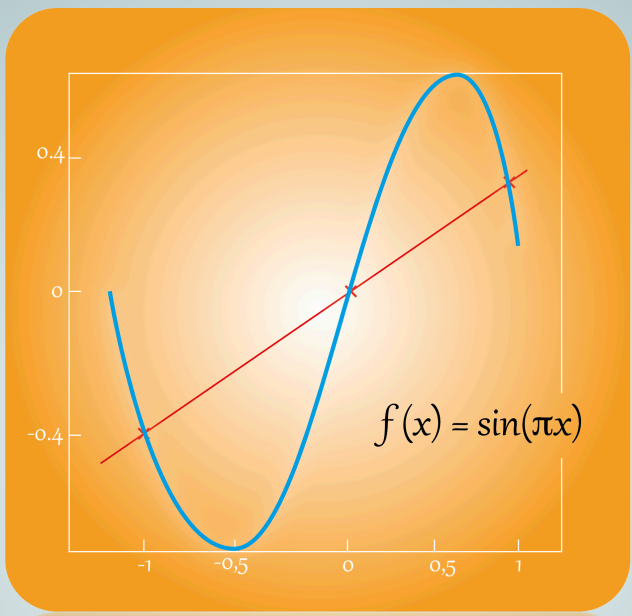
Métodos Numéricos

Capítulo 6. Problemas resueltos



Carlos Beltrán Álvarez

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación

Capítulo 6

Problemas resueltos

En este capítulo incluimos una colección de problemas resueltos con mayor o menor detalle. Para encontrar la solución de algunos de ellos es necesario combinar las técnicas de distintos capítulos.

6.1. Un globo sumergido

Rellenamos un globo esférico que cuando está vacío pesa 1 gramo con 4 litros de aire a nivel de mar y temperatura ambiente, comprobando que al cerrar el globo éste ocupa un volumen de 3,5 litros. A continuación lo sumergimos a una profundidad de $10m$ en el agua de una piscina, momento en el que lo soltamos. El globo es resistente y no explota, pero su volumen cambia de tamaño al sumergirse como te puedes imaginar. Suponemos que la resistencia que ofrece el globo al movimiento en el agua es proporcional a su celeridad y a la superficie del globo en cada momento, y deseamos calcular la constante de proporcionalidad sabiendo únicamente que la parte superior del globo tarda en llegar a la superficie del agua 5 segundos. ¿Como lo harías?
Una respuesta completa a este ejercicio incluye:

i) Elaborar una descripción matemática del problema.

ii) Describir cómo usar los métodos numéricos necesarios para resolver el problema.

iii) Escribir en código Matlab una manera de resolver el problema

Descripción matemática del problema: si el globo se encuentra a una profundidad y, la presión interior y exterior han de equilibrarse y por lo tanto el aire dentro del globo está sometido a una presión de

$$(1 + y/10)atm \approx (1 + y/10)10^5\ Pa,$$

donde estamos tomando que cada 10 metros de profundidad se tiene aproximadamente una presión de 1 atmósfera.
Como el volumen del globo es proporcional a la presión del aire en su interior, a una profundidad y el volumen del globo es

$$V(y) = \frac{c}{(10+y)10^5}m^3, \text{ con } c \text{ una constante de proporcionalidad.}$$

Dado que conocemos $V(0)$, podemos calcular el valor de la constante:

$$3{,}5 = V(0) = \frac{c}{10^6} \Rightarrow c = 3{,}5 \cdot 10^6 m^3/Pa = 3{,}5 \cdot 10^6 \frac{m^4 s^2}{Kg}.$$

Dado que el radio de una esfera y el volumen de la misma se relacionan mediante la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, y la superficie de una esfera es $4\pi R^2$ concluimos que a profundidad y el volumen y la superficie del globo son respectivamente:

$$V(y) = \frac{3{,}5 \cdot 10^6}{(10+y)10^5} = \frac{35}{10+y} m^3,$$

$$S(y) = (36\pi)^{1/3} V^{2/3} = \frac{51{,}7433}{(10+y)^{2/3}} m^2.$$

Podemos pues escribir las ecuaciones del movimiento en función de la profundidad considerando las fuerzas, en función de la profundidad y de la velocidad del movimiento:

- El empuje de Arquímedes: igual al volumen $V(y)$ multiplicado por la densidad del agua 1000 Kg/m^3 y por $g \approx 10$, dirigido verticalmente y hacia arriba. Dado que medimos y positiva hacia abajo, el empuje es por lo tanto:

  $$E(y) = -1000 V(y) = -\frac{35000}{10+y} N.$$

  Esta fuerza actúa mientras el globo esté totalmente sumergido, que es el caso durante todo el experimento.

- La fuerza de la gravedad, $-mg$ con m la masa total del globo (que es constante).

- La fuerza de rozamiento, que de acuerdo con el enunciado y con lo expuesto arriba es de la forma

  $$\alpha S(y) = -\frac{51{,}7433\,\alpha}{(10+y)^{2/3}} \dot{y}\, N.$$

Con ello, las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} \ddot{y} = -\frac{35000}{(10+y)m} + 9{,}8 - \frac{51{,}7433\,\alpha}{(10+y)^{2/3} m} \dot{y} \\ y(0) = 10, \; \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Podemos estimar fácilmente la masa total del globo: dado que el aire es aproximadamente la milésima parte de denso que el agua, 4 litros de aire pesan aproximadamente 4 gramos, y si le sumamos la masa de 1 gramo del globo tenemos $m = 5\,g = 0{,}005\,Kg$.

Descripción del uso de los métodos numéricos para el problema: Para resolver el problema (recordemos que no conocemos α) necesitamos primero escribir el sistema en forma de sistema de primer orden. Incluimos ya la sustitución $m = 0{,}005$:

$$\begin{cases} \dot{w} = F(t,w) = \begin{pmatrix} w_2 \\ -\frac{7 \cdot 10^6}{10+w_1} + 9{,}8 - \frac{1{,}0349 \cdot 10^4\,\alpha}{(10+w_1)^{2/3}} w_2 \end{pmatrix} \\ w(0) = \binom{10}{0} \end{cases}$$

donde $w(t) = \binom{y(t)}{\dot{y}(t)}$. Lo primero que tendremos que hacer es considerar la función

$$\begin{array}{rccc} f: & (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & \alpha & \mapsto & f(\alpha), \end{array}$$

definida del siguiente modo: para cada $\alpha > 0$, $f(\alpha) = y(t=5)$ es el valor de la profundidad de la parte superior del globo tras 5 segundos. A continuación tendríamos que utilizar el método de Newton o de bisección o de la secante para obtener el α tal que $f(\alpha) = 0$. Dicho α proporciona el valor de la constante de rozamiento buscada.

