EXAMEN FINAL

NOMBRE:

Comentarios:

- Si usas algún teorema de los vistos en clase no hace falta que lo demuestres, pero escribe el enunciado completo.
- Realiza los cálculos explicitamente cuando sea posible.
- Sé claro. Recuerda que parte de lo que se evalúa es la capacidad de poder transmitir información e ideas.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** *Calcula la serie de Fourier de senos de la función*

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ } si \text{ } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -x + \pi \text{ } si \text{ } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases} .$$

Decide razonadamente el límite puntual de la $N-$*ésima suma parcial de la serie de Fourier que has calculado.*

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** *Demuestra que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

(PISTA: Considera la serie de Fourier de la función x^2 *en el intervalo* $[-1, 1]$ *y evalúala en los puntos adecuados.)*

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** *Se considera el siguiente problema de valores de frontera*

$$\begin{gathered} u_{tt} + u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0 = u(\pi, t) \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = 0, \end{gathered}$$

siendo f *la función del ejercicio 1. Clasifica (en elíptica, parabólica o hiperbólica) y resuelve la EDP anterior.*

Ejercicio 4 (1.5 puntos)**.** *Resuelve el siguiente problema de valores iniciales*

$$u_t + uu_x = 0, u(x,0) = x.$$

Ejercicio 5 (1.5 puntos)**.** *Escribe la definición de derivada débil de la función* u*. Definimos la función*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ } si \text{ } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \text{ } si \text{ } no \end{cases} ,$$

donde f *es la función del ejercicio 1. Calcula la primera y la segunda derivada débil de* g*.*

Ejercicio 6 (1 puntos)**.** *Usando la transformada de Fourier, se define el operador*

$$\widehat{\mathcal{O}u}(\xi) = m(\xi)\hat{u}(\xi),$$

donde $m(\xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *es una función acotada,* i.e. $|m(\xi)| \leq C$*. Dada* $u \in L^2$*, demuestra que el operador* $\mathcal{O}$ *esta bien definido y* $\mathcal{O}u \in L^2$*, es decir, que*

$$\mathcal{O} : L^2 \to L^2.$$