n \hat{u}_n.$$

Más generalmente, si $w(x) = \partial_x^k u(x)$, entonces

$$\hat{w}_n = \left(i \frac{\pi}{L} n\right)^k \hat{u}_n.$$

- Si $w(x) = u(x)v(x)$ entonces

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{w}_n \frac{e^{i\frac{\pi}{L}xn}}{\sqrt{2L}},$$

con

$$\hat{w}_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_\ell \hat{v}_{n-\ell}.$$

- (Teorema de Parseval/Plancherel)

$$\int_{-L}^L u(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_n\bar{\hat{v}}_n.$$

5.3 SERIES DE FOURIER TRIGONOMÉTRICAS EN $[-l, l]$

Habíamos visto, al menos formalmente, que una función u podía expresarse como (72). Esta expresión sirve tanto para funciones que toman valores complejos pero también se puede usar para funciones con valores puramente reales. En este caso, usando la fórmula de Euler

$$(81) \quad e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z)e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L}x\ell} \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z)e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} dz \right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, emparejando los términos ℓ y $-\ell$ llegamos a

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\int_{-L}^L u(z)dz}{2L} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z) \left[e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} + e^{i\frac{\pi}{L}z\ell} \right] dz \right) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) \\ &\quad + i \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z) \left[e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} - e^{i\frac{\pi}{L}z\ell} \right] dz \right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) \\ &= \frac{\int_{-L}^L u(z)dz}{2L} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^L u(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz \right) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^L u(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz \right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) \\ &= b_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right), \end{aligned}$$

con

(82)

$$a_{\ell} = \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^L u(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz \right), \quad b_{\ell} = \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^L u(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz \right), \quad \ell \geq 1$$

y

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z)dz.$$

De las fórmulas anteriores se ve la expansión en serie de Fourier exponencial (72) de una función $2L$ -periódica u es equivalente a una expansión en senos y cosenos. Además usando la forma de senos y cosenos se ve que los coeficientes son reales si la función u toma valores reales y complejos si la función u toma valores complejos.

Ejemplo 28. Calcula la serie de Fourier trigonométrica de la función sgn

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases} .$$

Solución. Como la función es 2-periódica, tenemos que $L = 1$. Vamos a calcular el desarrollo

$$\text{sgn}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) + b_n \cos(n\pi x).$$

Observamos que, por la simetría de sgn se tendrá

$$b_n = 0.$$

Por lo tanto falta calcular a_n . Usando las fórmulas (82) se tiene que

$$a_n = \int_{-1}^1 \text{sgn}(x) \sin(n\pi x) dx = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

Entonces

$$(83) \quad \text{sgn}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

□

Ejemplo 29. Decide razonadamente el límite puntual de las serie del ejercicio anterior. Converge uniformemente la serie de Fourier anterior?

Solución. La función sgn no es continua (es discontinua en 0 y en ± 1) pero si es continua con derivada continua a trozos. Entonces se puede aplicar el teorema 3 para concluir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N \text{sgn}(x) = \text{sgn}(x) \quad \forall x \neq 0, \pm 1,$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N \text{sgn}(x) = 0 \quad \text{si } x = 0, \pm 1.$$

De la misma manera, invocando el teorema 4, podemos asegurar la convergencia en sentido L^2 de la serie de Fourier. □

Ejemplo 30. Calcula la serie de Fourier trigonométrica de la función $|x|$ en $[-1, 1]$.

Solución. Por la simetría de la función $|x|$, su serie de Fourier solo contendrá cosenos. Es decir, será algo como

$$|x| = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\pi x).$$

Además, en un cierto sentido que concretaremos más tarde, se tiene que

$$(84) \quad \frac{d|x|}{dx} = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases} .$$

De momento, nos va a bastar con comprobar la igualdad anterior en los puntos $x \neq 0, \pm 1$, que es donde la función $|x|$ es derivable. En un ejemplo anterior (ver (83)) obtuvimos

$$\operatorname{sgn}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

Tenemos que

$$\frac{d|x|}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi b_n) \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin(n\pi x) = \operatorname{sgn}(x).$$

Por lo tanto

$$b_n = -\frac{2(1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}$$

y

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$$

□

5.4 SERIES DE FOURIER TRIGONOMÉTRICAS EN $[0, l]$

En la sección anterior hemos estudiado series de Fourier exponenciales y sus propiedades para el caso de funciones $2L$ -periódicas que toman valores (posiblemente) complejos. También hemos visto que dicho desarrollo era equivalente a un desarrollo en senos y cosenos. Sin embargo, lo cierto es que en los ejemplos anteriores de separación de variables, la solución general de la EDP quedaba en forma de serie de senos o de cosenos y las funciones tomaban siempre valores reales. Obviamente, ambos desarrollos están relacionados vía la fórmula de Euler (81).

por lo que podemos intentar desarrollar la teoría para series de Fourier trigonométricas (series de senos y/o cosenos) apoyándonos en lo que ya sabemos de series de Fourier exponenciales. Para ello vamos a recordar una definición:

Un ejemplo de función par es el coseno mientras que un ejemplo de función impar es el seno.

Definición 2. Sea $u(x)$ una función definida en $[-L, L]$.

- Decimos que u es una función par si

$$u(x) = u(-x).$$

- Decimos que u es una función impar si

$$u(x) = -u(-x).$$

Observamos que una función impar siempre cumple

$$u(0) = -u(-0) = -u(0)$$

por lo que

$$u(0) = 0.$$

Por otro lado, una función par cumple

$$u(h) = u(-h),$$

por lo que

$$\frac{u(h) - u(-h)}{h} = 0$$

y obtenemos que

$$u_x(0) = 0.$$

Estas dos propiedades (heredadas de la paridad o imparidad de la función) nos van a servir para relacionar las condiciones de frontera con la simetría.

Condiciones de frontera Dirichlet homogéneas: serie de senos

Si consideráramos una EDP con condiciones de frontera Dirichlet homogéneas en el intervalo $[0, L]$, es decir, si

$$u(0) = u(L) = 0,$$

entonces podemos definir

$$\tilde{u}(x)$$

como la extensión impar de $u(x)$. En otras palabras,

$$\tilde{u}(x) = u(x) \text{ si } 0 \leq x \leq L$$

y

$$\tilde{u}(x) = -u(-x) \text{ si } -L \leq x \leq 0.$$

Esta función \tilde{u} es continua si u es continua. Así obtenemos una función periódica \tilde{u} . Esta función admite una serie de Fourier exponencial de la forma

$$\tilde{u}(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{\ell} \frac{e^{i\frac{\pi}{L}x\ell}}{\sqrt{2L}},$$

con

$$\hat{u}_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L \tilde{u}(z) e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} dz.$$

Observamos que, gracias a la fórmula de Euler, se tiene que

$$\tilde{u}(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{\ell} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right)}{\sqrt{2L}}.$$

Si ahora agrupamos términos

$$\tilde{u}(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\hat{u}_{\ell} + \hat{u}_{-\ell}) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) + i(\hat{u}_{\ell} - \hat{u}_{-\ell}) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right)}{\sqrt{2L}} + \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{2L}}.$$

Como $\tilde{u}(z)$ es impar se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L \tilde{u}(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz = 0,$$

por lo que los coeficientes anteriores realmente son

$$\hat{u}_\ell = \frac{-i}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L \tilde{u}(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz.$$

Entonces observamos que

$$\begin{aligned}\hat{u}_\ell + \hat{u}_{-\ell} &= 0, \\ \hat{u}_0 &= 0,\end{aligned}$$

y

$$i(\hat{u}_\ell - \hat{u}_{-\ell}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L \tilde{u}(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L}} \int_0^L u(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz,$$

donde hemos usado que \tilde{u} es la extensión impar de u . Si ahora escribimos el desarrollo anterior obtenemos

$$u(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L}} \int_0^L u(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz \right) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right)}{\sqrt{2L}}.$$

Simplificando

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{2L}} = \frac{2}{L},$$

en la expresión anterior llegamos a la expansión en senos (70) (con $t = 0$). Es decir, una expansión en senos para la función u se puede ver como el resultado de una expansión en exponenciales complejas para la extensión impar de la función u .

Condiciones de frontera Neumann homogéneas: serie de cosenos

Si consideráramos una EDP con condiciones de frontera Neumann homogéneas en el intervalo $[0, L]$, es decir, si

$$u_x(0) = u_x(L) = 0,$$

entonces podemos definir

$$\bar{u}(x)$$

como la extensión par de $u(x)$. En otras palabras,

$$\bar{u}(x) = u(x) \text{ si } 0 \leq x \leq L$$

y

$$\bar{u}(x) = u(-x) \text{ si } -L \leq x \leq 0.$$

Esta función \bar{u} es continua si u es continua. Así obtenemos una función periódica \bar{u} . De manera análoga al caso estudiado en la sección anterior, esta función \bar{u} admite una serie de Fourier exponencial de la forma

$$\bar{u}(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_\ell \frac{e^{i\frac{\pi}{L}x\ell}}{\sqrt{2L}},$$

con

$$\hat{u}_\ell = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L \bar{u}(z) e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell} dz.$$

De nuevo, gracias a la fórmula de Euler, podemos agrupar términos y llegar a

$$\bar{u}(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\hat{u}_{\ell} + \hat{u}_{-\ell}) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) + i(\hat{u}_{\ell} - \hat{u}_{-\ell}) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right)}{\sqrt{2L}} + \frac{\hat{u}_0}{\sqrt{2L}}.$$

Como $\bar{u}(z)$ es par se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L \bar{u}(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz = 0.$$

Esta cancelación hace que los coeficientes anteriores se simplifiquen y sean

$$\hat{u}_{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L \bar{u}(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz.$$

Ahora notamos que

$$\hat{u}_{\ell} - \hat{u}_{-\ell} = 0,$$

y, si $\ell \neq 0$

$$\hat{u}_{\ell} + \hat{u}_{-\ell} = \frac{2}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L \bar{u}(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L}} \int_0^L u(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz,$$

gracias a que \bar{u} es la extensión par de u . En el caso en el que $\ell = 0$ se tiene

$$\hat{u}_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}} \int_0^L u(z) dz$$

Por lo tanto llegamos a que

$$u(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L u(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz \right) \cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) + \frac{1}{L} \int_0^L u(z) dz.$$

en la expresión anterior llegamos a la expansión en cosenos. Es decir, una expansión en cosenos para la función u se puede ver como el resultado de una expansión en exponenciales complejas para la extensión par de la función u .

Algunas consecuencias

1. Dada una función u definida en $[-L, L]$ podemos hacer una expansión en exponenciales complejas (análogamente, una expansión en senos y cosenos).
2. Dada una función u definida en $[0, L]$ podemos hacer una expansión en senos o cosenos (ambas son correctas y se reducen a la expansión en serie de Fourier exponencial para la extensión par o impar).
3. Debido a las condiciones de frontera de una determinada EDP, aparecen de manera natural las extensiones pares (condiciones de frontera Neumann) o impares (condiciones de frontera Dirichlet), por lo que obtenemos la solución general como serie de senos o de cosenos.
4. Puesto que podemos ver las series de Fourier trigonométricas como casos particulares de series de Fourier exponenciales, los teoremas vistos para series de Fourier exponenciales se siguen aplicando al caso de series de senos y cosenos.

5.5 SERIES DE FOURIER EN TÉRMINOS DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

En estas últimas secciones vamos a usar otra base de funciones $\varphi_n(x)$ para hacer combinaciones lineales y desarrollar otras funciones. La teoría es, al menos hasta cierto punto, similar a la que ya hemos visto en el caso más popular de las funciones exponenciales complejas y trigonométricas, por lo que no haremos ninguna demostración y nos limitaremos a enunciar los resultados más útiles (se pueden encontrar más detalles en [3, 11]).

