

Capítulo 7

Algunos temas más allá del alcance de este curso

En este capítulo exponemos algunos temas que complementan los conocimientos impartidos en el curso. Aclaramos que los resultados aquí expuestos no entran, salvo que sea expresamente dicho durante el curso, en la parte evaluable de la asignatura.

7.1. Análisis del error para los métodos iterativos

Comenzamos con una definición que nos permitirá medir la rapidez con la que converge un método iterativo.

Definición 7.1.1 Sea p_n , $n \geq 1$, una sucesión tal que $p_n \rightarrow p$ y tal que $p_n \neq p$ para todo n . Si existen constantes positivas λ, α tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda,$$

decimos que la sucesión converge a p con orden α y constante de error asintótica λ .

Se dice que un método iterativo es de orden α si la sucesión de puntos que genera converge (con cierta generalidad) con orden α . En general, una sucesión converge más rápidamente cuanto mayor sea su orden de convergencia y menor el valor de su constante de error asintótica. Este segundo factor es suele ser tener menos impacto que el orden, con lo que nos centraremos en comprender el orden de convergencia. Usualmente se utiliza una terminología especial en los casos $\alpha = 1, 2, 3$:

- Decimos que la sucesión converge linealmente (o que es linealmente convergente) si converge con orden $\alpha = 1$.
- Decimos que la sucesión converge cuadráticamente (o que es cuadráticamente convergente) si converge con orden $\alpha = 2$.
- Decimos que la sucesión converge cúbicamente (o que es cúbicamente convergente) si converge con orden $\alpha = 3$.

El siguiente resultado nos dice que en general los métodos de punto fijo alcanzan únicamente convergencia lineal (salvo que la derivada en el punto límite sea 0).

Teorema 7.1.2 Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para $x \in [a, b]$. Supongamos además que $g \in C^1(a, b)$ y que existe $k < 1$ tal que $|g'| \leq k$ en (a, b) . Entonces, para cualquier número $p_0 \in [a, b]$ la sucesión $p_{n+1} = g(p_n)$ converge al único punto fijo p de g en $[a, b]$ con orden de convergencia exáctamente igual a 1.

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos visto en el Corolario 4.1.5 que la sucesión converge a p con orden de convergencia al menos 1. Flata ver que el orden no puede ser mayor. En efecto, por el Teorema 1.1.9 sabemos que

$$p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p) = g'(\zeta_n)(p_n - p),$$

donde ζ_n está entre p y p_n , luego converge a p . Sacando límites y usando la continuidad de g' tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(\zeta_n) = g'(p) \neq 0,$$

lo que termina la demostración. □

El siguiente teorema nos da condiciones que garantizan la convergencia cuadrática.

Teorema 7.1.3 Sea $g \in C^2[a, b]$. Sea p un punto fijo de g tal que $g'(p) = 0$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que en el intervalo $(p - \delta, p + \delta)$, p es el un único punto fijo de g y para todo p_0 se tiene que la sucesión dada por $p_{n+1} = g(p_n)$ converge al menos cuadráticamente a p . Es más, para n suficientemente grande se tiene $|p_{n+1} - p| < M|p_n - p|^2$, donde $2M$ es una cota para el valor de $|g''|$ en $(p - \delta, p + \delta)$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $g'(p) = 0$ y g' es continua, tenemos $|g'| < 1/2$ en algún intervalo $[p - \delta, p + \delta]$ que contiene a p , y razonando como en la demostración del Teorema 4.1.3 vemos que $g([p - \delta, p + \delta]) \subseteq [p - \delta, p + \delta]$, luego por el Corolario 4.1.5 sabemos que p es el único punto fijo en el intervalo y que la sucesión p_n converge a p . Por el Teorema 1.3.1 tenemos para x en ese intervalo:

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x - p) + \frac{g''(\zeta_x)}{2}(x - p)^2,$$

para algún ζ_x entre p y x . Como $g(p) = p$ y $g'(p) = 0$ concluimos que

$$g(x) = p + \frac{g''(\zeta_x)}{2}(x - p)^2, \text{ y por lo tanto para } n \geq 0 \text{ } p_{n+1} = g(p_n) = p + \frac{g''(\zeta_n)}{2}(p_n - p)^2,$$

donde $\zeta_n \rightarrow p$. De este modo hemos demostrado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|g''(\zeta_n)|}{2} = \frac{|g''(p)|}{2}.$$

El resultado se sigue. □

Nótese que mirando la demostración del Teorema 7.1.3 vemos que la sucesión converge cuadráticamente si $g''(p) \neq 0$, y con mayor orden en otro caso.

