Laboratorio de Física I
Guía del experimento
Coeficiente adiabático γ del aire.
Método de Rüchardt

J. Güémez, R Valiente
Departamento de Física Aplicada.
Universidad de Cantabria.

Septiembre 20, 2016

Resumen

Se indica cómo se puede determinar el coeficiente $\gamma = c_P/c_V$ para un gas mediante el método de Rüchardt, midiendo el período de oscilación de un émbolo, utilizando para ello un sensor de presiones conectado a un sistema computerizado de adquisición y tratamiento de datos.

Introducción

El método de Rüchardt para medir el coeficiente adiabático γ de un gas se basa en perturbar el estado de equilibrio de dicho gas mediante una cierta sobrepresión en un émbolo y estudiar la frecuencia y la amortiguación de las oscilaciones que se producen como respuesta a dicha perturbación[1].

Se dispone de un gas contenido en un cilindro cerrado por un émbolo y sometido a una presión P,

$$P = P_0 + \frac{mg}{A}\,, \tag{1}$$

donde P_0 es la presión atmosférica, m es la masa del émbolo y A la sección del mismo. Se lleva a cabo una variación del volumen de un gas encerrado en un dispositivo cilindro-émbolo, ejerciendo una cierta fuerza sobre el émbolo, en $\mathrm{d}V$,

$$\mathrm{d}V = yA\,,$$

donde y es la variación de la posición vertical del émbolo. El sistema responde con una variación en la presión, $\mathrm{d}P$ lo que da lugar a una fuerza neta aplicada sobre el émbolo F igual a

$$F = A\mathrm{d}P\,.$$

[1] En el dispositivo original de Rüchardt se medían los períodos de oscilación de una bola de acero, bien encajada, en un tubo de vidrio vertical conectado con el recipiente que contenía el gas.

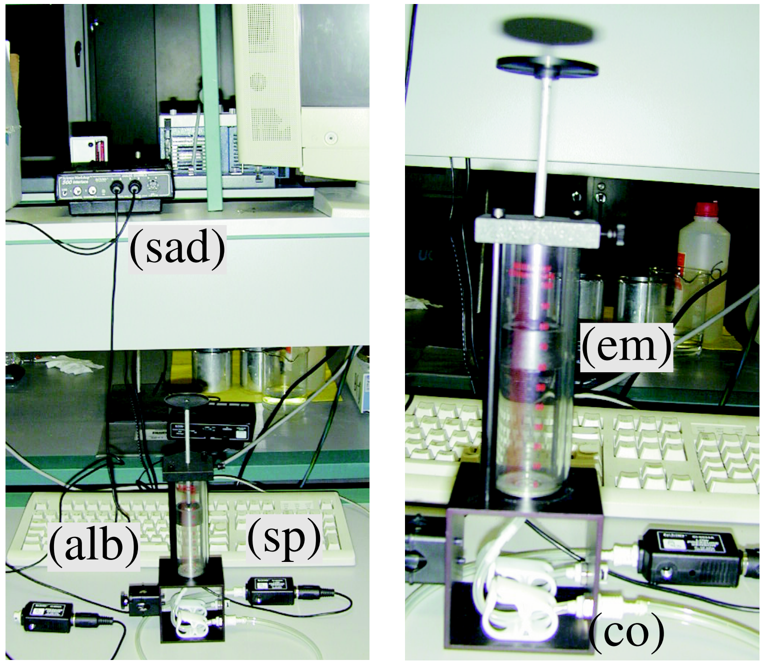

Figura 1: Esquema del dispositivo experimental empleado para medir el coeficiente adiabático de un gas. Aparato de la ley de Boyle (alb), cilindro de vidrio graduado, émbolo de grafito (em) , soporte solidario con el émbolo, conexiones (co) ; sensor de presiones de 0 a 10 kPa (sp); sistema de adquisición de datos (*interfaz* PASCO) (sad).

Si el volumen disminuye, $y < 0$, y el émbolo desciende, $\mathrm{d}P > 0$ y la fuerza $F > 0$ se aplica hacia arriba, intentando devolver el sistema a su volumen inicial. Si el volumen aumenta, $y > 0$, y el émbolo asciende, $\mathrm{d}P < 0$ y la fuerza $F < 0$ se aplica hacia abajo. Por tanto, F es una *fuerza recuperadora*, que se aplica siempre en sentido contrario al desplazamiento[2]. Si el proceso de perturbación del gas es tan rápido que puede considerarse como adiabático, entonces, para un gas ideal, suponiendo que el proceso sea también reversible,

$$PV^{\gamma} = \mathrm{Cte}\,,$$

con lo que las variaciones de presión y volumen se relacionan como

$$\gamma P V^{\gamma-1}\mathrm{d}V + V^{\gamma}\mathrm{d}P = 0\,. \tag{2}$$

La fuerza recuperadora F se puede expresar como

$$F = -\frac{\gamma P A^2}{V} y\,, \tag{3}$$

A partir de la Ec. (3) y aplicando la segunda Ley de Newton al movimiento del émbolo,