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la EDO

$$(85) \quad (1 - x^2)u_{xx}(x) - 2xu_x(x) + n(n + 1)u(x) = 0.$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de Legendre de orden n . Asociadas a esta EDO aparecen los polinomios de Legendre de grado n

$$(86) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Estos polinomios son solución de la ecuación de Legendre de orden n y de ahí su nombre. Estos polinomios son ortogonales entre sí cuando se consideran en el intervalo $[-1, 1]$. En concreto verifican

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_m^n.$$

Por lo tanto, podemos aplicar la mayor parte de nuestros argumentos anteriores para el caso de las exponenciales complejas. Así se tiene que

Teorema 6. Sea $u(x)$ una función $C^1[-1, 1]$ a trozos y definamos

$$S_N u(x) = \sum_{n=0}^N c_n \frac{P_n(x)}{\sqrt{\frac{2}{2n+1}}}$$

con

$$c_n = \int_{-1}^1 u(x) \frac{P_n(x)}{\sqrt{\frac{2}{2n+1}}} dx$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = \frac{u(x+) + u(x-)}{2},$$

donde $x+$ y $x-$ denotan los límites laterales. Es decir, la serie de Fourier en términos de los polinomios ortogonales de Legendre converge puntualmente a la media de los límites laterales.

Teorema 7. Sea $u(x)$ una función $L^2[-1, 1]$ y definamos

$$S_N u(x) = \sum_{n=0}^N c_n \frac{P_n(x)}{\sqrt{\frac{2}{2n+1}}}$$

con

$$c_n = \int_{-1}^1 u(x) \frac{P_n(x)}{\sqrt{\frac{2}{2n+1}}} dx$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N u - u\|_{L^2([-1,1])} = 0.$$

Es decir, la serie de Fourier en términos de los polinomios ortogonales de Legendre converge en sentido L^2 .

Los desarrollos en serie de polinomios de Legendre se pueden ver como un híbrido entre las series de potencias obtenidas haciendo el desarrollo de Taylor y las series de Fourier exponenciales (que tienen propiedades similares).

5.6 SERIES DE FOURIER EN TÉRMINOS DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

Fijemos ahora $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ y consideremos la EDO

$$(87) \quad x^2 u_{xx}(x) + x u_x(x) + (x^2 - \alpha^2) u(x) = 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Esta ecuación se conoce como ecuación de Bessel. Asociadas a esta EDO aparecen las funciones

La función $\Gamma(z)$ se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

$$(88) \quad J_{\pm\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k \pm \alpha + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k \pm \alpha},$$

que se conocen como funciones de Bessel de primera clase y orden $\pm\alpha$ y la función

$$(89) \quad Y_n(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{\cos(\alpha\pi) J_\alpha(t) - J_{-\alpha}(t)}{\sin(\alpha\pi)}$$

que se conoce como función de Bessel de segunda clase y orden n . Estas funciones verifican muchísimas propiedades (ver [3, 11]). Nosotros vamos a centrarnos sólo en que estas funciones tienen infinitos ceros en el semieje real positivo y en que, si μ_n y μ_m son ceros de la función de Bessel $J_k(x)$, es decir

$$J_k(\mu_n) = 0,$$

entonces estas funciones cumplen la siguiente condición de ortogonalidad

$$\int_0^1 J_k(\mu_n x) J_k(\mu_m x) x dx = \left(\int_0^1 |J_k(\mu_n x)|^2 x dx \right) \delta_m^n, \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ fijo.}$$

Una vez que se tiene esa condición de ortogonalidad, uno puede probar los siguientes teoremas:

Teorema 8. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sea $u(x)$ una función $C^1[0, 1]$ a trozos y definamos

$$S_N u(x) = \sum_{n=1}^N c_n \frac{J_k(\mu_n x)}{\left(\int_0^1 |J_k(\mu_n x)|^2 x dx \right)^{1/2}}$$

con

$$c_n = \int_0^1 u(x) \frac{J_k(\mu_n x)}{\left(\int_0^1 |J_k(\mu_n x)|^2 x dx\right)^{1/2}} x dx$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N u(x) = \frac{u(x+) + u(x-)}{2},$$

donde $x+$ y $x-$ denotan los límites laterales. Es decir, la serie de Fourier en términos de las funciones de Bessel converge puntualmente a la media de los límites laterales.

Teorema 9. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sea $u(x)$ una función tal que

$$\int_0^1 |u(x)|^2 x dx < \infty,$$

y definamos

$$S_N u(x) = \sum_{n=1}^N c_n \frac{J_k(\mu_n x)}{\left(\int_0^1 |J_k(\mu_n x)|^2 x dx\right)^{1/2}}$$

con

$$c_n = \int_0^1 u(x) \frac{J_k(\mu_n x)}{\left(\int_0^1 |J_k(\mu_n x)|^2 x dx\right)^{1/2}} x dx$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 (S_N u(x) - u(x))^2 x dx = 0.$$

5.7 CONCLUSIONES

En este capítulo hemos visto que toda función $2L$ -periódica en $L^2([-L, L])$ se puede desarrollar como serie de Fourier en términos de exponenciales complejas (o, equivalentemente, de senos y cosenos). Además, cuando la función (además de ser $L^2([-L, L])$) es C^1 a trozos se tiene que la serie de Fourier en términos de exponenciales complejas converge puntualmente al valor medio de los límites laterales de la función mientras que si la función es $C^2([-L, L])$ la serie de Fourier en términos de exponenciales complejas converge uniformemente (es decir, en $C^0([-L, L])$) a la función.

También hemos visto que las expansiones en senos en el intervalo $[0, L]$ se podían ver como desarrollos en serie de Fourier exponencial de extensiones impares al intervalo $[-L, L]$. De la misma manera, las expansiones en cosenos en el intervalo $[0, L]$ se pueden entender como desarrollos en serie de Fourier exponencial de extensiones pares al intervalo $[-L, L]$.

Después hemos definido las funciones de Bessel y los polinomios ortogonales de Legendre y los hemos usado como base para desarrollar funciones $u(x)$. Para estos desarrollos hemos enunciado dos teoremas sobre la convergencia de las series. Estos teoremas son análogos a los de las series de Fourier en términos de exponenciales complejas.

Finalmente recopilamos (en una lista no exhaustiva!) algunas identidades de las que hemos visto en el capítulo:

- Si $u \in L^2([-L, L])$

$$u(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{\ell} \frac{e^{i\frac{\pi}{L}x\ell}}{\sqrt{2L}}$$

con

$$\hat{u}_{\ell} = \int_{-L}^L u(z) \frac{e^{-i\frac{\pi}{L}z\ell}}{\sqrt{2L}} dz.$$

- Si $u \in L^2([-L, L])$

$$u(x) = b_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right)$$

con

$$a_{\ell} = \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^L u(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz \right), \quad b_{\ell} = \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^L u(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right) dz \right), \quad \ell \geq 1,$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L u(z) dz.$$

- Si $u \in L^2([0, L])$ (extensión impar a $[-L, L]$)

$$u(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right)}{\sqrt{L/2}}.$$

con

$$A_{\ell} = \int_0^L u(z) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right)}{\sqrt{L/2}} dz.$$

- Si $u \in L^2([0, L])$ (extensión par a $[-L, L]$)

$$u(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}x\ell\right)}{\sqrt{L/2}}.$$

con

$$B_{\ell} = \int_0^L u(z) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{L}z\ell\right)}{\sqrt{L/2}} dz.$$

- Si $w(x) = \partial_x^k u(x)$, entonces

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{w}_n \frac{e^{i\frac{\pi}{L}xn}}{\sqrt{2L}}$$

con

$$\hat{w}_n = \left(i\frac{\pi}{L}n\right)^k \hat{u}_n.$$

- Si $w(x) = u(x)v(x)$ entonces

$$w(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{w}_n \frac{e^{i\frac{\pi}{L}xn}}{\sqrt{2L}},$$

con

$$\hat{w}_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{\ell} \hat{v}_{n-\ell}.$$

- (Teorema de Parseval/Plancherel)

$$\int_{-L}^L u(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_n\bar{\hat{v}}_n,$$

donde los \hat{u}_n y \hat{v}_n son coeficientes del desarrollo de Fourier en exponenciales complejas.

- (Desigualdad de Bessel) Si ϕ_n es una familia ortonormal de funciones definidas en el intervalo $[-L, L]$ y

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x).$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|u\|_{L^2([-L,L])}^2.$$

5.8 EJERCICIOS SUGERIDOS

Ejercicio 21 (Ejercicio para practicar series de Fourier). Sean las funciones

$$\phi_N(z) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}z\right)}{2L}.$$

Calcula

$$\int_0^L \phi_n(z)\phi_\ell(z)dz.$$

Ejercicio 22 (Ejercicio para practicar series de Fourier). Calcula la serie de Fourier en exponenciales complejas de la función

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Ejercicio 23 (Ejercicio para practicar series de Fourier). Decide razonadamente el límite puntual de las serie del ejercicio anterior. Converge uniformemente la serie de Fourier anterior?

Ejercicio 24 (Ejercicio para practicar series de Fourier). Calcula la serie de Fourier en exponenciales complejas de la función

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Ejercicio 25 (Ejercicio para practicar series de Fourier). Decide razonadamente el límite puntual de las serie del ejercicio anterior. Converge uniformemente la serie de Fourier anterior?

Ejercicio 26 (Ejercicio para practicar series de Fourier). Calcula la serie de Fourier en senos de la función

$$f(x) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

Ejercicio 27 (Ejercicio para practicar series de Fourier). Decide razonadamente el límite puntual de las serie del ejercicio anterior. Converge uniformemente la serie de Fourier anterior?

Ejercicio 28 (Ejercicio para practicar series de Fourier). Calcula la serie de Fourier en cosenos de la función

$$f(x) = x, \quad x \in [0, 1]$$

Ejercicio 29 (Ejercicio para practicar series de Fourier). Decide razonadamente el límite puntual de la serie del ejercicio anterior. Converge uniformemente la serie de Fourier anterior?

6 | EJERCICIOS ADICIONALES

En este capítulo vamos a resolver más ejercicios. Estos ejercicios han sido elegidos para evidenciar que las series de Fourier pueden aplicarse (y se aplican) en multitud de situaciones y contextos diferentes.

6.1 UNA APLICACIÓN A EDOS

Ejemplo 31. Consideramos una partícula de masa unidad moviéndose en un alambre recto tal que su posición viene dada por la función escalar $X(t)$ con

$$X : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

También sabemos que el movimiento de la partícula es periódico y que sobre ella actúa una fuerza dada por

$$X(t) - f(t)$$

donde f es una función C^1 a trozos dada. Encuentra la trayectoria de la partícula.

Solución. La ecuación satisfecha por la partícula es

$$X''(t) = X(t) - f(t)$$

con condiciones de borde periódicas $X(-1) = X(1)$ y $X'(-1) = X'(1)$. Como f es C^1 a trozos, es seguro que tiene una serie de Fourier convergente en sentido L^2 . Además, dicha serie de Fourier convergerá puntualmente a la media de los límites laterales. Si la solución X existe y es regular, también tendrá serie de Fourier. Así podemos ver que se tiene que

$$X(t) - X''(t) = f(t)$$

se puede ver de manera equivalente como

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + \pi^2 n^2) \hat{X}_n e^{in\pi x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n e^{in\pi x}$$

. Una vez que hemos llegado a esta fórmula, estamos tentados a, simplemente igualar los coeficientes uno a uno. Sin embargo, debemos tener cuidado. La razón por la que podemos hacer esto es porque las funciones exponenciales son una base del espacio vectorial (ver el Teorema 4). Otra manera es multiplicar por $e^{imx\pi}$ e integrar. Así, usando la ortonormalidad de las funciones exponenciales se llega a

$$(1 + \pi^2 n^2) \hat{X}_n = \hat{f}_n.$$

De donde

$$\hat{X}_n = \frac{\hat{f}_n}{1 + \pi^2 n^2},$$

y, al conocer la serie de Fourier de f , ya hemos encontrado una solución explícita de la función X . \square

6.2 SOLUCIONES PARTICULARES DE EDP

Ejemplo 32 (Continuación del ejemplo 15). Encuentra la solución particular de (42).

Solución. Habíamos llegado a la solución general (47)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Así sólo faltaba encontrar los A_n y B_n . Dados los datos iniciales (48) y (49) sabemos que

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}zn\right) dz$$

$$B_n \frac{n\pi}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(z) \sin\left(\frac{\pi}{L}zn\right) dz.$$

Asumiendo que f, g tienen suficientes derivadas (digamos 4, aunque no hacen falta tantas), la solución particular escrita como serie de Fourier converge a una función regular que resuelve la ecuación de ondas (42). \square

Ejemplo 33 (Continuación del ejemplo 16). Encuentra la solución particular de (50).