A la hora de generar un método de punto fijo para resolver $f(x) = 0$, una opción razonable es tomar $g(x) = x - \phi(x)f(x)$ para alguna función $\phi(x)$. Hemos visto que el método de punto fijo convergerá cuadráticamente si $f(p) = 0$ implica $g'(p) = 0$. Vemos claramente que esto equivale a $g'(p) = 1 - f'(p)\phi'(p)$, lo que nos anima a tomar $\phi(x) = 1/f'(x)$, de donde se deriva el método de Newton. Otras elecciones de $\phi(x)$ darán lugar a otros métodos. Obviamente esta elección da problemas si $f'(p) = 0$, esto es, en el caso de que f tenga una raíz múltiple en p . Esto es, en el caso de que $\lim_{x \rightarrow p} f(x)/(x - p) = 0$. En este caso la convergencia puede dejar de ser cuadrática, para volverse simplemente lineal. Basta analizar el caso de $f(x) = x^2$ para verlo.

7.2. El método de Broyden

Al igual que en el caso del método de Newton para una variable, nos encontramos con un escollo que en ocasiones puede ser difícil de superar: necesitamos conocer la matriz Jacobiana de f , lo que puede hacerse o bien si conocemos las fórmulas exactas derivándolas simbólicamente, o bien con los métodos explicados en el capítulo 3. Para evitar esta complicación en el caso de una variable vimos cómo sustituyendo $f'(x)$ por su aproximación a partir de dos iteraciones sucesivas se puede obtener un método que, si bien no tiene las garantías de convergencia del método de Newton original, se ejecuta más rápido en el ordenador. Nótese que en el método de la secante, escribiéndolo de una forma aparentemente poco natural, cambiamos $f'(x_n)$ por la aproximación $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n).$$

Del mismo modo actuaremos ahora, reemplazando la matriz Jacobiana $Jf(v_n)$ por una matriz tal que

$$A(v_{n+1} - v_n) = f(v_{n+1}) - f(v_n). \quad (7.1)$$

Esa es la idea del método de Broyden. Partimos de un v_0 conocido, calculamos (o aproximamos) $A_0 Jf(v_0)$ y con ello $v_a = v_0 - A_0^{-1} f(v_0)$ como en el método de Newton, pero a continuación simplemente tomamos A_1 como la matriz que actúa igual que A_0 en el complemento ortogonal de $v_1 - v_0$ y además cumple (7.1). Estas dos condiciones implican:

$$A_1 = A_0 + \frac{(f(v_1) - f(v_0) - A_0(v_1 - v_0))(v_1 - v_0)}{\|v_1 - v_0\|^2}.$$

Entonces, se define $v_2 = v_1 - A_1^{-1} f(v_1)$ y se itera de nuevo. Hay una última mejora, que consiste en que en lugar de hacer $A_1^{-1} f(v_1)$, se actualiza A_1 a partir de A_0 utilizando la fórmula de Sherman–Morrison: para una matriz A invertible y para vectores v, w tales que $w^T A^{-1} v \neq -1$ se tiene:

$$(A + vw^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}vw^T A^{-1}}{1 + w^T A^{-1}v}.$$

Con ello, podemos ir calculando directamente A_{n+1}^{-1} a partir de A_n^{-1} , sin necesidad de invertir matriz alguna más allá de $Jf(v_0)$. Una implementación posible para el método de Broyden sería como sigue.

```
function [x1,fx1]=broyden(f,c,epsilon,M,h)
% Calcula una solucion aproximada de f(x)=0 con el metodo de Broyden
% se comienza la iteracion en x0=c y se pone un limite de iteraciones
% Tambien se pide al usuario la precision epsilon. La primera matriz
% Jacobiana se obtiene aproximando las derivadas parciales con la
% formula de la derivada central, con precision h.
x0=c;
Ainv=inv(matriz_jacobiana(f,c,h));
w=f(x0);
s=-Ainv*w;
x1=x0+s;
mierror=1;
contador=1;
while (mierror>epsilon) && (contador<=M)
    z=w;
    w=f(x1);
    y=w-z;
    r=-Ainv*y;
    p=-s'*r;
```

```

uT=s'*Ainv;
Ainv=Ainv+(s+r)*uT/p;
s=-Ainv*w;
x1=x1+s;
mierror=norm(s);
contador=contador+1;
end
fx1=f(x1);
if contador==(M+1)
    error('Se ha alcanzado el numero maximo de iteraciones');
end

```

7.3. Métodos de homotopía o de continuación

El método de homotopía o continuación para resolver $f(v) = 0$ con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ consiste en tomar una familia parametrizada de sistemas $G(\lambda, v) = 0$ donde $\lambda \in [0, 1]$ es un parámetro que variamos a voluntad y se tiene que $G(1, v) \equiv f(v)$, y adicionalmente $G(0, v)$ es “sencillo” o fácil de resolver. Entonces, se trata de deformar la solución conocida de $G(0, v)$ hasta convertirla en una solución conocida de $G(1, v) \equiv f(v)$.