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\gamma P A^2}{mV} y = 0\,, \tag{4}$$

[2]Relacione este carácter de fuerza recuperadora de F con el hecho de que el coeficiente de compresibilidad, isotermo o adiabático, de un gas es siempre positivo.

de donde el movimiento de oscilación del émbolo tiene una frecuencia (*oscilación no amortiguada*) $\omega_0^2 = \gamma P A^2 / mV$, y período τ_0,

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mV}{\gamma P A^2}} \tag{5}$$

Si el volumen de gas encerrado en el cilindro viene dado como $V = hA$, donde h es la altura a la que se sitúa el émbolo, la Ec. (5) se puede expresar como

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mh}{\gamma P A}} = K h^{1/2}\,; K = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\gamma P A}}\,, \tag{6}$$

donde K es una constante a lo largo del experimento.

A partir de la Ec. (5) es inmediato mostrar que γ puede expresarse como

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m V}{A^2 P \tau_0^2}\,. \tag{7}$$

Si el volumen de gas encerrado en el cilindro viene dado como $V = hA$, donde h es la altura a la que se sitúa el émbolo, la Ec. (7) se puede expresar como

$$\gamma = \frac{4\pi^2 m h}{A P \tau_0^2} = G \frac{h}{\tau_0^2}\,; G = \frac{4\pi^2 m}{AP}\,, \tag{8}$$

donde las magnitudes de G son constantes a lo largo del experimento.

Descripción del material

Se dispone del siguiente material (Fig. 1):

1. Aparato de la ley de Boyle [(alb) en Fig. 1]: cilindro de vidrio graduado, émbolo de grafito [(em) en Fig. 1], soporte solidario con el émbolo, conexiones [(co) en Fig. 1].

   De acuerdo con las indicaciones del fabricante de este aparato (PASCO, modelo TD-8572), sus características técnicas son

   Diámetro del émbolo o pistón $d = (32,5 \pm 0,1)$ mm.

   Masa del pistón más la plataforma $m = (35,0 \pm 0,6)$ g.

   Altura del pistón h viene en milímetros (mm).

2. Sensor de presiones de 0 a 10 kPa [(sp) en Fig. 1]

3. Sensor de presión atmosférica (barómetro) [opcional].

4. Sistema de adquisición de datos (*interfaz* PASCO) [(sad) en Fig. 1]

Indicaciones experimentales

Reflexiones previas a la realización del experimento

La parte fundamental del experimento consiste en perturbar el estado de equilibrio del gas encerrado en el cilindro, mediante una compresión rápida del mismo, y el registro de las variaciones de la presión del gas a medida que el émbolo dejado libre oscila en forma amortiguada hasta detenerse.

Antes de llevar a cabo las experiencias, considere las siguientes cuestiones:

1. La mecánica estadística indica que para un gas ideal diatómico a temperatura ambiente su capacidad calorífica molar a volumen constante c_V viene dada por
$$c_V \approx \frac{5R}{2}\,, \tag{9}$$
siendo $R = 8,314$ J mol^{-1}K^{-1} la constante de los gases. ¿En qué condiciones se puede considerar correcta esta expresión?

2. De acuerdo con la bibliografía, ver Ref. [1], a 0 °C se tiene que para el aire $c_P = 1,227$ kJ kg^{-1} K^{-1}, con $\gamma = 1,40$. Tomando para el aire un peso molecular de $M = 28,96$ g mol^{-1}, se tiene para la capacidad calorífica $c_V = c_P/\gamma = 25,38$ J mol^{-1} K^{-1}.

   Recuerde estos datos bibliográficos pues es posible que tenga que utilizarlos para hacer estimaciones previas y es el dato con el que deberá comparar en su informe el resultado experimental que usted obtenga.

3. Elija un volumen de gas. Por ejemplo, el volumen $V = hA$ cuando la altura del émbolo es $h = 60$ mm. Estime el valor τ_0 que debería obtenerse si se utiliza la Ec. (6) y los valores dados por el fabricante del aparato.

4. El movimiento que va a describir el émbolo en su dispositivo experimental es, muy aproximadamente, *armónico amortiguado*. Admitiendo que la fuerza de la amortiguación es proporcional a la velocidad del émbolo, con constante de amortiguación β, muestre que, entonces, la Ec. (4) se debe sustituir por ($\ddot{y} = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2$, $\dot{y} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$)
$$\ddot{y} + \beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0\,, \tag{10}$$

5. Demuestre que las soluciones de la Ec. (10) vienen dadas por
$$y(t) = y_0 e^{-\beta t/2}\cos(\omega t + \phi_0);\; \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}\,. \tag{11}$$

6. Si $y(n\tau)$ e $y([n+1]\tau)$ son, respectivamente, las amplitudes del período n y del período $n+1$ del movimiento amortiguado, demuestre que entonces el coeficiente β se puede obtener como
$$\beta = -\frac{2}{\tau}\ln\frac{y([n+1]\tau)}{y(n\tau)}\,. \tag{12}$$

Realización práctica

Consulte con el profesor la puesta en marcha del programa de adquisición de datos.