Solución. Habíamos obtenido la solución (53)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + A_0 + B_0 t.$$

Ahora basta con

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Es decir, necesitamos tomar

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}zn\right) dz$$

$$B_n \frac{n\pi}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(z) \cos\left(\frac{\pi}{L}zn\right) dz, \text{ si } n \geq 1$$

$$B_0 = \frac{1}{L} \int_0^L g(z) dz, \text{ si } n = 0.$$

\square

Ejemplo 34 (Continuación del ejemplo 17). Encuentra la solución particular de (56)

Solución. Habíamos obtenido la solución general (60)

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

y visto que necesitábamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Por lo tanto, basta con definir

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin\left(\frac{\pi}{L} zn\right) dz.$$

□

Ejemplo 35 (Continuación del ejemplo 18). Encuentra la solución particular de (62)

Solución. La solución general venía dada por (64)

$$u(t, x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

por lo que es necesario que

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Por lo tanto, basta con definir

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos\left(\frac{\pi}{L} zn\right) dz \text{ si } n \geq 1.$$

y

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(z) dz$$

□

Ejemplo 36. Encuentra la solución de

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \\ u(0, y) &= 0 \quad y \in [0, 1] \\ u(1, y) &= 0 \quad y \in [0, 1] \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x) \quad x \in [0, 1] \\ u(x, 1) &= x(1-x) \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Solución. A estas alturas del curso es fácil llegar a que la solución se puede escribir como

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) Y_n(y).$$

Además se tiene que

$$Y''(y) - \frac{n^2\pi^2}{2} Y(y) = 0,$$

por lo que

$$Y_n(y) = c_1^{(n)} e^{y\frac{n\pi}{\sqrt{2}}} + c_2^{(n)} e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{2}}y}.$$

Así llegamos a que

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \left(c_1^{(n)} e^{y\frac{n\pi}{\sqrt{2}}} + c_2^{(n)} e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{2}}y} \right)$$

y solo nos queda utilizar las condiciones de borde para hallar el valor de las constantes. Así llegamos a que

$$\sin(\pi x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \left(c_1^{(n)} + c_2^{(n)} \right)$$

lo que solo puede ser posible si

$$c_1^{(1)} + c_2^{(1)} = 1$$

y

$$c_1^{(n)} + c_2^{(n)} = 0 \text{ para } n > 1.$$

De manera análoga se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(m\pi x) x(1-x) dx &= \int_0^1 u(x, 1) \sin(m\pi x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) dx \left(c_1^{(n)} e^{\frac{n\pi}{\sqrt{2}}} + c_2^{(n)} e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{2}}} \right) \\ &= \|\sin(m\pi \cdot)\|_{L^2}^2 \left(c_1^{(m)} e^{\frac{m\pi}{\sqrt{2}}} + c_2^{(m)} e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{2}}} \right). \end{aligned}$$

Integrando por partes podemos calcular explícitamente las integrales que aparecen en la igualdad anterior. De esta manera llegamos a

$$\frac{2}{(m\pi)^3} (1 - \cos(m\pi)) = \frac{1}{2} \left(c_1^{(m)} e^{\frac{m\pi}{\sqrt{2}}} + c_2^{(m)} e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{2}}} \right).$$

Recopilando todas las ecuaciones para las constantes llegamos a que

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} + c_2^{(1)} &= 1 \\ \frac{4}{\pi^3} &= \frac{1}{2} \left(c_1^{(1)} e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} + c_2^{(1)} e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \right) \\ c_1^{(n)} + c_2^{(n)} &= 0 \text{ para } n > 1 \\ \frac{2}{(n\pi)^3} (1 - \cos(n\pi)) &= \frac{1}{2} \left(c_1^{(n)} e^{\frac{n\pi}{\sqrt{2}}} + c_2^{(n)} e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{2}}} \right) \text{ para } n > 1. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema llegamos a que

$$c_1^{(n)} = -c_2^{(n)} = \frac{2}{(n\pi)^3} (1 - \cos(n\pi)) \frac{1}{\sinh\left(\frac{n\pi}{\sqrt{2}}\right)}$$

y

$$c_2^{(1)} = 1 - c_1^{(1)} = \frac{\frac{8}{\pi^3} - e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}}{\sinh\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)}.$$

□

Veamos ahora un ejemplo para una EDP con tres variables independientes

Ejemplo 37. Encuentra la solución particular de

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad (x, y, t) \in [0, 1] \times [0, 3] \times [0, \infty) \\ u(x, y, 0) &= 1 \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 3] \\ u(0, y, t) &= 0 \quad y \in [0, 3] \times [0, \infty) \\ u(1, y, t) &= 0 \quad y \in [0, 3] \times [0, \infty) \\ u(x, 0, t) &= 0 \quad x \in [0, 1] \times [0, \infty) \\ u(x, 3, t) &= 0 \quad x \in [0, 1] \times [0, \infty) \end{aligned}$$

Solución. Al buscar soluciones en forma de variables separadas

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

llegamos a

$$\begin{aligned} T_t &= -\lambda T, \\ \frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} &= -\lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{X_{xx}}{X} = -\mu = -\lambda - \frac{Y_{yy}}{Y}.$$

Si ahora resolvemos la ecuación para X y aplicamos las condiciones de borde llegamos a que

$$\mu = n^2\pi^2 \text{ y } X(x) = \sin(n\pi x).$$

De la misma manera, para Y se tiene que

$$-(\lambda - \mu)Y = Y_{yy}.$$

Resolviendo esta ecuación y usando las condiciones de borde llegamos a que

$$(\lambda - \mu) = \frac{m^2\pi^2}{9} \text{ y } Y(y) = \sin(m\pi y/3).$$

Usando el valor de μ llegamos a que

$$\lambda = n^2\pi^2 + \frac{m^2\pi^2}{9}$$

y entonces la solución general de la EDP tendrá la forma

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} e^{-(n^2\pi^2 + \frac{m^2\pi^2}{9})t} \sin(m\pi y/3) \sin(n\pi x).$$

Ahora basta con desarrollar el dato inicial para hallar el valor de $A_{n,m}$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin(m\pi y/3) \sin(n\pi x).$$

De la igualdad anterior llegamos a que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^3 1 \sin(\ell\pi x) \sin(r\pi y/3) dy dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^3 A_{n,m} \sin(m\pi y/3) \sin(n\pi x) \sin(\ell\pi x) \sin(r\pi y/3) dy dx. \end{aligned}$$

Y, si usamos la ortogonalidad,

$$\int_0^1 \int_0^3 1 \sin(\ell\pi x) \sin(r\pi y/3) dy dx = A_{\ell,r} \int_0^1 \sin(\ell\pi x)^2 dx \int_0^3 \sin(r\pi y/3)^2 dy.$$

De aquí es un ejercicio sencillo despejar $A_{\ell,r}$ y llegar a

$$A_{\ell,r} = \frac{1 - \cos(\ell\pi) + 1 - 3 \cos(r\pi/3) + 3}{3 \ell\pi r\pi}.$$

□

6.3 FORMA DE D'ALEMBERT DE LA SOLUCIÓN (47)

En el capítulo 3 habíamos visto que la solución del problema de valores iniciales para la ecuación de ondas unidimensional (es decir, cuando el dominio espacial es toda la recta real) se escribe como la superposición de dos ondas: una onda viajando hacia la derecha y otra onda viajando hacia la izquierda.

Más tarde, en el capítulo (4) habíamos considerado el problema de valores de frontera para la ecuación de ondas unidimensional. Concretamente, para el caso de condiciones de borde Dirichlet homogéneas habíamos llegado a (47):

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

con

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \\ B_n &= \frac{L}{n\pi} \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{\pi}{L}xn\right) dx. \end{aligned}$$

Es decir, que los datos iniciales son

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ u_t(x, 0) &= g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ve que la solución (47) es una superposición de senos y cosenos, pero no está claro que sea una superposición de ondas, una viajando hacia la izquierda y otra hacia la derecha.

Ejemplo 38 (Forma de D'Alembert de la solución (47)). Demuestra que (47) es en realidad una superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas.

Solución. Comenzamos notando que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)), \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).\end{aligned}$$

Por lo tanto, reorganizando los términos de (47) llegamos a

$$\begin{aligned}u(t, x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+t)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-t)\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-t)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+t)\right) \right) \\ &= \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-t)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+t)\right) \right).\end{aligned}$$

Por las propiedades de la serie de Fourier (Teorema 5) sabemos que B_n son los coeficientes de la primitiva de g . Es decir, son los coeficientes de H tal que $H' = g$. Concretamente, si escribimos

$$H(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-t)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+t)\right) \right),$$

entonces tenemos que

$$H_t(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-t)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+t)\right) \right),$$

por lo que, efectivamente,

$$H_t(x, t) = \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t).$$

De manera equivalente, integrando la expresión anterior,

$$H = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds.$$

Entonces se tiene que

$$u(t, x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds,$$

y concluimos que (47) es, de nuevo, una superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas. \square

Reorganizar los términos de una serie es un proceso delicado. Para que se pueda hacer sin alterar el resultado de la suma la serie tiene que ser absolutamente convergente.

6.4 EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Pigmalión, rey de la ciudad de Tiro, codiciaba los tesoros de un rico sacerdote llamado Siqueo. Para conseguirlos, obliga a su hermana Dido a casarse con Siqueo para poder averiguar así el paradero del dinero. Dido consiguió la información sobre el escondite pero en lugar decírselo a su hermano Pigmalión, desenterró el tesoro y, junto a varios amigos de Siqueo, huyó en un barco. Tras surcar el Mediterráneo durante cierto tiempo, Dido llega a Túnez, a las tierras de cierta tribu. Allí pide al jefe de la tribu un trozo de tierra para fundar una ciudad donde vivir (más tarde la ciudad sería conocida como Cartago). El jefe de la tribu, con cierta mofa, accede a darle tanta tierra como ella pudiese abarcar con una piel de toro. Dido acepta y corta la piel de toro en tiras muy finas que ata todas juntas formando una larga cuerda de longitud L .

Así las cosas el problema es

Ejemplo 39 (El problema isoperimétrico). Hallar la forma geométrica con mayor área que queda encerrada por un perímetro de longitud dada L .