Para tener una idea del valor aproximado de α, podemos por ejemplo pensar en que la velocidad media del globo ($-2\,m/s$) es más o menos constante y se alcanza aproximadamente en la mitad del trayecto, cuando el globo está a 5 metros de profundidad. Con ello, de las ecuaciones del movimiento sacaríamos:

$$0 \approx \ddot{y}(5) = -\frac{7 \cdot 10^6}{15} + 9{,}8 + \frac{2 \cdot 1{,}0349 \cdot 10^4\,\alpha}{15^{2/3}},$$

de donde:

$$\alpha \approx 55{,}6032.$$

Así pues, el código Matlab que usaríamos podría ser el siguiente:

```
clc;clear all;
addpath(genpath('/home/beltranc/Documents/Docencia/NumericoFisicas/Programas'));
% Describimos la formula a la derecha de la ecuacion del movimiento:
F=@(alpha,y,yp) -7*10^6/(10+y)+9.8-1.0349*10^4*alpha*yp/(10+y)^(1/3);

% Calculamos el valor aproximado de alpha con la suposicion de que
% la velocidad es aproximadamente constante y se alcanza su media
% cuando el globo esta a profundidad de 5 metros:
g=@(alpha) F(alpha,5,-2);
alphaaprox=fzero(g,1); % 55.6032

% Escribimos en una funcion aparte la funcion f, como hacemos
% abajo, y entonces escribir. Para alphaaprox obtenemos:

falphaaprox=calculaf(alphaaprox) % -0.0550<0

% Comprobamos que de hecho se alcanza practicamente el valor y=0 en
% el momento t=5. Podriamos parar aqui, de hecho. Algo mas refinado
% seria utilizar biseccion. Para ello vemos que


falphaaproxmas1=calculaf(alphaaprox+1) % 0.1756>0

% Con ello, utilizamos biseccion:

alpha=biseccion(@(a) calculaf(a),alphaaprox,alphaaprox+1,1.e-4,20)

% Obtenemos alpha=55.8370, que cumple f(alpha)=3.4865e-06


function f=calculaf(alpha)
% Devuelve f(alpha) como se describe en el problema.
F=@(alpha,y,yp) -7*10^6/(10+y)+9.8-1.0349*10^4*alpha*yp/(10+y)^(1/3);
derecha=@(t,w) [w(2); F(alpha,w(1),w(2))];
[T,W]=ode23(derecha,[0 5],[10;0]);
f=W(end,1);
```

Como se puede ver, el valor aproximado de α es 55,8370, que cumple $f(\alpha) \approx 3{,}5 \cdot 10^{-6}$.

6.2. Una pelota flotando en una piscina grande

Consideremos aquí el siguiente problema. Tenemos una pelota de radio R flotando en una piscina muy grande, tan grande que la altura del agua no cambia perceptiblemente si la pelota está sumergida o no. Podemos suponer que la pelota tiene una densidad conocida ρ_P, y que el líquido (que puede ser agua dulce, salada u otra sustancia) tiene una densidad ρ_L. Si desviamos la pelota de su situación de equilibrio ¿Cuáles son las ecuaciones del movimiento? ¿Qué clase de movimiento – intuitivamente ondulatorio – se produce?

Respuesta. Resolvamos este problema en detalle, despreciando al menos por el momento las fuerzas de rozamiento. Denotemos por $y(t)$ la altura del centro de la pelota en el momento t, tomando como referencia $y = 0$ en la superficie del líquido (que como hemos indicado suponemos fija). Entonces, la ecuación del movimiento viene dada por

$$m\ddot{y} = -mg + E,$$

donde E es el empuje vertical experimentado por la pelota en virtud del Principio de Arquímedes y m es la masa de la pelota. Para calcular estas cantidades procedemos así:

i) Por un lado, el volumen total de la pelota es $\frac{4}{3}\pi R^3$, con lo que su masa es esa cantidad multiplicada por ρ_P.

ii) Por otro lado, el empuje que el líquido imprime a la pelota es igual al volumen desplazado multiplicado por la densidad del líquido y por g. Nos queda únicamente calcular el volumen desplazado por la pelota cuando está parcialmente sumergida en el agua. Para ello, vemos que si el centro de la pelota está a altura $y \in [-R, R]$ sobre la superficie del agua, entonces la altura de la parte de la pelota que está sumergida es exáctamente $R - y$ (tanto si $y \geq 0$ como si $y < 0$). Con ello, tenemos dos posibilidades:

- Al menos la mitad de la pelota está fuera del líquido, en otras palabras, $y \geq 0$. Un uso gráfico del Principio de Cavalieri (o el Teorema de Fubini, si preferimos) muestra entonces que el volumen sumergido es:

$$\pi \int_{y-R}^{0} (R^2 - (y-t)^2)\, dt = \pi \frac{y^3 - 3yR^2 + 2R^3}{3}.$$

- Más de la mitad de la pelota está sumergida, esto es, $y < 0$. Un análisis gráfico de nuevo nos permite calcular el volumen fácilmente:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi \int_{0}^{R+y} (R^2 - (t-y)^2)\, dt = \pi \frac{y^3 - 3yR^2 + 2R^3}{3}.$$

  Obtenemos pues la misma fórmula que para el caso anterior, aunque el razonamiento sea diferente.

Con todo ello podemos ya escribir las leyes del movimiento en forma de problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = \begin{cases} -g & y \geq R \\ -g + \frac{y^3 - 3yR^2 + 2R^3}{4R^3} \frac{\rho_L}{\rho_P} g & -R < y < R \\ -g + \frac{\rho_L}{\rho_P} g & y < -R \end{cases} \\ y(0) = y_0 \\ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

A continuación debemos, como se ha indicado, crear un vector $w(t)$ con coordenadas $y(t)$ y $\dot{y}(t)$. Podemos programar en Matlab tanto la ecuación del movimiento como su resolución con los códigos `derivada_pelota.m` y `prueba_pelota_flota.m`. Un ejemplo de aplicación da como resultado el gráfico de la Figura 6.1.