Este método es el que se utiliza cuando las funciones a resolver son muy complejas, y es frecuentemente el método de elección en las aplicaciones prácticas. La técnica para “deformar” la solución de $G(0, v)$ a otra de $G(1, v)$ varía de unos a otros autores pero en esencia se trata de observar que si v_λ es una solución de $G(\lambda, v) = 0$ entonces tenemos para $\lambda \in [0, 1]$ que $0 = G(\lambda, v_\lambda)$ y derivando (¡cuidadosamente!) esa igualdad tenemos:

$$0 = \frac{\partial G(\lambda, v_\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial G(\lambda, v_\lambda)}{\partial v} \frac{d}{d\lambda} v_\lambda,$$

y despejando obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\lambda} v_\lambda = - \left(\frac{\partial G(\lambda, v_\lambda)}{\partial v} \right)^{-1} \frac{\partial G(\lambda, v_\lambda)}{\partial \lambda} \\ v_0 \quad \text{conocido} \end{cases}$$

esto es un problema de Cauchy o de valores iniciales.

Por ejemplo, tomando un $v_0 \in \mathbb{R}^n$ y considerando

$$G(\lambda, v) = f(v) + (\lambda - 1)f(v_0)$$

se cumplen las hipótesis deseadas y el problema de Cauchy tiene una forma muy sencilla:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\lambda} v_\lambda = -Jf(v_\lambda)^{-1} f(v_0) \\ v_0 \quad \text{el elegido} \end{cases}$$

En el capítulo 5 se dan varios métodos para resolver este tipo de problemas de Cauchy. En la práctica, se combinan varios pasos de dichos métodos con algunas iteraciones del método de Newton para mejorar la precisión.

7.4. Métodos de Taylor de orden superior

Por sencillez de la exposición, tratamos este punto únicamente en el supuesto de que el problema (5.1) cumple $f(t, y) \in \mathbb{R}$, esto es, en el supuesto de que la solución es simplemente una ecuación de una variable real. El

método de Euler utiliza la expansión de Taylor hasta primer orden. Si suponemos que f es de tipo C^m entonces por el Teorema 5.1.4 la solución está definida al menos localmente, es única y es de tipo C^{m+1} y por el Teorema 1.3.1 podemos escribir

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \cdots + \frac{h^m}{m!} \frac{d^m}{dt^m} y(t) + O(h^{m+1}),$$

Despreciando el último término y usando (5.1) tenemos entonces

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)) + \frac{h^2}{2} \frac{d}{dt} f(t, y) + \cdots + \frac{h^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} f(t, y).$$

con lo que, de nuevo, si conocemos y en un momento t , podemos conocer aproximadamente y en el momento $t+h$, siempre que seamos capaces de calcular las derivadas que aparecen en la fórmula. Ahora bien,

$$\frac{d}{dt} f(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))y'(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t)),$$

y fórmulas más complejas pueden obtenerse para las derivadas de orden superior derivando la última. De este modo se puede reescribir la fórmula para $y(t+h)$ en función de t y de $y(t)$, y luego proceder recursivamente como en el método de Euler.

En algunos casos las fórmulas para las derivadas sucesivas se pueden calcular de manera sencilla a partir de $f(t, y)$. En otros casos, los cálculos son más complicados de lo que nos gustaría. Por ese motivo esta clase de métodos de orden superior no se utilizan en general, solo en algunos casos particulares.

En el caso de que $f(t, y)$ dependa solo de y , esto es, $f = f(y)$, obtenemos una fórmula más sencilla. Por ejemplo, tomando $m = 3$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(y(t)) &= f'(y(t))y'(t) = f'(y(t))f(y(t)), \\ \frac{d^2}{dt^2} f(y) &= f''(y(t))y'(t)f(y(t)) + f'(y(t))^2 y'(t) = f''(y(t))f(y(t))^2 + f'(y(t))^2 f(y(t)), \end{aligned}$$

lo que da la recursión:

$$w_0 = y(a), \quad w_{k+1} = w_k + hf(w_k) + \frac{h^2}{2} f'(w_k)f(w_k) + \frac{h^3}{6} (f''(w_k)f(w_k)^2 + f'(w_k)^2 f(w_k)),$$

que en el caso de que tengamos fórmulas sencillas para f' y f'' da un método rápido y eficaz para calcular aproximadamente la solución del problema de Cauchy.

Una implementación en Matlab del método de Taylor para este caso simplificado sería:

```
function [t,w]=odetaylor(f,fp,fpp,a,b,ya,N)
% Resuelve \dot{y}=f(y), y(a)=ya, en el intervalo [a,b] con el
% metodo de Taylor de orden 3 con paso h=(b-a)/N.
% En la variable t se devuelven los tiempos y en la y los valores.
% De esta forma, w(k) sera (aprox.) y(t=a+kh).
% Se supone que f va de R a R.
% Se piden fp y fpp la primera y segunda derivadas de f.

h=(b-a)/N;
t=linspace(a,b,N+1);
w=zeros(size(t)); % Para que tenga la dimension correcta desde el principio
```

```
w(1)=ya;  
for k=2:N+1  
    ya=ya+h*f(ya)+h^2/2*fp(ya)*f(ya)+h^3/6*(fpp(ya)*f(ya)^2+fp(ya)^2*f(ya)); % Ahora ya= y(a+kh).  
    w(k)=ya;  
    a=a+h;  
end
```