

Hoja 4

Rafael Granero Belinchón

May 18, 2019

Ejercicio 1. *Demuestra que*

$$\widehat{\partial_x^k u}(\xi) = (i\xi)^k \hat{u}(\xi).$$

Ejercicio 2. *Demuestra que*

$$\widehat{x^k u}(\xi) = i^k \frac{d^k \hat{u}(\xi)}{d\xi^k},$$

Ejercicio 3. *Demuestra que*

$$\widehat{u * v}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{u}(\xi) \hat{v}(\xi).$$

Ejercicio 4. *Demuestra que*

$$\mathcal{L}[u_t](s) = s\mathcal{L}[u](s) - u(0).$$

Ejercicio 5. *Calcula el propagador para la ecuación*

$$iu_t = u_{xx}.$$

Ejercicio 6. *Calcula el propagador para la ecuación*

$$u_t = u_{xx} + u_x - u.$$

Ejercicio 7. Se define la transformada de Hilbert \mathcal{H} como

$$\widehat{\mathcal{H}u} = -i \frac{\xi}{|\xi|} \hat{u}.$$

Escribe el propagador de

$$u_t = \mathcal{H}u.$$

Ejercicio 8. Sea $u \in L^2(\mathbb{R})$. Demuestra que $\mathcal{H}u \in L^2(\mathbb{R})$. (Si usas algún teorema de los vistos en clase, enuncialo)

Ejercicio 9. Calcula la transformada de Fourier de la función

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\alpha x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ es una constante fija.

Ejercicio 10. Calcula la transformada de Laplace de la función

$$u(t) = \sin(\alpha t)$$

donde $\alpha > 0$ es una constante fija.

Ejercicio 11. Calcula la derivada débil de

$$u(x) = x^2 \sin(1/x).$$

¿Es derivable en el sentido clásico esta función?

Ejercicio 12. Calcula la derivada débil de

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Es derivable en el sentido clásico esta función?