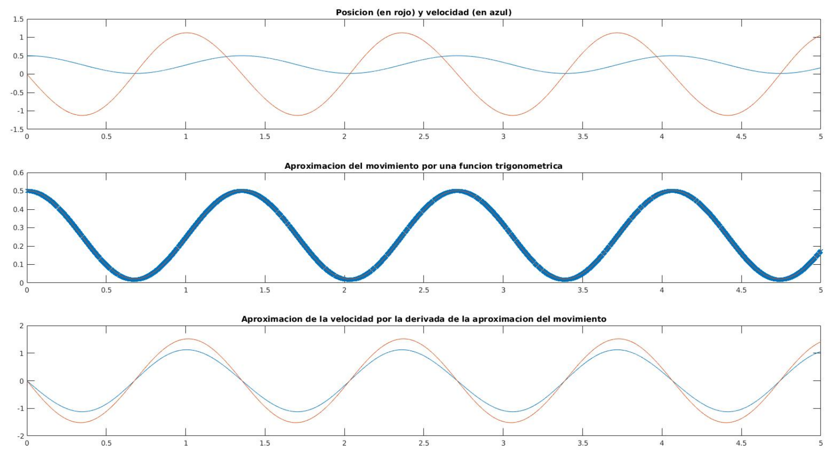


Figura 6.1: Simulación de la altura del centro de una pelota de radio $R = 1m$ y densidad $\rho_P = 100Kg/m^3$ en agua pura (densidad $\rho_L = 1000Kg/m^3$) partiendo del reposo a una altura de 0,5 metros.

6.3. Un planeta en un sistema estelar múltiple

El día 8 de julio de 2016 salió a la luz una noticia que sorprendió a la comunidad científica: se encontró un planeta, denominado HD 131399Ab, que orbita en torno a un sistema estelar triple. El hallazgo, publicado en la revista Science, recibió este comentario por parte de uno de sus descubridores, Kevin Wagner (traducido al español en la prensa como sigue):

> Este planeta no se parece a ninguno otro conocido y su órbita es la más grande descubierta hasta ahora dentro de un sistema estelar múltiple. Se supone que debería ser inestable, por la compleja y cambiante atracción gravitatoria de las estrellas, dando como resultado su rápida eyección y expulsión del sistema. Pero, de alguna forma, HD 131399Ab ha permanecido dentro. El hallazgo sugiere que este tipo de sistemas puede ser más común de lo que consideraban los astrónomos.

Armados con nuestro método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, vamos a plantear una situación simplificada, usando mecánica Newtoniana, de un sistema estelar doble.

Problema 1 *Dadas dos estrellas de igual masa M separadas una distancia constante d que orbitan en torno a su centro común de gravedad con frecuencia de ω vueltas cada año, y dado un planeta de masa m situado en la línea formada por las dos estrellas a distancia l del centro de gravedad que se mueve con celeridad v y ángulo θ con respecto a esa línea, ¿cuál será la trayectoria del planeta?*

Lo primero que hacemos es calcular la posición de las dos estrellas en el momento t. Ambas estrellas describen una circunferencia de radio $d/2$ luego su posición en el momento t (tomando el eje entre el centro de gravedad y la primera estrella en el momento $t = 0$ como el eje x) es

$$r_{E1}(t) = \frac{d}{2}\begin{pmatrix}\cos(\omega 2\pi t/31536000)\\ \sin(\omega 2\pi t/31536000)\end{pmatrix}, \quad r_{E2}(t) = \frac{d}{2}\begin{pmatrix}-\cos(\omega 2\pi t/31536000)\\ -\sin(\omega 2\pi t/31536000)\end{pmatrix},$$

donde hemos usado que 1 año tiene 31536000 segundos. Así pues, en el momento t (y suponiendo la acción de la fuerza inmediata, recordemos que estemos en el modelo Newtoniano), el planeta que se encuentra en $r(t)$ es sometido a una fuerza:

$$GM\left(\frac{r_{E1}(t)-r(t)}{\|r_{E1}(t)-r(t)\|^3}+\frac{r_{E2}(t)-r(t)}{\|r_{E2}(t)-r(t)\|^3}\right).$$

Tomemos ahora el vector

$$w(t)=\begin{pmatrix} r(t)\\ \dot r(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ \dot x(t)\\ \dot y(t)\end{pmatrix}$$

donde $r(t)=(x(t),y(t))$ es la posición del planeta. Las ecuaciones del movimiento son:

$$\dot w=\begin{pmatrix} \dot r\\ GM\left(\frac{r_{E1}-r}{\|r_{E1}-r\|^3}+\frac{r_{E2}-r}{\|r_{E2}-r\|^3}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_3\\ w_4\\ GM\left(\frac{r_{E1}-\binom{w_1}{w_2}}{\left\|r_{E1}-\binom{w_1}{w_2}\right\|^3}+\frac{r_{E2}-\binom{w_1}{w_2}}{\left\|r_{E2}-\binom{w_1}{w_2}\right\|^3}\right),\end{pmatrix}$$

lo que junto con las condiciones iniciales

$$w(0)=\begin{pmatrix} l\\ 0\\ v\cos\theta\\ v\sin\theta\end{pmatrix},$$

nos define un problema de Cauchy o problema de valores iniciales como los que hemos estudiado en eset capítulo. Para resolver este problema numéricamente debemos poner valores numéricos a los datos. La función que codifica el valor de $\dot w$ es fácil de implementar: denotando $c_1=GM$ y $c_2=2\pi 31536000\omega$,

```
function dotw=derivadasistemabinario(t,w,c1,c2,d)
% Devuelve el termino derecho del problema de valores iniciales
% para el sistema binario descrito en los apuntes
rE1=[d/2*cos(c2*t);d/2*sin(c2*t)];
rE2=-[d/2*cos(c2*t);d/2*sin(c2*t)];

vector1=rE1-[w(1);w(2)];
vector2=rE2-[w(1);w(2)];

vector1=vector1/norm(vector1)^3;
vector2=vector2/norm(vector2)^3;

dotw= [w(3);w(4);c1*(vector1+vector2)];
```

Entonces podemos empezar a hacer pruebas. Aquí hay algunas muestras:

6.3.1. Un planeta como Júpiter orbitando uno y dos soles como el nuestro

Consideremos un planeta como Júpiter que orbitase en torno a un sol como el nuestro, teniendo por lo tanto su órbita una característica similar a la real. Podemos considerar este problema como un caso especial del que nos ocupa en esta sección tomando $M=M_{sol}/2$ y $d=0$. El código sería:

```
% Introducimos los datos y ejecutamos Runge-Kutta-Fehlberg
% para resolver el problema del planeta que orbita en torno
% al sistema estelar binario

clear all % Borramos todas las variables
clc % Borramos la pantalla de comandos
close all % Cerramos todas las figuras

M=2.e30/2; % Masa de la estrella aprox. la del sol/2
m=2.e27; % Masa del planeta aprox. la de Jupiter
G=6674.e-14; % Constante gravitacional
d=0; % Distancia entre las estrellas = 0
omegasegs=0; % El periodo es irrelevante en este ejemplo
l=780.e9; % Distancia planeta a centro aprox. la de Jupiter
v=45.e3/3.6; % Velocidad del planeta la de Jupiter aprox.
theta=pi/2;% El planeta comienza moviendose en vertical

w0=[l;0;v*cos(theta);v*sin(theta)];


constante=G*M;

dotw=@(t,w) derivadasistemabinario(t,w,constante,omegasegs,d);

[t,w]=odeRKFehlberg(dotw,0,31536000*10,w0,1,3600,2);

% A continuacion dibujamos las orbitas:
figure(1)

hold on

plot(d/2*cos(omegasegs*t),d/2*sin(omegasegs*t),'k') % Primera estrella
plot(-d/2*cos(omegasegs*t),-d/2*sin(omegasegs*t),'r') % Segunda estrella

plot(w(1,:),w(2,:)) % Planeta

axis equal

hold off
```

Podemos ver la gráfica de la trayectoria del planeta en la Figura 6.2.
Pasemos ahora a observar la órbita del planeta en las mismas condiciones pero con dos soles como el nuestro distantes entre sí una unidad astronómica. El código sería:

```
% Introducimos los datos y ejecutamos Runge-Kutta-Fehlberg
% para resolver el problema del planeta que orbita en torno
% al sistema estelar binario

clear all % Borramos todas las variables
clc % Borramos la pantalla de comandos
close all % Cerramos todas las figuras

M=2.e30; % Masa de la estrella aprox. la del sol
m=2.e27; % Masa del planeta aprox. la de Jupiter
G=6674.e-14; % Constante gravitacional
d=1*150.e9; % Distancia entre las estrellas aprox 1UA
omegasegs=sqrt(2*G*M/d^3); % El periodo depende de G,M,d.
```

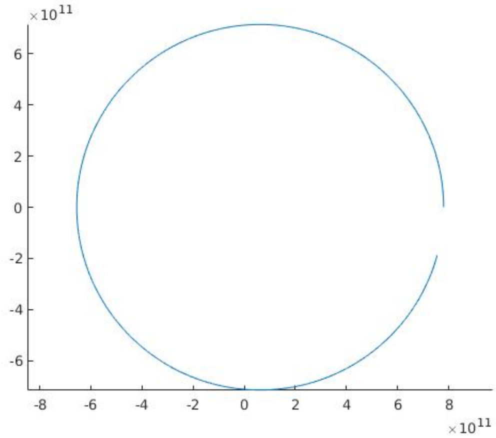


Figura 6.2: Simulación de Júpiter orbitando en torno al Sol. Notamos que la órbita sigue una predecible forma de elipse.

```
l=780.e9; % Distancia planeta a centro aprox. la de Jupiter
v=45.e3/3.6; % Velocidad del planeta la de Jupiter aprox.
theta=pi/2; % El planeta comienza moviendose en vertical

w0=[l;0;v*cos(theta);v*sin(theta)];


constante=G*M;

dotw=@(t,w) derivadasistemabinario(t,w,constante,omegasegs,d);

[t,w]=odeRKFehlberg(dotw,0,31536000*4,w0,1,3600,2);

% A continuacion dibujamos las orbitas:
figure(1)

hold on

plot(d/2*cos(omegasegs*t),d/2*sin(omegasegs*t),'k') % Primera estrella
plot(-d/2*cos(omegasegs*t),-d/2*sin(omegasegs*t),'r') % Segunda estrella

plot(w(1,:),w(2,:)) % Planeta

axis equal

hold off
```

Podemos observar gráficamente la órbita que describiría el planeta en la Figura 6.3. A la luz de las simulaciones realizadas podemos comprender mejor la sorpresa de Kevin Wagner.

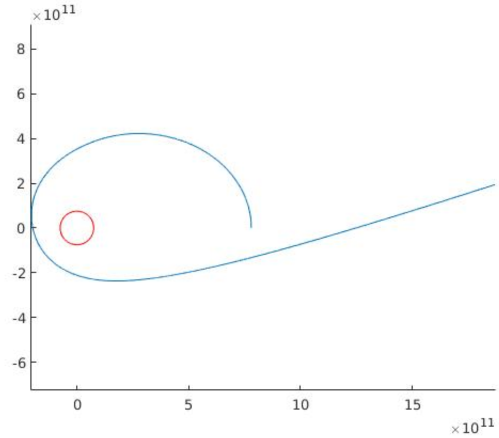


Figura 6.3: Simulación de Júpiter orbitando en torno a dos soles como el nuestro a distancia 1UA. ¡El planeta escapa, aunque hay más masa!

6.3.2. Un planeta como Júpiter orbitando dos soles como el nuestro muy separados

Como curiosidad, mostramos que en el caso de que haya dos soles como el nuestro pero separados por una distancia de 4UA se producen fenómenos extraños. No incluimos el código por ser fácilmente reproducible a partir de los anteriores. Simplemente mostramos el ejemplo en la Figura 6.4. El que escribe confía en que este pequeño ejemplo sirva para animar al alumno a probar muchas otras configuraciones en el programa anterior, cambiando la distancia entre las estrellas, la distancia entre el planeta y éstas, las velocidades iniciales, etc.