Solución. La curva (cerrada) que encierra el recinto Ω la describimos como

$$\Gamma(s) = (x(s), y(s))$$

donde $0 \leq s \leq L$ es el parámetro de longitud de arco. Es decir, se tiene que

$$|\Gamma_s| = 1.$$

Introducimos el parámetro

$$t = \frac{2\pi s}{L}.$$

Entonces se tiene que

$$x_s^2 + y_s^2 = 1$$

y

$$x_t^2 + y_t^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}.$$

El teorema de Green nos dice que

$$\text{Área} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy,$$

con

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Tomando

$$Q = x, P = 0.$$

llegamos a

$$\text{Área} = \int_{\Gamma} x dy = \int_0^{2\pi} x y_t dt$$

Podemos escribir x e y usando sus respectivas series de Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nt) + b_n \cos(nt),$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(nt) + d_n \cos(nt).$$

Podemos calcular

$$x_t(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos(nt) - n b_n \sin(nt).$$

$$y_t(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cos(nt) - n d_n \sin(nt).$$

Es fácil ver que

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \pi \delta_m^n,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt) \cos(mt) dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \pi \delta_m^n,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{2\pi} x y_t dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(b_n c_n \int_0^{2\pi} \cos^2(nt) dt - a_n d_n \int_0^{2\pi} \sin^2(nt) dt \right) \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n c_n - a_n d_n). \end{aligned}$$

De la misma manera, tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 &= \int_0^{2\pi} x_t^2 + y_t^2 dt \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2). \end{aligned}$$

Definimos la cantidad

$$\mathcal{E} = L^2 - 4\pi \text{Área}.$$

Usando las expresiones anteriores llegamos a que

$$\mathcal{E} = 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n c_n - a_n d_n) \right).$$

Podemos agrupar términos

$$\begin{aligned} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2n (b_n c_n - a_n d_n) \\ = (na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2), \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\mathcal{E} = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2) \geq 0.$$

De manera equivalente, todas las curvas cerradas suaves (a trozos) satisfacen la desigualdad

$$L^2 \geq 4\pi \text{Área}.$$

Si queremos conseguir el área máxima necesitamos llegar a la igualdad. La igualdad se consigue si todos los sumando de la serie anterior son cero. Entonces se tiene que

$$n = 1, b_1 + c_1 = 0, a_1 - d_1 = 0,$$

o bien

$$n \neq 1, b_n = c_n = a_n = d_n = 0.$$

Por lo tanto, para tener área máxima necesitamos

$$x(t) = b_0 + a_1 \sin(t) + b_1 \cos(t),$$

$$y(t) = d_0 - b_1 \sin(t) + a_1 \cos(t),$$

donde a_1, b_1 dependen de L puesto que todavía se tienen que satisfacer las ecuaciones anteriores. Estas curvas son círculos. Por ejemplo, para $L = 2\pi$, tomando $b_0 = d_0 = a_1 = 0, b_1 = 1$ llegamos a

$$\Gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t)),$$

que es un círculo de radio 1. Parece claro que el análisis armónico, que es la rama de las matemáticas que estudia (entre otras cosas), las series de Fourier, es útil hasta para fundar una ciudad en el Mediterráneo. \square

6.5 EL PROBLEMA DE BASILEA

El problema de Basilea, que debe su nombre a la ciudad natal de Euler y de la familia Bernoulli, consiste en hallar la suma de

$$(90) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esta suma aparece por primera vez en un libro escrito en 1650 por Pietro Mengoli llamado *Novae quadraturae arithmeticae*. Asumiendo que la serie converge, John Wallis da la aproximación 1.645. La convergencia la demostraría más tarde Jacob Bernoulli al obtener la estimación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2.$$

Después de estos trabajos no hay ningún paso hacia el cálculo de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

salvo nuevas y mejores aproximaciones de la suma (90): Goldbach en 1729 acota la solución entre 1.664 y 1.665 y Stirling en 1730 da una aproximación con 9 cifras decimales correctas.

El primer trabajo de Euler sobre la serie es su artículo [6]. En el da una manera de aproximar el valor de manera rápida. Concretamente Euler prueba que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \log^2(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^{k-1}}.$$

Después de este artículo, Euler publicó varios trabajos más [7] (algunos de ellos no completamente correctos...).

Ejemplo 40 (El problema de Basilea). Calcula la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solución. Se tiene que

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

entonces, por el teorema de Parseval/Plancherel y la expresión (80),

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

de donde

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2},$$

es decir

$$\frac{1}{12} = \frac{2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

y operando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Obtener aproximaciones no es tan fácil como podría parecer, por ser esta serie de convergencia muy lenta. Si sumamos cien términos conseguimos la aproximación 1.63498390018489, correcta en la primera cifra únicamente.

□

7 | TRANSFORMADAS INTEGRALES Y DISTRIBUCIONES

Veamos brevemente la perspectiva desde la que encaramos el último capítulo del curso:

De dónde venimos: Hemos estudiado el método de separación de variables para problemas de contorno para EDPs. También hemos estudiado la teoría básica de las series de Fourier por lo que ahora mismo somos capaces de, dada un problema de contorno para una EDP, encontrar la solución general y particular.

A dónde vamos: Ahora vamos a volver a EDPs cuando $x \in \mathbb{R}^d$, es decir cuando la variable espacial no está restringida a un dominio acotado y la función incógnita no debe satisfacer ninguna condición de borde. Este tipo de problemas ya lo estudiamos rápidamente al principio del curso. Volvemos ahora a ellos para intentar implementar las ideas que hemos visto de series de Fourier a este nuevo caso de dominios no acotados. Así vamos a estudiar la transformada de Fourier. Finalmente, vamos a introducir muy rápidamente las distribuciones o funciones idealizadas.

Los objetivos de este capítulo son

Objetivos mínimos	Objetivos avanzados
Ser capaz de calcular transformadas de Fourier	Comprender la noción de derivada débil
Ser capaz de calcular transformadas de Laplace	Entender el principio de incertidumbre y su relación con la transformada de Fourier
Conocer el principio de Duhamel	Comprender la noción de distribución
Conocer las propiedades de la transformada de Fourier	
Conocer las propiedades de la transformada de Laplace	

7.1 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En el capítulo anterior habíamos visto que las funciones $2L$ -periódicas en el espacio $L^2([-L, L])$ se podían escribir usando (72):

$$u(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L} x \ell}.$$

Ahora nos gustaría considerar períodos cada vez mayores. De hecho, nos gustaría considerar $L = \infty$ porque entonces no estamos imponiendo ningún requisito de periodicidad la función $u(x)$.

Definamos

$$\xi = \frac{\pi}{L} \ell.$$

Consecuentemente,

$$d\xi = \frac{\pi}{L}.$$

Así la fórmula anterior queda

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\frac{\pi}{L} z \ell} dz \right) e^{i\frac{\pi}{L} x \ell} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^L u(z) e^{-i\xi z} dz \right) e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

No hay una única definición de la transformada de Fourier. Por ejemplo, otras definiciones son

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx,$$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i2\pi\xi x} dx,$$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\xi x} dx,$$

$$\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i2\pi\xi x} dx.$$

Si ahora hacemos $L \rightarrow \infty$ de manera que

$$d\xi \rightarrow 0,$$

la suma anterior es una suma de Riemann y el límite viene dado por la integral

$$(91) \quad u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(z) e^{-i\xi z} dz e^{i\xi x} d\xi.$$

Esta igualdad motiva las siguientes definiciones:

Definición 3. Definimos la transformada de Fourier de la función $u(x)$ como

$$(92) \quad \hat{u}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx,$$

para los valores de $\xi \in \mathbb{R}$ tales que la integral anterior exista.

Definición 4. Definimos la transformada de Fourier inversa de la función $v(\xi)$ como

$$(93) \quad \check{v}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Es decir, la transformada de Fourier de una función u , si existe, es otra función \hat{u} . Observamos entonces que la igualdad anterior se reduce a

$$u = \check{\hat{u}}.$$

Esta igualdad la hemos obtenido formalmente, es decir, sin ser del todo precisos en los argumentos. De hecho, esta igualdad para darse requiere que la función u sea continua, absolutamente integrable y C^1 a trozos. Esto puede intuirse simplemente comparando con el Teorema 3. Como este es un curso introductorio vamos a dejar de lado la mayor cantidad de cuestiones técnicas que podrían de otra manera ocultar las principales ideas detrás de la transformada de Fourier.

Ejemplo 41. Se define la función

$$f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Calcula la transformada de Fourier de f .

Solución. Lo primero es observar que la función f es par, por lo que la identidad de Euler nos da que la transformada de Fourier de f viene dada por

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\xi z} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos(\xi z) dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \cos(\xi z) dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\xi)}{\xi}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 42. Se define la función

$$f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Escribe dicha función como una integral.

Solución. La identidad

$$u = \check{u}.$$

nos permite escribir u como una integral que involucra a la propia u . Observamos que $\hat{f}(\xi)$ es una función par, por lo tanto, usando la fórmula para la transformada de Fourier inversa tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos(\xi x) d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\xi) \cos(\xi x)}{\xi} d\xi \end{aligned}$$

□

Ejemplo 43. Se define la función

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

Calcula la transformada de Fourier de la función anterior.

Solución.

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x e^{-ix\xi} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-ix\xi} dx \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\xi)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\xi)} dx \right] \\
 (94) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+\xi^2}.
 \end{aligned}$$

□

Es importante notar que no siempre se puede definir la transformada de Fourier (o la transformada de Fourier inversa) de una función. Para convencernos de esto, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 44. Intenta calcular la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = 1.$$

Solución. Observamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix0} dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dx = \infty,$$

por lo que, de existir, $\hat{f}(0)$ no está definido. Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r 1 e^{-ix\xi} dx,$$

y dicho límite tampoco existe. □

Como hemos visto no siempre se puede calcular la transformada de Fourier (al menos en el sentido de ser una función clásica). Sin embargo, es suficiente que una función f sea *integrable*, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty,$$

para que exista $\hat{f}(\xi)$. Además se tiene que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \quad \forall \xi.$$

Se tienen las siguientes propiedades (análogas a las propiedades de las series de Fourier)

Teorema 10. Sean u y v dos funciones regulares e integrables con transformadas de Fourier dadas por

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx \\
 \hat{v}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-i\xi x} dx.
 \end{aligned}$$

Entonces

- Si $w(x) = c_1u(x) + c_2v(x)$ se tiene que

$$\hat{w}(\xi) = c_1\hat{u}(\xi) + c_2\hat{v}(\xi),$$

- Si $w(x) = \partial_x u(x)$ entonces

$$\hat{w}(\xi) = i\xi\hat{u}(\xi).$$

Más generalmente, si $w(x) = \partial_x^k u(x)$, entonces

$$\hat{w}(\xi) = (i\xi)^k \hat{u}(\xi).$$

- De la misma manera, si $w(x) = xu(x)$ entonces

$$\hat{w}(\xi) = i\hat{u}_\xi(\xi).$$

En general, si $w(x) = x^k u(x)$, entonces

$$\hat{w}(\xi) = i^k \frac{d^k \hat{u}(\xi)}{d\xi^k}.$$

- Si $w(x) = u(x)v(x)$ entonces

$$\hat{w}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{u} * \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\eta) \hat{v}(\xi - \eta) d\eta,$$

donde $\hat{u} * \hat{v}$ se conoce como la *convolución* de \hat{u} y \hat{v} .

- Si $w(x) = u * v$ entonces

$$\hat{w}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi).$$

- (Teorema de Parseval/Plancherel)

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{v(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

Así vemos una característica importantísima de la transformada de Fourier: permite intercambiar derivadas por multiplicadores $i\xi$ y productos por convoluciones. Estas propiedades son muy útiles. Veamos unos ejemplos:

Ejemplo 45. Se define la función

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

Calcula la transformada de Fourier de la función anterior.

Solución. Se tiene que $f(x)$ satisface

$$f_x(x) = -2axf(x).$$

Y entonces

$$\widehat{f_x} + 2ax\widehat{f(x)} = 0.$$

Aplicando las propiedades anteriores,

$$i\xi\widehat{f}(\xi) + 2ai\xi\widehat{f}(\xi) = 0$$

Así obtenemos la EDO

$$\hat{f}'_{\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\hat{f}(\xi).$$

Si la resolvemos llegamos a

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(0)e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Además, se tiene que

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

por lo que

$$(95) \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

□

Este ejemplo muestra una propiedad muy importante de la transformada de Fourier: **Si una función decae "muy rápido", su transformada de Fourier decae "muy lento"**. Para verlo basta con tomar dos valores de a distintos en el ejemplo anterior y comparar. Esto se conoce como principio de incertidumbre.

Ejemplo 46 (Principio de incertidumbre). ¡El Principio de Incertidumbre de Heisenberg es realmente una propiedad de las transformadas de Fourier! Si $\psi(x)$ es la probabilidad de que una determinada partícula esté en la posición x y $\hat{\psi}(\xi)$ es la probabilidad de que el momento de la partícula esté en ξ , la desigualdad de Heisenberg

$$\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2\|x\psi\|_{L^2}\|\xi\hat{\psi}\|_{L^2}$$

establece que no pueden estar ambas probabilidades concentradas en un punto. Vamos a demostrar la desigualdad anterior.