1. *Oscilación y toma de datos.* Se toma un cierto volumen de aire dentro del aparato de la ley de Boyle, es decir, se toma una altura h (h no debe ser ni muy grande ni muy pequeño, variando entre $h_1 = 30$ mm y $h_5 = 70$ mm) –se abre una de las conexiones de la base, se elige el volumen y se vuelve a cerrar dicha conexión; el volumen de aire queda así fijado–, se pone en funcionamiento el programa de adquisición de datos computerizado, se perturba la posición del émbolo del gas, se suelta éste y se deja que oscile. Se detiene el programa de adquisición de datos, que habrá recogido las variaciones de la presión del gas. (*Se debe hacer una estimación previa del período de oscilación que se espera y de la amplitud inicial de dicha oscilación.*)

2. *Análisis de los datos.* A partir de los datos de presión registrados se debe obtener la frecuencia ω_0 del movimiento oscilatorio no amortiguado. Para ello es necesario, primero, medir la frecuencia ω de las oscilaciones amortiguadas y, después, obtener el correspondiente valor de β, lo que exige, a su vez, medir amplitudes para varios máximos de amplitud consecutivos. Compruébese, para un sólo valor de h, que $\beta^2 \ll \omega^2$ y que $\omega_0 \approx \omega$.

3. *Variación del período con el volumen.* Todo el proceso anterior, obtener la frecuencia ω_0 en función del volumen V, se repite para, al menos, cinco volúmenes diferentes.

Preguntas adicionales relacionadas con el experimento

1. Una vez se dispone de los datos del período τ_0 frente al volumen V del gas –supuestos constantes los restantes parámetros del sistema–, ¿qué representación gráfica será la más adecuada para obtener γ?

2. Si en vez de aire se utilizara como gas el helio (He), ¿qué valor de γ esperaría obtener?

3. Si el experimento se realizase a una temperatura muy alta, 700 K, por ejemplo, ¿qué valor de γ esperaría obtener?

4. ¿Cómo se puede demostrar que para un gas ideal en un proceso adiabático reversible $PV^{c_P/c_V} = \text{Cte}$?

5. El sonido son ondas transversales cuya velocidad de propagación viene dada por (demuéstrese por análisis dimensional)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}\,,$$

donde M es el peso molecular (aparente del aire) y el coeficiente de compresibilidad adiabática $\kappa_S = 1/\gamma P$. ¿Qué indica la presencia de γ en esta expresión?

6. Demuestre que entre el coeficiente de compresibilidad isoterma κ_T y el coeficiente de compresibilidad adiabática κ_S, existe la relación:

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \gamma\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \gamma\,.$$

Estimación de errores

La representación gráfica del cuadrado del período de oscilación (τ_0) frente a la altura del volumen elegido (h) debe ser una línea recta de pendiente m_{R}. A partir de esta pendiente m_{R} se puede obtener el correspondiente valor de γ para los valores del experimento.

El error de la pendiente, δm_{R} se obtiene mediante el método de las pendientes máxima y mínima. El error relativo de γ, $\delta_{\mathrm{r}} = \delta\gamma/\gamma$, es, prácticamente, igual al error relativo de m_{R}, $\delta_{\mathrm{r}} = \delta m_{\mathrm{R}}/m_{\mathrm{R}}$.

Referencias

[1] K. Raznjevic, *Tables et Diagrammes Thermodynamiques,* Editions Eyrolles, paris (1970)

[2] D. L. Livesey, *Apparatus for measuring the specific heat of a gas*, Am. J. Phys. **33**, 18-19 (1965).

[3] K Weltner, *Measurement of specific heat capacity of air,* Am. J. Phys. **61**, 661-662 (1993)

[4] G. Henry, *A simple form of the Clément and Desormes apparatus*, Am. J. Phys. **12**, 307 (1944)

[5] O. L. de Lange, *Measurement of bulk moduli and ratio of specific heats of gases using a Rüchardt's experiment*, Am. J. Phys. **68**, 265 (2000).

[6] G. D. Severn and T. Steffensen , *A simple extension of Rüchardt's method for measuring the ratio of specific heats of air using microcomputer-based laboratory sensors*, Am. J. Phys **69**, 387-389 (2001)

[7] C LoPresto, P R Holody, *Measuring the damping constant for underdamped harmonic motion*, The Physics Teacher **41**, 22-24 (2003)

[8] Giacomo Torzo, Giorgio Delfitto, Barbara Pecori, Pietro Scatturin, *A new microcomputer-based laboratory version of the Rüchardt experiment for measuring the ratio* $\gamma = C_p/C_v$ *in air*, Am. J. Phys **69**, 1205-1211 (2001)

[9] S. Velasco, F. L. Román, J. Faro, *A simple experiment for measuring the adiabatic coefficient of air*, Am. J. Phys. **66**, 642–643 (1998).