6.4. Puntos de Lagrange

Los puntos de Lagrange son puntos de equilibrio del sistema dinámico formado por dos cuerpos masivos (Sol y Tierra, pongamos) y un tercer cuerpo de masa pequeña. Son 5 puntos en los que, si el cuerpo pequeño es situado y se le da la velocidad adecuada, las ecuaciones del movimiento Newtonianas dejan el sistema en equilibrio, esto es, no se produce movimiento relativo entre los tres puntos. Los puntos $L1, L2, L3$ son inestables (una ligera modificación en la posición o velocidad hace que el equilibrio se destruya irremediablemente) con lo que su relevancia práctica es nula. Sin embargo, los puntos $L4, L5$ son estables, existiendo por ejemplo colecciones de asteroides importantes (llamadas “troyanos”) en los puntos $L4, L5$ del sistema Sol–Júpiter, y estando en la mente de los científicos para futuras misiones espaciales (en los puntos de sistema Tierra–Luna y del Sol–Tierra). La descripción geométrica de los puntos de Lagrange, sin fórmulas, está en la Figura 6.5 El siguiente par de códigos permite comprobar las propiedades de los puntos de Lagrange del sistema Tierra–Sol.
Primero la función para el sistema obtenido con tres cuerpos (Sol, Tierra y un tercero pequeño)

```
function dotw=derivadasistemasoltierra(t,w,G,Msol,Mtierra)
% Devuelve el termino derecho del problema de valores iniciales
% para el sistema Sol-Tierra y un tercer objeto.
% Contamos con un vector w que tiene:
% r_tierra, v_tierra, r_objeto, v_objeto, r_sol, v_sol
```

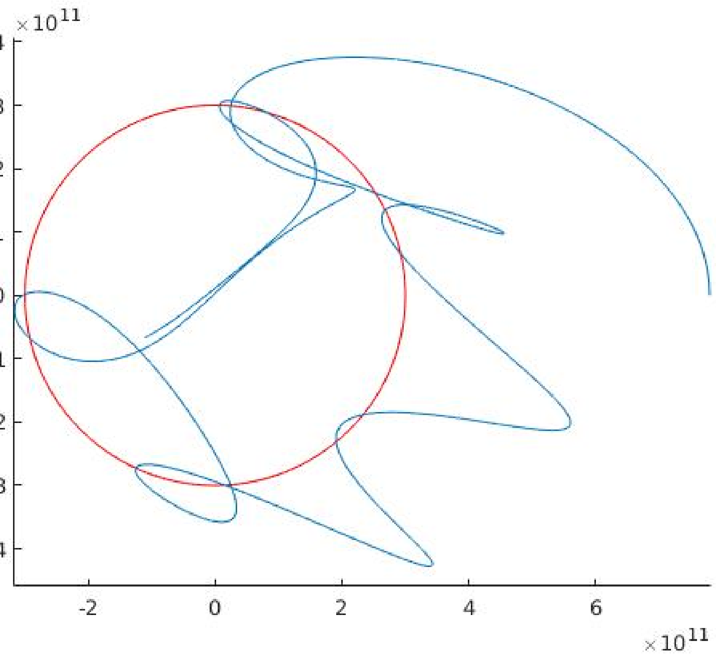


Figura 6.4: Simulación de Júpiter orbitando en torno a dos soles como el nuestro a distancia 4UA. Se observa un comportamiento errático que hace dudar de la precisión de los métodos utilizados para resolver el problema, que cae dentro de los considerados como "caóticos".

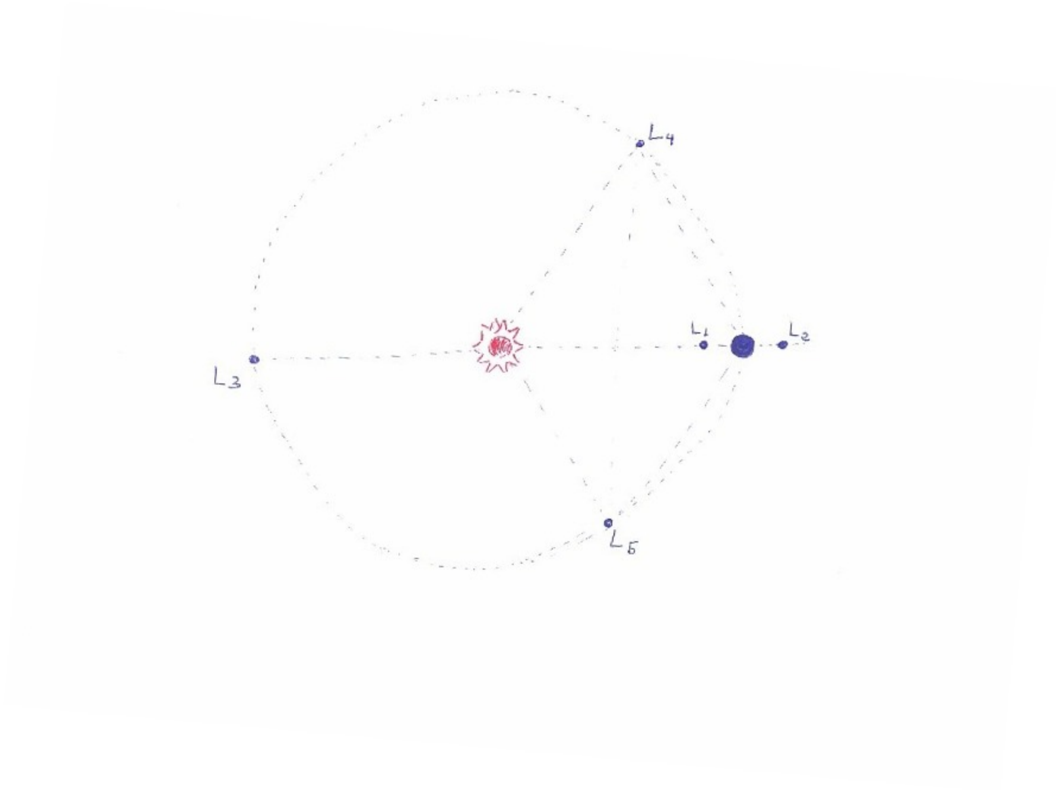


Figura 6.5: Puntos de Lagrange de un sistema formado por una estrella y un planeta. $L1, L2, L3$ son inestables y sus posiciones exáctas pueden ser obtenidas mediante un cálculo elemental. En cambio, $L4$ y $L5$ son puntos estables, situados de manera que cada uno de ellos forma un triángulo equilátero con los dos cuerpos masivos. Las posiciones en la realidad de los puntos son parecidas a las teóricas, con algunas perturbaciones debidas a efectos relativistas, al viento solar y a la acción de otros planetas.

```
vector1=-[w(1);w(2)];
vector2=-[w(5);w(6)];
vector3=[w(1);w(2)]-[w(5);w(6)];

vector1=vector1/norm(vector1)^3;
vector2=vector2/norm(vector2)^3;
vector3=vector3/norm(vector3)^3;

c1=G*Msol;
c2=G*Mtierra;

dotw= [w(3);w(4);c1*vector1;w(7);w(8);c1*vector2+c2*vector3;w(9);w(10);-c2*vector1];
```