Solución. Como ψ es una función que toma valores complejos se tiene que

$$\|\psi\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\bar{\psi}(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} x(\psi(x)\bar{\psi}(x))_x dx.$$

Entonces podemos calcular que

$$\|\psi\|_{L^2}^2 = -2\text{Re} \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)\bar{\psi}(x)_x dx,$$

y entonces, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2},$$

se tiene que

$$\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)||\psi(x)_x|dx \leq 2\|x\psi\|_{L^2}\|\psi_x\|_{L^2}.$$

Usando las propiedades de la transformada de Fourier vistas anteriormente se tiene que

$$\|\psi_x\|_{L^2}^2 = \|\widehat{\psi_x}\|_{L^2}^2 = \|\xi\hat{\psi}\|_{L^2}^2.$$

Si ahora sustituimos esta igualdad en la estimación anterior llegamos a

$$\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2\|x\psi\|_{L^2}\|\xi\hat{\psi}\|_{L^2}.$$

□

Ejemplo 47 (Examen final curso 2018-2019). Usando la transformada de Fourier, se define el operador

$$\widehat{\mathcal{O}u}(\xi) = m(\xi)\hat{u}(\xi),$$

donde $m(\xi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función acotada, i.e. $|m(\xi)| \leq C$. Dada $u \in L^2$, demuestra que el operador \mathcal{O} está bien definido y $\mathcal{O}u \in L^2$, es decir, que

$$\mathcal{O} : L^2 \rightarrow L^2.$$

Solución. Basta usar el teorema de Plancherel para obtener que

$$\|\mathcal{O}u\|_{L^2} = \|\widehat{\mathcal{O}u}\|_{L^2} = \|m\hat{u}\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}.$$

□

7.2 APLICACIONES A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES Y EL PRINCIPIO DE DUHAMEL

El siguiente ejemplo muestra cómo la transformada de Fourier puede permitirnos resolver ecuaciones diferenciales al transformar derivadas ∂_x^n en multiplicadores $(i\xi)^n$. Esto nos permite transformar una EDO en una ecuación algebraica o incluso una EDP en una EDO.

Ejemplo 48. Dada la función regular $f(x)$, se considera la EDO

$$u(x) - u_{xx}(x) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Resuelve esta EDO.

Solución. Asumiendo que dicha solución efectivamente existe y es regular podemos tomar la transformada de Fourier de la EDO y así obtener

$$\hat{u}(\xi) + \xi^2\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

donde hemos usado que

$$-\widehat{u_{xx}} = -(i\xi)^2\hat{u}(\xi).$$

Por lo tanto,

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + \xi^2}.$$

Usando las propiedades anteriores y definiendo

$$\widehat{G}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + \xi^2},$$

obtenemos

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)G(x-y)dy.$$

Además, usando (94), sabemos que

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|},$$

por lo que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{e^{-|x-y|}}{2}dy.$$

□

Las ideas anteriores también nos permiten pasar de una EDP a una EDO:

Ejemplo 49. Dada la función regular $f(x)$, se considera la EDO

$$-u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y < 0,$$

con dato de borde Dirichlet

$$u(x,0) = f(x).$$

Resuelve esta EDP.

Solución. Tomamos la transformada de Fourier en x y obtenemos que \hat{u} verifica

$$\zeta^2 \hat{u}(\zeta, y) - \hat{u}_{yy}(\zeta, y) = 0,$$

con dato inicial

$$\hat{u}(\zeta, 0) = \hat{f}(\zeta).$$

Si bien tenemos una función que depende de dos variables no tenemos una EDP puesto que sólo aparecen derivadas en y . Es decir, *podemos pensar el problema anterior como una EDO para cada k* . Podemos resolver la EDO anterior y obtenemos que

$$\hat{u}(\zeta, y) = C_1 e^{|\zeta|y} + C_2 e^{-|\zeta|y}.$$

Como $y < 0$, si queremos una función con límite finito para $y \rightarrow -\infty$ necesitamos que $C_2 = 0$. Entonces se tiene que

$$\hat{u}(\zeta, y) = f(\zeta)e^{|\zeta|y}.$$

Ahora bastaría con tomar la transformada de Fourier inversa y usar sus propiedades para obtener explícitamente la solución. Dicha solución vendrá dada como la convolución con un cierto núcleo \mathcal{P} conocido como núcleo de Poisson. □

Por supuesto, el mismo método se puede utilizar en problemas que dependen del tiempo:

Ejemplo 50. Dada la función regular e integrable $f(x)$, se considera el problema de valores iniciales

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x,0) = f(x).$$

Resuelve este problema para la ecuación del calor.

Solución. Tomando la transformada de Fourier y usando sus propiedades llegamos a que, si u es una solución de la ecuación del calor anterior, su transformada de Fourier resuelve

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(\xi, t) &= -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

De nuevo, tenemos una función que depende de dos variables pero no tenemos una EDP puesto que sólo aparecen derivadas en t . Por lo tanto podemos pensar el problema anterior como una EDO para cada k . Así, si resolvemos la EDO anterior, llegamos a

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-t|\xi|^2}.$$

Gracias a la fórmula (95) (con $4a = t^{-1}$) obtenemos que

$$H(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

cumple

$$\hat{H}(\xi, t) = e^{-t|\xi|^2}$$

Si ahora usamos las propiedades de la transformada de Fourier (que cambia productos en el espacio de Fourier por convoluciones en el espacio físico) junto con la expresión anterior llegamos a

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

Observamos que la función H ya nos salió cuando resolvíamos la ecuación del calor en el capítulo 3.

Podemos entonces definir el operador

$$\mathcal{H}_t : C^2 \rightarrow C^2$$

dado por

$$\mathcal{H}_t f(x) = H * f = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

Es decir, $\mathcal{H}_t f(x) = u(x, t)$. De esta manera, el operador \mathcal{H}_t recibe datos iniciales y devuelve la solución de la ecuación del calor a tiempo t . Este operador se llama a veces *propagador*. Como el operador se define en términos de la convolución con la función $H(x, t)$, a veces se abusa y se llama *propagador* a la propia función $H(x, t)$. A $H(x, t)$ también se le llama *función de Green de la ecuación del calor* mientras que al operador \mathcal{H}_t se le llama a veces *semigrupo del calor*. \square

El principio de Duhamel trata de explotar esta técnica para encontrar soluciones de problemas *forzados*, es decir, donde el lado de la derecha de la ecuación no se anula.

Ejemplo 51. Dadas las funciones regulares e integrables $f(x)$ y $F(x, t)$, se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= F(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= f(x).\end{aligned}$$

Resuelve este problema para la ecuación del calor.

La función H se conoce como propagador porque propaga los datos iniciales, es decir, los toma (a tiempo $t = 0$) y los mueve (a tiempos $t > 0$). Los propagadores son funciones asociadas a la ecuación diferencial y su forma depende de cómo se relacionan las derivadas temporales con las espaciales.

Solución. Tomando la transformada de Fourier y usando las propiedades llegamos a que, si u es una solución de la ecuación del calor anterior, su transformada de Fourier resuelve

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(\xi, t) &= -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) + \hat{F}(\xi, t) \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Vista como una familia de EDOs (indexada en la variable ξ), es una EDO lineal de primer orden que se puede resolver con el método del factor integrante. Así obtenemos

$$\left(e^{t\xi^2} \hat{u}(\xi, t) \right)_t = e^{t\xi^2} \hat{F}(\xi, t),$$

de donde, integrando y reagrupando términos se llega a

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi) + e^{-t\xi^2} \int_0^t e^{s\xi^2} \hat{F}(\xi, s) ds.$$

De manera equivalente,

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi) + \int_0^t e^{-(t-s)\xi^2} \hat{F}(\xi, s) ds.$$

Ahora podemos volver a aplicar las propiedades anteriores para obtener

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} F(y, s) e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} dy ds.$$

□

En un cierto sentido, la idea detrás del principio de Duhamel es que el problema forzado (es decir, con $F \neq 0$) se puede pensar como un problema de valores iniciales homogéneo (con $F = 0$) empezando con un nuevo dato inicial cada en t . Entonces, por el principio de superposición, las diferentes soluciones particulares se combinarían para dar una solución del problema forzado. En otras palabras, si uno es capaz de resolver el problema con $F = 0$ también es capaz de resolver el problema inhomogéneo para $F \neq 0$. La misma técnica funciona también para la ecuación de ondas:

Ejemplo 52. Dadas las funciones regulares e integrables $f(x)$, $g(x)$ y $F(x, t)$, se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= F(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).\end{aligned}$$

Resuelve este problema para la ecuación del ondas.

Solución. Tomando la transformada de Fourier y usando las propiedades llegamos a que, si u es una solución de la ecuación de ondas anterior, su transformada de Fourier resuelve

$$\begin{aligned}\hat{u}_{tt}(\xi, t) &= -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) + \hat{F}(\xi, t) \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi), \quad \hat{u}_t(\xi, 0) = \hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Vista como una familia de EDOs (indexada en la variable ξ), es una EDO lineal de segundo orden que se puede resolver con el método del variación de los parámetros. Así llegamos a que la solución viene dada por

$$\hat{u}(\xi, t) = C_1 \cos(|\xi|t) + C_2 \sin(|\xi|t) + \int_0^t -\cos(|\xi|t) \frac{\sin(|\xi|s) \hat{F}(\xi, s)}{|\xi|} + \sin(|\xi|t) \frac{\cos(|\xi|s) \hat{F}(\xi, s)}{|\xi|} ds$$

o, si simplificamos y calculamos el valor de las constantes,

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cos(|\xi|t) + \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|} \sin(|\xi|t) + \int_0^t \frac{\sin(|\xi|(t-s)) \hat{F}(\xi, s)}{|\xi|} ds$$

Por supuesto, usando las ideas de D'Alembert también podemos llegar a que la solución del problema no-homogéneo en el espacio físico es (con $c = 1$)

$$u(x, t) = \frac{f(x+t)}{2} + \frac{f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(z) dz + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(z, s) dz ds.$$

Convencerse de esto es un ejercicio que conviene realizar. Para ello quizá sea útil recordar el ejemplo 41. \square

Vamos a hacer un ejemplo donde resolvemos un problema de contorno para la ecuación del calor no-homogénea:

Ejemplo 53. Dadas las funciones regulares e integrables $f(x)$ y $F(x, t)$, se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= F(x, t), \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

Resuelve este problema para la ecuación del calor.

Solución. Sabemos que, dadas esas condiciones de borde, la función u se puede desarrollar como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(nx).$$

Las funciones f y F por su parte cumplen que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(nx).$$

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(nx).$$

Asumiendo suficiente regularidad para la función u se tiene

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t u_n(t) \sin(nx),$$

$$u_{xx}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n(t) \sin(nx).$$

Por lo tanto, usando la ecuación se debe satisfacer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \partial_t u_n(t) \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n(t) \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(nx).$$

Multiplicando por $\sin(mx)$, integrando y usando la ortogonalidad de las funciones $\sin(nx)$ se tiene que cada coeficiente a_n debe satisfacer la EDO

$$\frac{du_n(t)}{dt} = -n^2 u_n(t) + F_n(t),$$

con dato inicial

$$u_n(0) = f_n.$$

De nuevo, esta EDO se puede resolver usando el método del factor integrante para llegar a

$$u_n(t) = e^{-tn^2} f_n + e^{-tn^2} \int_0^t e^{sn^2} F_n(s) ds.$$

Equipados con la expresión para los coeficientes concluimos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} f_n \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-(t-s)n^2} F_n(s) \sin(nx) ds.$$

□

Finalmente vamos a ver un ejemplo para el caso en el que las condiciones de borde no son homogéneas:

Ejemplo 54. Encuentra la solución de

$$u_t(x, t) - \frac{u_{xx}(x, t)}{4} = e^{-t\pi^2} \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 2,$$

$$u(0, t) = -1$$

$$u(2, t) = 1,$$

$$u(x, 0) = x + 2 \sinh(x) - 1.$$

Solución. Definimos la función

$$h(x) = x - 1.$$

Observamos que

$$v = u - h$$

verifica

$$v_t(x, t) - \frac{v_{xx}(x, t)}{4} = e^{-t\pi^2} \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 2,$$

$$v(0, t) = 0$$

$$v(2, t) = 0,$$

$$v(x, 0) = 2 \sinh(x).$$

La idea es resolver el problema para v y hallar u posteriormente usando que conocemos h . La ventaja principal de esta aproximación es que tenemos (pagando con cambiar el dato inicial y la función de *forcing*) un nuevo problema esta vez con condiciones de borde homogéneas.