A continuación comprobamos lo que sucede en el punto de Lagrange 4 (estable) con el código

```
% Introducimos los datos y ejecutamos Runge-Kutta-Fehlberg
% para resolver el problema de los puntos de Lagrange

clear all % Borramos todas las variables
clc % Borramos la pantalla de comandos
close all % Cerramos todas las figuras

M=2*1.e30; % Masa del sol
m=6.e24; % Masa de la Tierra
G=6674.e-14; % Constante gravitacional
l=150.e9; % Distancia Sol-Tierra

v=l*sqrt(G*M/l^3); % Velocidad de la Tierra si su orbita fuese circular
theta=pi/2; % La Tierra comienza moviendose en vertical

% Primer punto de Lagrange: vemos el caracter inestable.
%w0=[l;0;v*cos(theta);v*sin(theta);l/(1+sqrt(m/M));0;v*cos(theta)/(1+sqrt(m/M));v*sin(theta)/(1+sqrt(m/M));0;(

% Cuarto punto de Lagrange: vemos el caracter estable.
w0=[l;0;v*cos(theta);v*sin(theta);l*cos(pi/3);l*sin(pi/3);v*cos(theta+pi/3);v*sin(theta+pi/3)/(1+sqrt(m/M));0;

constante=G*M;
dotw=@(t,w) derivadasistemasoltierra(t,w,G,M,m);
[t,w]=odeRKFehlberg(dotw,0,31536000*600,w0,10,3600,200);

% A continuacion dibujamos las orbitas:
figure(1)
hold on
plot(w(1,:),w(2,:),'k') % Planeta Tierra
plot(w(5,:),w(6,:),'b') % Objeto
plot(w(9),w(10),'r') % Sol
axis equal
hold off
figure(2)
% Dibujamos ahora la distancia a la Tierra del objeto.
distancias=(w(1:2,:)-w(5:6,:));
plot(linspace(0,6,length(distancias)),sqrt(distancias(1,:).^2+distancias(2,:).^2))
```

Si tomamos el primer punto de Lagrange (inestable) obtenemos la trayectoria de la Figura 6.7.

Ejemplo 6.4.1 Una estrella, a la que llamaremos Leda, tiene dos planetas gemelos, a los que llamaremos Cástor y Pólux. Las características de estos cuerpos son:

- La masa de Leda es un millón de veces la masa de la Tierra. La masa de cada uno de los planetas es de 20 veces la masa de la Tierra.
- En un momento dado la distancia de ambos planetas a Leda es de 100 millones de kilómetros, y los tres cuerpos forma un triángulo en el que el ángulo que define Leda es de 90 grados.
- Cástor y Pólux orbitan en ese momento en sentido antihorario, y ambos con una celeridad de 63 kilómetros por segundo.

Queremos conocer el mínimo de la distancia entre Cástor y Pólux a lo largo de los próximos 20 años. Cómo lo harías? Una respuesta completa a este ejercicio incluye:

I) Elaborar una descripción matemática del problema.

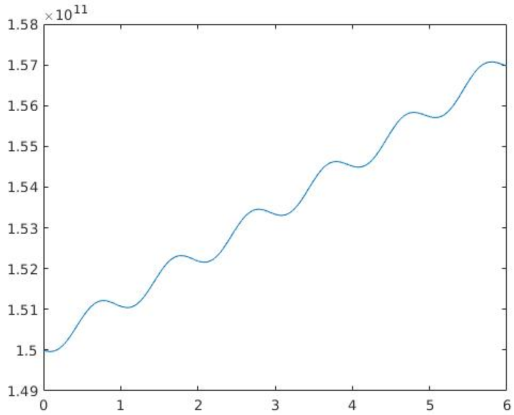


Figura 6.6: Distancia de un objeto situado en L4 a la Tierra a lo largo de 6 años. La distancia entre ambos cuerpos es casi constante (varía en torno al 5 %. En realidad el objeto iría alejándose y acercándose a lo largo de períodos larguísimos)

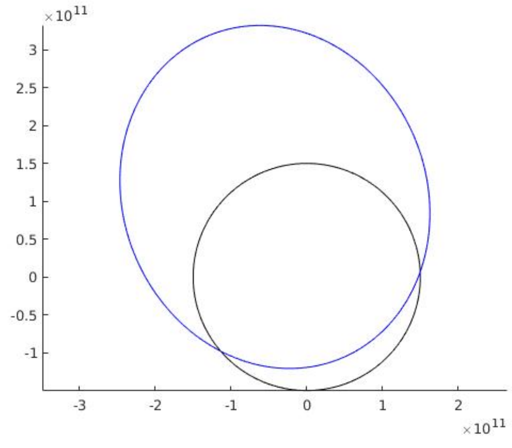


Figura 6.7: Un cuerpo comienza en el primer punto de Lagrange pero es rápidamente expelido a una órbita asociada a la de la Tierra. El objeto celeste conocido por 3753 Cruithne (un asteroide de unos 5 kilómetros de diámetro) tiene una órbita similar a la mostrada. Según las tablas, la distancia mínima de este asteroide a la Tierra es de unos 10 millones de kilómetros. Otros objetos como el asteroide Apophis pasan hasta 100 veces más cerca y se consideran muy peligrosos a medio o largo plazo.

ii) Describir cómo usar los métodos numéricos necesarios para resolver el problema.

iii) Escribir en código Matlab una manera de resolver el problema

Nota: en unidades medidas en miles de kilómetros, horas y siendo la unidad de masa la masa de la Tierra, la constante gravitacional vale aproximadamente 5168,6. Despreciamos los efectos relativistas para la solución de este problema. **Respuesta:**
Descripción matemática del problema: *Las fuerzas presentes son únicamente las de la ley de gravitación universal de Newton. Hemos visto numerosos problemas similares en los que como en este caso había que escribir los problemas en forma de problema de valores iniciales. En este caso, considerando por ejemplo que la estrella está fija, podemos considerar un vector W de 8 componentes: las posiciones y velocidades de Cástor y Pólux, ordenadas de la forma natural. Con ello, el problema de valores iniciales es:*

$$W' = F(t, W), W(0) = \begin{pmatrix} 10^5 \\ 0 \\ 0 \\ 228 \\ 0 \\ 10^5 \\ 228 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$F(t, W) = \begin{pmatrix} W_3 \\ W_4 \\ \frac{-GM_{Leda}}{\left\|\binom{W_1}{W_2}\right\|^3}\binom{W_1}{W_2} + \frac{-GM_{Pollux}}{\left\|\binom{W_5}{W_6}-\binom{W_1}{W_2}\right\|^3}\left(\binom{W_5}{W_6} - \binom{W_1}{W_2}\right) \\ W_7 \\ W_8 \\ \frac{-GM_{Leda}}{\left\|\binom{W_5}{W_6}\right\|^3}\binom{W_5}{W_6} + \frac{-GM_{Pollux}}{\left\|\binom{W_1}{W_2}-\binom{W_5}{W_6}\right\|^3}\left(\binom{W_1}{W_2} - \binom{W_5}{W_6}\right) \end{pmatrix}$$

Descripción del uso de los métodos numéricos para el problema:
Dado que tenemos que calcular la distancia entre Cástor y Póllux durante 20 años, resolveremos el Problema de Cauchy propuesto durante este tiempo. Esto nos dará una matriz que contendrá en cada fila las 8 coordenadas de W correspondiente al tiempo correspondiente a dicha fila. De dicha matrix podemos extraer la información de la distancia entre ambos cuerpos considerando para cada fila la norma del vector resta de las coordenadas $1, 2$ y $5, 6$. Así, tenemos una forma de escribir la distancia entre ambos planetas en función del tiempo. Dado que simplemente nos piden el máximo de dichas distancias, tomamos por ejemplo la solución descrita cada hora, lo que podemos esperar de bastante buen resultado por cambiar la distancia en una hora relativamente poco. Entonces, simplemente elegimos el máximo de las distancias calculadas.
Así pues, el código Matlab que usaríamos (y que llama a muchas funciones usadas durante el curso, con lo que se adapta su forma a dichas funciones en lugar de directamente a la solución mencionada en el párrafo anterior) podría ser el siguiente:

```
%Simulamos el sistema estelar descrito en el problema
% Medimos las unidades en miles de kilometros, horas y Masatierras
clc
%clear all
```

```
G=5186.6;
MLeda=1e6; %
MCastor=20;
MPolux=20;
distancia=100000;
vinicial=228*3.6; % En miles de kilometros por hora.
tmax=24*365*20;
tiempo=[0 tmax];
Masas=[MLeda,MCastor,MPolux];
N=length(Masas);
angulo_inicial=pi/2;
% Escribimos el termino de la derecha del P. Cauchy:
F=@(t,W) reshape(gravitacion(reshape(W,6,N),Masas,G,1),6*N,1);
R0=distancia*[[0;0;0] [1;0;0] [cos(angulo_inicial);sin(angulo_inicial);0]];
R0dot=vinicial*[[0;0;0] [0;1;0] [-sin(angulo_inicial);cos(angulo_inicial);0]];
W0=[R0;R0dot];
[T,Wsolucion]=ode23(F,0:1:tmax,W0(:));
% Estructura de Wsolucion':
% [RSol;VSol;RTierra;VTierra]
W=Wsolucion';
RLeda=W(1:3,:);
VLeda=W(4:6,:);
RCastor=W(7:9,:);
VCastor=W(10:12,:);
RPolux=W(13:15,:);
VPolux=W(16:18,:);
% Si queremos dibujamos el movimiento los planetas de forma animada
%Pos=[RCastor(1:2,:);RLeda(1:2,:);RPolux(1:2,:)];
%dibuja_movimiento(T,Pos,20,1)
% O para dibujar las orbitas:
plot(RLeda(1,:),RLeda(2,:),RCastor(1,:),RCastor(2,:),RPolux(1,:),RPolux(2,:))
% Calculamos ahora la distancia:
distanciaCP=sqrt((RCastor(1,:)-RPolux(1,:)).^2+(RCastor(2,:)-RPolux(2,:)).^2);
%plot(distanciaCP)
% El maximo:
distancia_maxima=max(distanciaCP) % Sale 2.1127e+05
```

Como se puede ver, el valor aproximado de que se obtiene es de 211270 *miles de kilómetros, esto es de unos* 211 *millones de kilómetros. Se puede comparar este dato con la distancia inicial entre ambos cuerpos, que era de aproximadamente* 141 *millones de kilómetros.*

6.5. Altura del impacto de una bala en un muro

Se han hecho las siguientes mediciones con 2 balas idéndicas y en idénticas condiciones:

- Desde el punto de disparo hasta un muro situado a 100 metros la bala tarda 0,32 segundos en llegar.
- Desde el punto de disparo hasta un muro situado a 250 metros la bala tarda 0,93 segundos en llegar.

Suponiendo que ambos disparos se hicieron con el cañón de la pistola en posición horizontal y desde una altura de $10m$, y que la única fuerza a la que está sometida la bala, aparte de la gravedad, es una fuerza de fricción contra el aire proporcional al cuadrado de la celeridad de la bala en cada momento, se pide responder a la siguiente pregunta: a qué altura impactó la segunda bala en el muro? Una respuesta completa a este ejercicio incluye:

I) Elaborar una descripción matemática del problema.

II) Describir cómo usar los métodos numéricos necesarios para resolver el problema.

III) Escribir en código Matlab una manera de resolver el problema

Respuesta:
Descripción matemática del problema: La bala en cuestión se mueve en un plano dado que solo actúan la gravedad y el rozamiento. Ponemos el lugar del disparo en el punto $(0, 10)$ del plano, y los muros verticales con base en los puntos $(100, 0)$ y $(250, 0)$. Llamamos $r(t) = (x(t), y(t))$ a la posición de la bala en el momento t. Entonces, la ecuación del movimiento es:

$$\ddot{r}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \alpha \|\dot{r}(t)\| \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \alpha \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix},$$