Sabemos por lo visto en el curso que la solución general para v tiene la forma

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{v}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right),$$

de manera que solo tenemos que hallar los coeficientes \hat{v}_n . Para ello observamos que se tiene

$$v_t(x, t) - \frac{v_{xx}(x, t)}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d\hat{v}_n(t)}{dt} + \frac{\hat{v}_n(t)}{4} \frac{n^2\pi^2}{4} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right),$$

y por lo tanto, usando la ecuación para v , multiplicando por $\sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right)$ e integrando, llegamos a la EDO

$$\frac{d\hat{v}_n(t)}{dt} + \frac{\hat{v}_n(t)}{4} \frac{n^2\pi^2}{4} = e^{-\pi^2 t} \int_0^2 \sin(2\pi x) \sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right) dx.$$

Esta EDO puede resolverse por medio del método del factor integrante para finalizar con el ejercicio. \square

7.3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

En las secciones anteriores hemos estado estudiando y viendo aplicaciones de la transformada de Fourier. Así hemos visto que la transformada de Fourier para una función con valores reales general (es decir, sin asumir simetrías) toma valores complejos. Además, para poder hablar de transformada de Fourier de una función

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

necesitábamos conocer la función f en toda la recta real para poder calcular la integral anterior.

Así podemos preguntarnos si podemos definir una transformada integral que no tenga esas características. Así definimos la transformada de Laplace:

Definición 5. Definimos la transformada de Laplace de la función $u(t)$ como

$$(96) \quad \mathcal{L}[u](s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt,$$

para los valores de s tales que la integral anterior sea finita.

Si bien se puede definir la transformada inversa de Laplace no lo haremos aquí. Observamos que, dada u , basta con que $|u(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ para poder definir la transformada de Laplace en algún rango de s . Concretamente

Teorema 11. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos tal que existen $\alpha > 0$ y C de manera que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}.$$

Entonces existe la transformada de Laplace de u

$$\mathcal{L}[u](s)$$

para todo $s > \alpha$.

Demostración. Basta con observar que se tiene la desigualdad

$$\left| \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{\infty} Ce^{\alpha t} e^{-st} dt \leq \frac{\tilde{C}}{s - \alpha}.$$

□

Ejemplo 55. Calcula la transformada de Laplace de

$$f(t) = 1, t \geq 0.$$

Solución. Se tiene que, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

De la misma manera, si $s \leq 0$ la transformada de Laplace no se puede definir. □

Ejemplo 56. Calcula la transformada de Laplace de

$$f(t) = t, t \geq 0.$$

Solución. Se tiene que, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt = \frac{1}{s^2},$$

donde hemos integrado por partes. Igual que ocurría en el ejemplo anterior, si $s \leq 0$ la transformada de Laplace no se puede definir. □

Ejemplo 57. Calcula la transformada de Laplace de

$$f(t) = e^{ct}, t \geq 0.$$

Solución. Se tiene que

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{ct} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(c-s)t} dt = \frac{e^{(c-s)t}}{c-s} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{c-s},$$

donde hemos asumido $s > c$. □

De manera similar a como pasaba con la transformada de Fourier, la transformada de Laplace cumple diversas propiedades:

Teorema 12. Sean u y v dos funciones regulares e integrables con transformadas de Laplace dadas por

$$\mathcal{L}[u](s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-ts} dt$$

$$\mathcal{L}[v](s) = \int_0^{\infty} v(t)e^{-ts} dt.$$

Entonces

- Si $w(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$ se tiene que

$$\mathcal{L}[w](s) = c_1\mathcal{L}[u](s) + c_2\mathcal{L}[v](s),$$

- Si $w(t) = \partial_t u(t)$ entonces

$$\mathcal{L}[w](s) = s\mathcal{L}[u](s) - u(0).$$

- De la misma manera, si $w(t) = tu(t)$ entonces

$$\mathcal{L}[w](s) = -(\mathcal{L}[u](s))_s.$$

- Si u y v se anulan para $t < 0$ y se define $w(t) = u(t) * v(t)$, es decir,

$$w(t) = \int_{\mathbb{R}} u(\eta)v(t-\eta)d\eta = \int_0^t u(\eta)v(t-\eta)d\eta$$

entonces

$$\mathcal{L}[w](s) = \mathcal{L}[u](s)\mathcal{L}[v](s)$$

Así vemos que la transformada de Laplace también permite intercambiar derivadas por multiplicadores (si bien la manera concreta de intercambiar es diferente al involucrar $u(0)$) y productos por convoluciones.

Las propiedades anteriores nos permiten usar la transformada de Laplace para resolver problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que nos transforma EDOs en ecuaciones algebraicas y además, el hecho de que la integral esté definida en la semirecta real (en lugar de la recta real como es el caso de la transformada de Fourier), la hace particularmente útil para tratar problemas donde aparezca el tiempo (que típicamente tiene sentido para valores positivos):

Ejemplo 58. Resuelve

$$u_t(t) + u(t) = 1$$

con dato inicial

$$u(0) = 2.$$

Solución. Tomando la transformada de Laplace llegamos a que

$$\mathcal{L}[u_t](s) + \mathcal{L}[u](s) = \mathcal{L}[1](s).$$

Usando las propiedades anteriores, obtenemos que la EDO anterior es equivalente a

$$s\mathcal{L}[u](s) - u(0) + \mathcal{L}[u](s) = \frac{1}{s},$$

y por lo tanto

$$\mathcal{L}[u](s) = \frac{1}{s(1+s)} + \frac{2}{1+s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s} + \frac{2}{1+s}.$$

Usando las transformadas de Laplace de los ejemplos anteriores obtenemos que

$$u(t) = e^{-t} + 1.$$

□

7.4 FUNCIONES IDEALES O DISTRIBUCIONES

El término función ideal se usa para recalcar que si bien el comportamiento de estos objetos se asemeja al de las funciones de toda la vida (por ejemplo, se puede definir algún cierto sentido de integral), lo cierto es que no son funciones. El término distribución viene de que se pueden entender algunas de estas funciones ideales (por ejemplo la δ de Dirac) como distribuciones de masa.

Para motivar el concepto de las funciones *ideales* (también conocidas como distribuciones) vamos a repasar la construcción de los números y a centrarnos en el caso paradigmático de la δ de Dirac. La δ de Dirac definida anteriormente es, casi seguro, la función ideal más conocida y muy posiblemente cualquier estudiante de física haya oído hablar de ella con anterioridad. El estudiante interesado en una aproximación completamente rigurosa desde el punto de vista matemático (a la vez que breve) a las distribuciones puede leer [3].

Para motivar un poco el concepto de distribución o función generalizada vamos a tratar brevemente la historia del concepto de número. A lo largo de la historia el concepto de número ha ido cambiando. Así uno tiene los números naturales, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \text{etc}\}$, que sirven para sumar o multiplicar. Si uno quiere restar entonces tiene que ampliar su concepto de número para considerar los enteros, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \text{etc}\}$. Para dividir uno debe definir los números racionales $\mathbb{Q} = \{0, 1, -1, 2, -2, 1/2, -1/2, \text{etc}\}$. Hasta ahora hemos definido los números en base a las distintas operaciones que queríamos hacer con ellos. Equipados con estas operaciones podemos plantearnos el problema de resolver ecuaciones algebraicas del estilo de

$$x^2 - 2 = 0.$$

Entonces descubrimos que esta ecuación, que tiene como solución $\pm\sqrt{2}$ nos lleva a unos números que no son los anteriores: son los números irracionales, es decir, aquellos que no son cocientes de números enteros (es decir, los que no son números racionales). Sabemos que la unión de los números irracionales y los racionales nos da el conjunto de los números reales, \mathbb{R} . Sin embargo, si bien la definición de los números naturales, enteros y racionales forma parte del *software primario* del ser humano, el concepto de número real es, de alguna manera, *extraño*. Hemos dicho que $\sqrt{2}$ es irracional, pero lo cierto es que no hemos dicho *qué* es un número irracional, *hemos dicho qué NO es un número irracional*. Decir lo que no es algo será útil, pero no es una definición propiamente dicha. Volvamos a $\sqrt{2}$. Sabemos que

$$\sqrt{2} = 1,414213\dots$$

Así podemos definir $\sqrt{2}$ de la siguiente manera. Consideramos la sucesión $a_n \in \mathbb{Q}$ dada por

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = \frac{14}{10},$$

$$a_3 = \frac{141}{100},$$

$$a_4 = \frac{1414}{1000},$$

$$a_5 = \frac{14142}{10000},$$

etc. Esta sucesión de números racionales converge a $\sqrt{2}$. Podemos así definir $\sqrt{2}$ como su límite. Por supuesto, lo mismo puede hacerse con otros números irracionales. Es decir, podemos definir los números irracionales como *límites de sucesiones de números racionales*. Lo cierto es que se puede argumentar que hay ciertos problemas con la definición de número irracional tal cual la hemos escrito anteriormente. Por ejemplo [14],

The problem with this approach is that the limit, if irrational, does not logically exist until the irrational numbers have been defined. Georg Cantor suggests that this error went unnoticed because it did not lead to inconsistencies with the *usual* properties of the real numbers, as understood at the time.

El estudiante interesado puede seguir leyendo en [15].

Usando las ideas anteriores, podemos entender los números irracionales como una especie de *números ideales* obtenidos como límites de sucesiones.

Vamos a comenzar motivando la definición de la δ de Dirac. La δ de Dirac es posiblemente la función *ideal* más popular. Vaya por delante el aviso de que las distribuciones son objetos matemáticos *delicados*, por lo que su estudio en profundidad es complicado. Aquí (de la misma manera que venimos haciendo todo el curso), vamos a seguir evitando los tecnicismos matemáticos y a centrarnos en las principales ideas detrás de los conceptos estudiados. Volvamos por un momento a la fórmula (91). Al menos formalmente se puede escribir que

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\zeta(x-z)} d\zeta \right) dz.$$

Es decir, si definimos (de momento esta definición es formal) la δ **de Dirac** como

$$\delta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\zeta y} d\zeta,$$

observamos que la igualdad anterior en el caso $x = 0$, se reduce a

$$(97) \quad u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\zeta z} d\zeta \right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} u(z) \delta(z) dz.$$

Es decir, la δ de Dirac hace que *integrar sea evaluar*. Como la integral que conocemos (para funciones *standard*) viene de una suma de Riemann, integrar es, en un cierto sentido, equivalente a promediar y sabemos que promediar (salvo casos triviales) nunca devuelve los valores originales exactos. Esto sugiere que como función *standard* la δ de Dirac no puede existir. Esto

Definir objetos como límites es algo que hemos hecho en multitud de ocasiones antes.

Habíamos visto que un funcional era una aplicación que mandaba funciones en un determinado espacio a números reales.

mismo lo podíamos haber intuído sin más que notar que la fórmula anterior se reduce a

$$\delta(y) = \frac{\widehat{1}}{\sqrt{2\pi}}(y),$$

y ya vimos que como función *standard*, $\widehat{1}$ no existe. Sin embargo, siempre que podamos evaluar una función en un determinado punto podemos definir la δ de Dirac. Es decir, dada una función continua u , la acción de la δ de Dirac sobre esta función consiste en retornar su valor en $z = 0$. De manera aún más precisa tenemos la siguiente definición:

Definición 6. La δ de Dirac es un funcional

$$\delta[u] : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para cada función continua $u \in C(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\delta[u] \stackrel{\text{def}}{=} u(0).$$

La acción de este funcional puede entenderse como

$$\delta[u] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(z)\delta(z)dz.$$

Podemos pensar que nos interesa saber cómo actúa la δ de Dirac sobre las funciones, más que definir una fórmula para ella. En este sentido *integrar* es, de alguna manera, el análogo de realizar diferentes mediciones. Así, vamos a usar la idea de ver qué hace una determinada distribución al actuar por medio de una integral sobre distintas funciones regulares como medio para conocer dicha distribución.

Habíamos dicho que los irracionales nos aparecían como números en un cierto sentido idealizados obtenidos como límites de números racionales bien conocidos. Ahora vamos a ver que la δ de Dirac (y más generalmente otras distribuciones) se pueden definir como límites de funciones *clásicas*.

Para dar la definición vía un límite mencionada anteriormente definimos la sucesión de funciones *salto*

$$g_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in [-1/n, 1/n]^c \\ \frac{n}{2} & \text{si } z \in [-1/n, 1/n] \end{cases}$$

Estas funciones intentan reflejar el efecto de un impulso cada vez mayor en una zona cada vez más localizada. Observamos que, para $u(z) \equiv 1$ se tiene que

$$1 = u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z)g_n(z)dz.$$

Es decir, al menos para ciertas funciones g_n cumple que integrar sea evaluar. Sin embargo, es fácil ver que eso no es ni mucho menos general. Veamos que, efectivamente, la acción de estas g_n (por medio de una integral) nos permite definir la δ de Dirac de manera rigurosa. Es decir, vamos a considerar los funcionales

$$\mathcal{F}_{g_n}[u] : C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}_{g_n}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} u(z)g_n(z)dz$$

y a estudiar su límite:

Teorema 13. Sea g_n la familia definida anteriormente y sea $u \in C(\mathbb{R})$ una función dada. Entonces se tiene que

$$u(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{g_n}[u] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(z)g_n(z)dz.$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{g_n}[u] &= \int_{-\infty}^{\infty} u(z)g_n(z)dz \\ &= \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} u(z)dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u\left(\frac{s}{n}\right) ds, \end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variables

$$s = nz.$$

Ahora podemos convencernos fácilmente de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{g_n}[u] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u\left(\frac{s}{n}\right) ds = \frac{u(0)}{2} \int_{-1}^1 1 ds = u(0).$$

□

Observamos que ya nos habían salido más veces antes expresiones muy cercanas o directamente equivalentes sin que lo notásemos. Por ejemplo, usando (74) para calcular la N -ésima suma parcial de la serie de Fourier de u obteníamos

$$S_N u(0) = \int_{-L}^L u(z) \mathcal{D}_N(-z) dz,$$

y nos preguntábamos cuándo la serie de Fourier convergía puntualmente, es decir, cuándo se tenía que

$$u(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L}^L u(z) \mathcal{D}_N(-z) dz.$$

Por otro lado, habíamos visto también el propagador de la ecuación del calor

$$H(x, t) = \widehat{(e^{-\xi^2 t})} = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

En el espacio físico (en el mundo de las variables x, t) no es tan sencillo ver que la acción de $H(x, t)$ cuando $t \rightarrow 0$ nos permita definir la δ de Dirac, sin embargo, en el espacio de Fourier es sencillo porque se reduce a

$$1 = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\xi^2 t},$$

por lo que, usando el carácter real de las funciones junto con el teorema de Plancherel (teorema 10) tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)H(x, t)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) \widehat{H(\xi, t)} d\xi,$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} u(x) H(x, t) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e^{-\xi^2 t} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Usando la definición de la transformada de Fourier se llega a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} u(x) H(x, t) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(z) e^{-i\xi z} dz d\xi,$$

donde reconocemos (97) y por lo tanto la δ de Dirac.

Ejemplo 59. Sea $u(x) = x$. Calcula

$$\delta[u]$$

Solución. Se tiene que $u \in C$ por lo que tiene sentido hablar de $u(0)$. Así sabemos que

$$\delta[u] = u(0) = 0.$$

Vamos a comprobarlo. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{g_n}[u] &= \int_{-\infty}^{\infty} u(z) g_n(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z g_n(z) dz \\ &= \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{s}{n} ds \\ &= \frac{1}{n} \frac{s^2}{4} \Big|_{-1}^1. \end{aligned}$$

Y así obtenemos que el límite es cero. □

De momento hemos visto cómo definir (como límite de funciones *clásicas*) la δ de Dirac. Por supuesto, otras distribuciones se pueden definir de manera similar. Esto es análogo a cuando definíamos $\sqrt{2}$ como límite y ampliábamos así el conjunto de números admisibles a un cuerpo estrictamente mayor que los racionales. De la misma manera que queríamos mantener las operaciones y sus propiedades (válidas para números racionales) al manejar números irracionales, queremos poder manejar distribuciones de la manera más similar posible a lo que hacemos con las funciones *clásicas*. El siguiente ejemplo muestra que esto puede hacerse:

Ejemplo 60 (Composición). Sea $\alpha^2 > 0$. Demuestra

$$\delta(z^2 - \alpha^2) = \frac{1}{2} \frac{\delta(z - \alpha) + \delta(z + \alpha)}{|\alpha|}$$

Solución. Las funciones ideales o distribuciones deben generalizar el concepto de función, por lo que las integrales *deben poderse manejar de la manera usual*. Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(z)\delta(z^2 - \alpha^2)dz &= \int_{-\infty}^0 u(z)\delta(z^2 - \alpha^2)dz + \int_0^{\infty} u(z)\delta(z^2 - \alpha^2)dz \\ &= -\int_{\infty}^0 u(-\sqrt{s})\delta(s - \alpha^2)\frac{ds}{2\sqrt{s}} + \int_0^{\infty} u(\sqrt{s})\delta(s - \alpha^2)\frac{ds}{2\sqrt{s}} \\ &= \int_{-\alpha^2}^{\infty} u(-\sqrt{y + \alpha^2})\delta(y)\frac{dy}{2\sqrt{y + \alpha^2}} \\ &\quad + \int_{-\alpha^2}^{\infty} u(\sqrt{y + \alpha^2})\delta(y)\frac{dy}{2\sqrt{y + \alpha^2}} \\ &= \frac{u(-\sqrt{\alpha^2})}{2\sqrt{\alpha^2}} + \frac{u(\sqrt{\alpha^2})}{2\sqrt{\alpha^2}} \\ &= \frac{u(-|\alpha|)}{2|\alpha|} + \frac{u(|\alpha|)}{2|\alpha|}. \end{aligned}$$

De donde se concluye que la acción de $\delta(z^2 - \alpha^2)$ es la misma que la de $\frac{1}{2} \frac{\delta(z-\alpha) + \delta(z+\alpha)}{|\alpha|}$ y por lo tanto deben ser iguales. \square

De la definición vista anteriormente podemos extraer la noción de *integral* de la δ de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} 1\delta(z)dz = 1.$$

Ahora queremos extender el concepto de derivada para poder dar sentido a *derivada* de una distribución. Desde hace tiempo sabemos que una función derivable (en sentido clásico) es continua, siendo el recíproco falso. Es decir, la derivada clásica de una función continua arbitraria no tiene por qué existir, basta considerar el ejemplo dado por $u(x) = |x|$. Vamos a comenzar definiendo el conjunto

$$C_c^\infty = \{\phi \in C^\infty \text{ tales que } \phi = 0 \forall x \in K^c \text{ donde } K \text{ es un conjunto compacto}\}$$

Estas funciones son todo lo regulares que se quiera y además son cero para todo punto fuera de un conjunto compacto (es decir, de un conjunto cerrado y acotado). Un ejemplo de una de tales funciones es

$$\phi(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in [-1, 1]^c \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } z \in [-1, 1] \end{cases}.$$

Queremos ahora usar la idea de que *integrar contra distintas ϕ es realizar mediciones*, de manera que si sabemos todas estas mediciones sabemos qué hace la función. Sea ahora $\varphi(x) \in C_c^\infty$ y consideremos $u \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, integrando por partes, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} u_x(x)\varphi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi_x(x)dx.$$

Es decir, podemos ver cuál es la acción de u_x en φ sin más que ver cuál es la acción de u en $-\varphi_x$. Esto permite definir un concepto generalizado de derivada

De hecho, esta idea de medición de una función aparece también en el hecho de que a las funciones en el conjunto C_c^∞ se las conoce como funciones test.

Definición 7. La función v es la *derivada débil* de u si cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi_x(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

El hecho de que la igualdad anterior se satisfaga para toda $\varphi \in C_c^\infty$ es crucial porque representa el hecho de que v se comporta como la derivada de u (si es que dicha derivada existiese) para toda función φ que nos sirva de test. La igualdad anterior permite definir la *derivada débil* para funciones que sean solo integrables, si bien la derivada débil en principio puede ser una función generalizada. De la misma manera, la definición anterior puede ampliarse hasta cubrir a las funciones ideales. Veamos unos ejemplos de esto.

Ejemplo 61 (La derivada débil coincide con la clásica si ésta existe). Calcula la derivada débil de $u(x) = x$.

Solución. Sea φ una función test arbitraria. Entonces, integrando por partes, tenemos que

$$- \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi_x(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} x\varphi_x(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx,$$

por lo que $v(x) = 1$ es la derivada débil de $u(x) = x$. \square

Ejemplo 62 (La derivada débil de funciones no derivables). Calcula la derivada débil de $u(x) = |x|$.

Solución. La derivada de $u(x)$ ya nos salió anteriormente (ver (84)). Sea φ una función test arbitraria. Entonces tenemos que

$$- \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi_x(x)dx = - \int_{-\infty}^0 -x\varphi_x(x)dx - \int_0^{\infty} x\varphi_x(x)dx.$$

De nuevo debemos integrar por partes. Obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x\varphi_x(x)dx &= 0\varphi(0) - \int_{-\infty}^0 1\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^0 1\varphi(x)dx \\ - \int_0^{\infty} x\varphi_x(x)dx &= 0\varphi(0) + \int_0^{\infty} 1\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} 1\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, \infty) \\ -1 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \end{cases},$$

es la derivada débil de $|x|$. \square

Ejemplo 63 (Derivada débil de funciones discontinuas). Calcula la segunda derivada débil de $u(x) = |x|$.

Solución. La primera derivada débil ya la hemos calculado, así que basta con calcular la derivada débil de la función $v(x)$ del ejemplo anterior. Tenemos que

$$- \int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi_x(x)dx = - \int_{-\infty}^0 -1\varphi_x(x)dx - \int_0^{\infty} 1\varphi_x(x)dx,$$

para toda función test. Estas integrales podemos calcularlas explícitamente sin más que usar el teorema fundamental del cálculo, llegando a

$$\int_{-\infty}^0 1 \varphi_x(x) dx = \varphi(0),$$

$$-\int_0^{\infty} 1 \varphi_x(x) dx = \varphi(0).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$-\int_{\mathbb{R}} v(x) \varphi_x(x) dx = 2\varphi(0).$$

Como sabemos que

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \delta(x) dx,$$

si escribimos w para la derivada débil de $v(x)$ la igualdad anterior nos dice que

$$w(x) = 2\delta(x).$$

□

Ejemplo 64 (Derivada débil de funciones no acotadas). Calcula la derivada débil de $u(x) = \log(|x|)$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$ un parámetro fijo. Ahora consideramos las integrales

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} u(x) \varphi_x(x) dx \text{ y } \int_{-\infty}^{-\varepsilon} u(x) \varphi_x(x) dx,$$

para una función test arbitraria. En estas integrales podemos integrar por partes llegando a

$$-\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \varphi(-\varepsilon) \log(\varepsilon),$$

y

$$-\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx - \varphi(\varepsilon) \log(\varepsilon).$$

Si ahora sumamos ambas integrales y tomamos el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ llegamos a

$$\int_{\mathbb{R}} \log(|x|) \varphi_x(x) dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right) \frac{1}{x} \varphi(x) dx + (\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) \log(\varepsilon).$$

Usando que

$$(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) \log(\varepsilon) \approx -2\varphi_x(0)\varepsilon \log(|\varepsilon|) \rightarrow 0,$$

concluimos que la derivada débil de $\log(|x|)$ es la distribución

$$\text{p.v.} \frac{1}{x}$$

que actúa sobre las funciones test por medio de

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right) \frac{1}{x} \varphi(x) dx.$$

El símbolo p.v. denota valor principal y significa que la integral impropia debe tomarse con el límite simétrico concreto dado por

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right)$$

□

De la misma manera que podemos calcular derivadas débiles de funciones (eso sí, estas derivadas débiles pueden ser funciones idealizadas y no funciones en el sentido clásico), podemos calcular derivadas débiles de funciones idealizadas:

Ejemplo 65 (Derivada débil de la δ). Calcula la derivada débil de $\delta(x)$.

Solución. Sin más que aplicar la definición llegamos a

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_x(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi_x(x) dx = -\varphi_x(0).$$

□

Veamos un último ejemplo.