donde α es una constante de rozamiento desconocida. Desconocemos también $\dot{r}(0)$ aunque conocemos $r(0) = (0, 10)$. Así pues, el movimiento de la bala queda descrito por esta ecuación, siempre que demos valores a $\dot{r}(0)$ y α. Lo que sí sabemos es que $\dot{r}(0)$ es un vector horizontal, esto es, es un vector de la forma $\dot{r}(0) = (\beta, 0)$. Así pues, lo que buscamos es los valores de α y β que hacen que la trayectoria de la bala tarde 0,32 segundos en alcanzar el muro a 100 metros y 0,93 segundos en alcanzar el muro a 250 metros.
Así pues, consideramos la función:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \binom{\alpha}{\beta} & \mapsto & \binom{\text{posición } x \text{ de la bala tras } 0{,}32s \text{ con parámetros } \alpha, \beta}{\text{posición } x \text{ de la bala tras } 0{,}93s \text{ con parámetros } \alpha, \beta}, \end{array}$$

donde la posición de la bala tras t seguntos con parámetros α, β viene determinada por la solución del siguiente problema de valores iniciales de segundo orden:

$$\begin{cases} \binom{\ddot{x}(t)}{\ddot{y}(t)} = \binom{0}{-g} - \alpha \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \binom{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} \\ x(0) = 0, \ y(0) = 10, \ \dot{x}(0) = \beta, \ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

Consideremos α, β que cumplen $\varphi(\alpha, \beta) = \binom{100}{250}$. Cualesquiera valores de esos parámetros harían que la bala cumpla con las observaciones, de modo que si hay más de una colección de parámetros posibles el problema no tiene suficientes datos, pero si hay un único valor posible para esos parámetros entonces la bala sigue la trayectoria definida exáctamente por ellos. Una vez calculados, no tenemos más que calcular el valor de $y(t)$ cuando $t = 0{,}93$ para ver la altura pedida.
Descripción del uso de los métodos numéricos para el problema y códigos Matlab: Primero utilizaremos un método de resolución de sistemas de EDOs para calcular el valor, para α, β fijados cualesquiera, de $\varphi(\alpha, \beta)$. Para ello tenemos que escribir el problema de valores iniciales como uno de primer orden.

$$W(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Entonces, para α, β dados tenemos que W cumple:

$$\begin{cases} \dot{W} = \begin{pmatrix} W_3 \\ W_4 \\ \binom{0}{-g} - \alpha \left\| \binom{W_3}{W_4} \right\| \binom{W_3}{W_4} \end{pmatrix} \\ W(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

El método de la familia Runge Kutta de nuestra elección nos permite calcular entonces $W(t)$ para cualquier t. La función que define el problema de valores iniciales es:

```
function dotW=terminoderecha(t,W,alpha)
g=9.81; % Valor de la aceleracion de la gravedad
W34=[W(3);W(4)];
dotW34=[0;-g]-alpha*norm(W34)*W34; % Formula del problema de Cauchy
dotW=[W34;dotW34];
```

Ahora podemos calcular φ de un modo muy sencillo por ejemplo usando `ode45`:

```
function [distancias,alturas]=varphi(alphabeta)
% alphabeta es un vector de dos dimensiones que contiene los parametros:
alpha=alphabeta(1)
beta=alphabeta(2)
[tiempos,W] = ode45(@(t,W) ...
    terminoderecha(t,W,alpha),[0 0.32 0.93],[0;10;beta;0]);
% Con esa linea, W contiene tres filas con el valor de W en los momentos
% t=0, t=0.32, t=0.93. Lo que nos interesa por lo tanto es:
distancias=[W(2,1);W(3,1)];
alturas=[W(2,2);W(3,2)];
```

Ahora necesitamos entonces encontrar α, β tales que $\varphi(\alpha, \beta) = (100, 250)$. Podemos hacer esto como sigue usando `fsolve`. Adicionalmente, con el alpha y beta calculados podemos ya hallar la altura del impacto en el segundo muro. Nótese que hemos encontrado el valor de $\alpha = 0{,}0019$ (la constante de rozamiento), y de $\beta = 344{,}1982 m/s$ (la velocidad inicial de la bala).

```
clc
clear all
close all
% Ahora calculamos el valor de alpha y beta:
alphabeta=fsolve(@(v) varphi(v)-[100;250],[.001;300]);
% En efecto comprobamos que las distancias recorridas son las que deben
% ser, y ademas calculamos la altura de la bala tras 250 metros:
[distancias,alturas]=varphi(alphabeta);
% La altura a los 250 metros es entonces:
alturas(2) % 6.3531 metros
% A continuacion calculamos la trayectoria para esos valores y
% comprobamos que la solucion tiene sentido:
alpha=alphabeta(1);
```

```
beta=alphabeta(2);
[tiempos,W] = ode45(@(t,W) ...
    terminoderecha(t,W,alpha),[0 1],[0;10;beta;0]);
plot(W(:,1),W(:,2))
hold on
plot(distancias,alturas,'x')
title('Trayectoria de la bala, con la posicion de los muros marcada.')
axis equal
```

La trayectoria de la bala para las constantes calculadas puede observarse en la Figura 6.8.

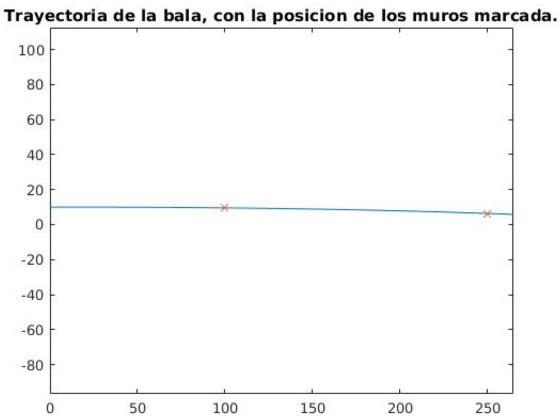


Figura 6.8: Altura de la bala, con la posición al pasar a $100m$ y a $250m$ del punto del lanzamiento marcada con una “x”.

6.6. Exercises: More proposed problems

Exercise 6.1

Using the data from Problem 2.14, can you give an approximate value to the moment t such that the speed of the person in free fall is equal to $35km/h$? How much distance has he traveled at this point?

Exercise 6.2

Using the data from Problem 2.14, try to get linear and quadratic terms (in the speed) that produce the speed measured by the jumper.

Exercise 6.3

In the setting of Problem 5.8, assume that a cannon ball with initial speed $1000m/s$ and angle $\pi/4$ hits the floor at a distance of $50km$ from the shooting position, and with angle $\pi/8$ it hits the floor $30km$ from the shooting position. Can you deduce the value of the air resistance constants? Which will be the distance to the shooting point if the ball is shot with an angle equal to $\pi/5$?