Ejemplo 66 (Derivada débil de de funciones no integrables). Calcula la derivada débil de $u(x) = 1/|x|$.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$ un parámetro fijo. Ahora consideramos las integrales

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} u(x) \varphi_x(x) dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi_x(x) dx \text{ y } \int_{-\infty}^{-\varepsilon} u(x) \varphi_x(x) dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{-1}{x} \varphi_x(x) dx,$$

para una función test arbitraria. En estas integrales podemos integrar por partes llegando a

$$- \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} \varphi(x) dx + \frac{-\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon},$$

y

$$- \int_{\varepsilon}^{\infty} -\frac{1}{x^2} \varphi(x) dx - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Si ahora sumamos ambas integrales y tomamos el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ llegamos a

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi_x(x) dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right) \frac{-1}{x|x|} \varphi(x) dx + \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Usando que

$$\frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow -\varphi_x(0),$$

concluimos que la derivada débil de $|x|^{-1}$ es la distribución

$$\text{p.v.} \frac{-1}{x|x|} - \delta_x(x).$$

Esta distribución actúa sobre las funciones test de la siguiente manera

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \right) \frac{-1}{x|x|} \varphi(x) dx + \varphi_x(0).$$

□

7.5 CONCLUSIONES

En este capítulo hemos definido la transformada de Fourier, que es una transformada básica en multitud de aplicaciones pero también en matemáticas más abstractas. Igualmente definimos la transformada inversa de Fourier y vimos propiedades de ambas, entre ellas las más importantes para nosotros en este curso:

1. Derivadas en multiplicadores:

$$\widehat{\partial_x^k u}(\xi) = (i\xi)^k \hat{u}(\xi).$$

Esto se probaba sin más que integrar por partes. Y viceversa, *i.e.*

$$\widehat{x^k u}(\xi) = i^k \frac{d^k \hat{u}(\xi)}{d\xi^k},$$

y la prueba de este hecho se obtenía sin más que derivar la expresión integral.

2. Productos en convoluciones:

$$\widehat{uv}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{u} * \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\eta) \hat{v}(\xi - \eta) d\eta,$$

Y viceversa, *i.e.*

$$\widehat{u * v}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi).$$

3. Teorema de Parseval/Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \overline{v(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi.$$

También vimos cómo aplicar la transformada de Fourier para resolver problemas no-homogéneos (es lo que se conoce como principio de Duhamel para problemas de evolución). De hecho, conseguimos aplicar las mismas ideas también a problemas donde el dominio era acotado, por lo que en vez transformada de Fourier lo hicimos para series de Fourier. El principio de Duhamel nos llevó a introducir el concepto de propagador de la ecuación del calor y de ondas. Tras esto definimos la transformada de Laplace y vimos cómo se podía aplicar a la resolución de EDOs así como algunas propiedades. Finalmente, introdujimos las distribuciones (también conocidas como funciones ideales) y la noción de derivada débil. Más concretamente vimos diversas propiedades de la δ de Dirac así como de la derivada débil, entre ellas que

1. Si una función es derivable en sentido clásico, entonces la derivada débil coincide con la derivada clásica. Es decir, la derivada débil generaliza la derivada clásica.
2. Hay funciones que no son derivables que tienen otra función como derivada débil (p.e. $|x|$).
3. Podemos definir la derivada débil de una función ideal. La consecuencia es que podemos definir derivadas de objetos muy singulares.

7.6 EJERCICIOS SUGERIDOS

Ejercicio 30 (Ejercicio para practicar la transformada de Fourier). Demuestra que

$$\widehat{\partial_x^k u}(\xi) = (i\xi)^k \hat{u}(\xi).$$

Ejercicio 31 (Ejercicio para practicar la transformada de Fourier). Demuestra que

$$\widehat{x^k u}(\xi) = i^k \frac{d^k \hat{u}(\xi)}{d\xi^k},$$

Ejercicio 32 (Ejercicio para practicar la transformada de Fourier). Demuestra que

$$\widehat{u * v}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi).$$

Ejercicio 33 (Ejercicio para practicar la transformada de Laplace). Demuestra que

$$\mathcal{L}[u_t](s) = s\mathcal{L}[u](s) - u(0).$$

Ejercicio 34 (Ejercicio para practicar la transformada de Fourier). Calcula la solución general de la ecuación

$$iu_t = u_{xx}.$$

Ejercicio 35 (Ejercicio para practicar la transformada de Fourier). Calcula la solución general de la ecuación

$$u_t = u_{xx} + u_x - u.$$

Ejercicio 36 (Ejercicio para practicar la transformada de Fourier). Se define la transformada de Hilbert \mathcal{H} como

$$\widehat{\mathcal{H}u} = -i \frac{\xi}{|\xi|} \hat{u}.$$

Escribe la solución general de

$$u_t = \mathcal{H}u.$$

Ejercicio 37 (Ejercicio para practicar la transformada de Fourier). Sea $u \in L^2(\mathbb{R})$. Demuestra que $\mathcal{H}u \in L^2(\mathbb{R})$. (Si usas algún teorema de los vistos en clase, enuncialo)

Ejercicio 38 (Ejercicio para practicar la transformada de Fourier). Calcula la transformada de Fourier de la función

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\alpha x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ es una constante fija.

Ejercicio 39 (Ejercicio para practicar la transformada de Laplace). Calcula la transformada de Laplace de la función

$$u(t) = \sin(\alpha t)$$

donde $\alpha > 0$ es una constante fija.

Ejercicio 40 (Ejercicio para practicar derivadas débiles). Calcula la derivada débil de

$$u(x) = x^2 \sin(1/x).$$

¿Es derivable en el sentido clásico esta función?

Ejercicio 41 (Ejercicio para practicar derivadas débiles). Calcula la derivada débil de

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Es derivable en el sentido clásico esta función?

Índice alfabético

- Acción, 25
Aproximación de mínimos cuadrados, 80
Cálculo de variaciones, 23
Caminos aleatorios, 47
Clasificación EDPs, 54
Concepto de solución, 74
Condición de frontera Dirichlet, 93
Condición de frontera Neumann, 94
Condiciones de borde Dirichlet, 60, 64, 67
Condiciones de borde Neumann, 62, 65, 68
Conservación de la energía, 43
Conservación del momento, 38
Convergencia L^2 , 82
Convergencia en espacios de funciones, 82
Convergencia puntual, 82
Convergencia series de Fouier, L^2 , 96, 98
Convergencia series de Fourier, L^2 , 81, 86
Convergencia series de Fourier, puntual, 85, 96, 97
Convergencia series de Fourier, uniforme, 84
Convergencia uniforme, 82
Curvatura, 53
Delta de Dirac, 128, 130
Delta de Kronecker, 86
Derivada débil, 133, 134
Desigualdad de Bessel, 81, 86
Disipación de la energía, 50
Distribuciones, 128
Ecuación de Burgers, 36
Ecuación de la cuerda vibrante, 37, 59
Ecuación de ondas, 37, 59, 60, 73
Ecuación de transporte, 29, 41, 45
Ecuación del calor, 47, 64
Ecuación del Laplace, 67
Ecuación lineal, 29
Ecuación no lineal, 33
Ecuaciones elípticas, 54
Ecuaciones hiperbólicas, 54
Ecuaciones parabólicas, 54
Energía cinética, 24, 26
Energía potencial, 24, 26
Espacio L^2 , 76
Estados estacionarios, EDOs, 52
Estados estacionarios, EDPs, 53
Fórmula de Euler, 61, 88
Fenómeno de Gibbs, 88
Forma integral de una EDO, 19
Función de Bessel de primera clase, 97
Función de Bessel de segunda clase, 97
Función Gamma, 97
Función impar, 92
Función par, 92
Funcional, 22, 26, 130
Funcional de Lyapunov, 50
Funciones test, 133
Hamiltoniano, 24, 43
Iteración de Picard, 19, 27
Lagrangiano, 25
Lema de Riemann-Lebesgue, 83
Ley de Fick, 48
Ley de Fourier, 48
Ley de Hooke, 39
Método de las características, 33
Movimiento browniano, 47
Núcleo de Dirichlet, 78
Núcleo de Poisson, 120
No unicidad, Laplace, 54

- Oscilador armónico, 14, 22
- Polinomio de Taylor, 30, 40
- Polinomios de Legendre, 96
- Principio de Duhamel, 121
- Principio de incertidumbre, 118
- Principio de superposición, 29, 42, 45, 51, 59, 60, 62, 64, 65, 67, 68, 72
- Probabilidad, 47
- Problema de Basilea, 110
- Problema de valores de frontera, calor, 64
- Problema de valores de frontera, EDOs, 22, 27
- Problema de valores de frontera, EDPs, 59
- Problema de valores de frontera, Laplace, 67, 68
- Problema de valores de frontera, ondas, 60, 62
- Problema de valores iniciales, EDOs, 14
- Problema de valores iniciales, EDPs, 31, 41, 48
- Problema isoperimétrico, 108
- Problemas de Hilbert, 39
- Problemas de Sturm-Liouville, 70
- Propagador, 120
- Scaling, 48
- Separación de variables, 64, 65
- Separación de variables, calor, 64
- Separación de variables, Laplace, 67
- Separación de variables, ondas, 60, 62
- Separación de variables, 67, 68
- Serie de Fourier, 73
- Serie de Fourier, cosenos, 63, 66, 69, 94
- Serie de Fourier, exponenciales, 75
- Serie de Fourier, funciones de Bessel, 97
- Serie de Fourier, polinomios de Legendre, 96
- Serie de Fourier, propiedades, 89
- Serie de Fourier, senos, 62, 65, 68, 88, 93
- Serie de Fourier, senos y cosenos, 90
- Sucesión de Cauchy, 17
- Suma de Riemann, 89, 114
- Teorema de Parseval, 90
- Teorema de Picard, 15
- Teorema de Plancherel, 90
- Teorema del punto fijo de Banach, 16, 19, 20
- Transformada de Fourier, 113, 114
- Transformada de Fourier, propiedades, 116
- Transformada de Laplace, 125
- Transformada de Laplace, propiedades, 126
- Transformada inversa de Fourier, 114
- Unicidad de soluciones, calor, 50
- Unicidad de soluciones, ondas, 44
- Valor principal, 135
- Velocidad finita de propagación, ondas, 43
- Velocidad finita de propagación, transporte, 32
- Velocidad infinita de propagación, 52

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Richard Evelyn Donohue Bishop. *Vibration*. CUP Archive, 1979.
- [2] Lennart Carleson. On convergence and growth of partial sums of fourier series. *Acta Mathematica*, 116(1):135–157, 1966.
- [3] R Courant and D Hilbert. *Methods of mathematical physics (interscience publ., new york and london)*, vol. 1. *vol, 1*, 1962.
- [4] Olivier Darrigol. The acoustic origins of harmonic analysis. *Archive for history of exact sciences*, 61(4):343–424, 2007.
- [5] Albert Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der physik*, 322(8):549–560, 1905.
- [6] Leonhard Euler. De summatione innumerabilium progressionum. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 91–105, 1738.
- [7] Leonhard Euler. De summis serierum reciprocarum. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pages 123–134, 1740.
- [8] David Hilbert et al. Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(10):437–479, 1902.
- [9] Sergiu Klainerman. Pde as a unified subject. In *Visions in Mathematics*, pages 279–315. Springer, 2010.
- [10] Jean le Rond D’Alembert. Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibrations. *Histoire de l’Académie Royale des Sciences et Belles Lettres (Année 1747)*, 3:214–249, 1747.
- [11] Hans Sagan. *Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics*. Courier Corporation, 1989.
- [12] Marian Smoluchowski. *Essai d’une théorie cinétique du mouvement Brownien et des milieux troublés*. Acad. Litterarum Cracoviensis, 1906.
- [13] Walter A Strauss. *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.
- [14] J Christopher Tweddle. Weierstrass’s construction of the irrational numbers. *Mathematische Semesterberichte*, 58(1):47–58, 2011.
- [15] Ittay Weiss et al. Survey article: The real numbers—a survey of constructions. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 45(3):737–762, 2015.
- [16] GB Witham. *Linear and nonlinear waves*, 1974.