# Capítulo II

## II.1 Aspectos generales del movimiento plano

# Capítulo II
# Movimiento plano

## II.1 Aspectos generales del movimiento plano.

- Movimiento continuo de una figura plana en su plano. Centro instantáneo de rotación (cir).
- Teorema de Aronhold-Kennedy.
- Aplicación del cir al análisis de velocidades y aceleraciones.
- Base y ruleta.
- Aceleración de un punto del plano móvil que coincide con el cir.

## II.2 Teoría de la curvatura.

## II.3 Estudio del mecanismo cuadrilátero articulado.

# Capítulo II: Tema 1
# Movimiento Plano

1.1 Movimiento continuo de una figura plana en su plano. Centro instantáneo de rotación (cir).
- Introducción.
- Centro instantáneo de rotación.

1.2 Teorema de Aronhold-Kennedy.
- Enunciado.
- Diagrama del círculo.

1.3 Aplicación del cir al análisis de velocidades y aceleraciones.
- Teorema de Mehncke.
- Teorema de Burmester.
- Imagen o campo de velocidades.
- Aplicaciones al análisis de aceleraciones.

1.5 Base y ruleta.

1.6 Aceleración de un punto del plano móvil que coincide con el cir.

# Capítulo II: Tema 1

1.1 Movimiento continuo de una figura plana en su plano. Centro instantáneo de rotación (cir).

1. Introducción.
2. Centro instantáneo de rotación.

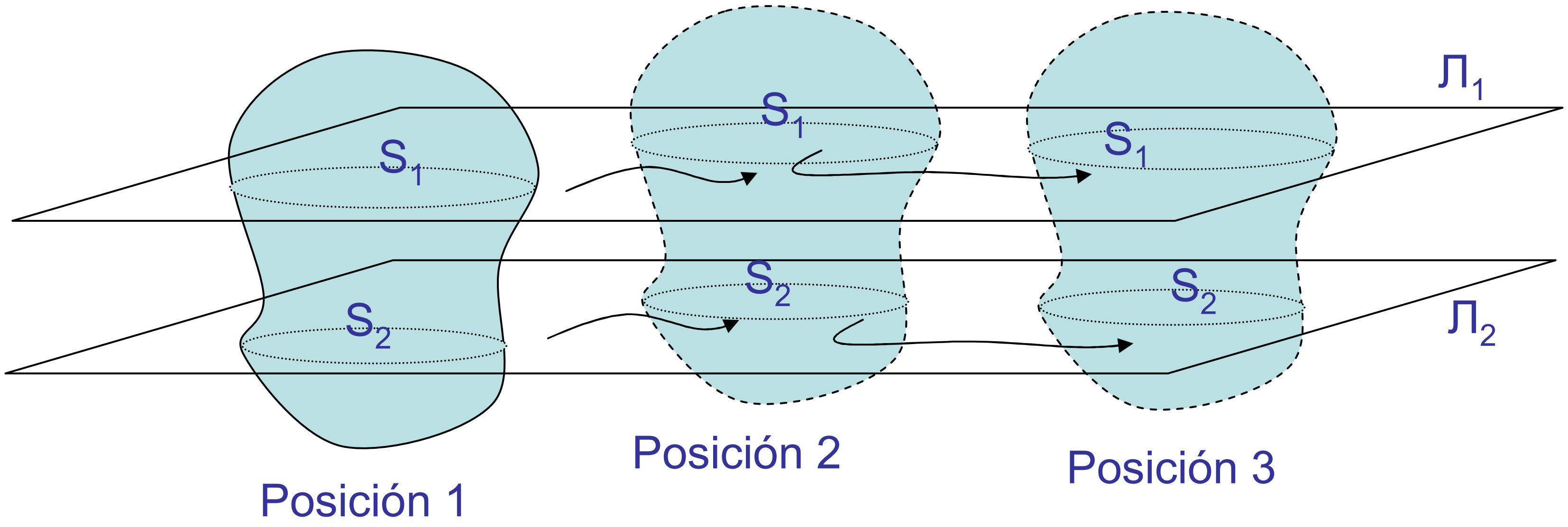
# Introducción

La gran mayoría de los mecanismos que aparecen en la práctica tienen movimiento plano. Muchas de las propiedades de estos mecanismos, los teoremas obtenidos, desarrollos matemáticos, etc. pueden ser extrapolados al caso de movimiento tridimensional.

En este capítulo se estudian estas propiedades del movimiento plano para poder abordar su análisis y síntesis cinemática y, posteriormente, su análisis dinámico.

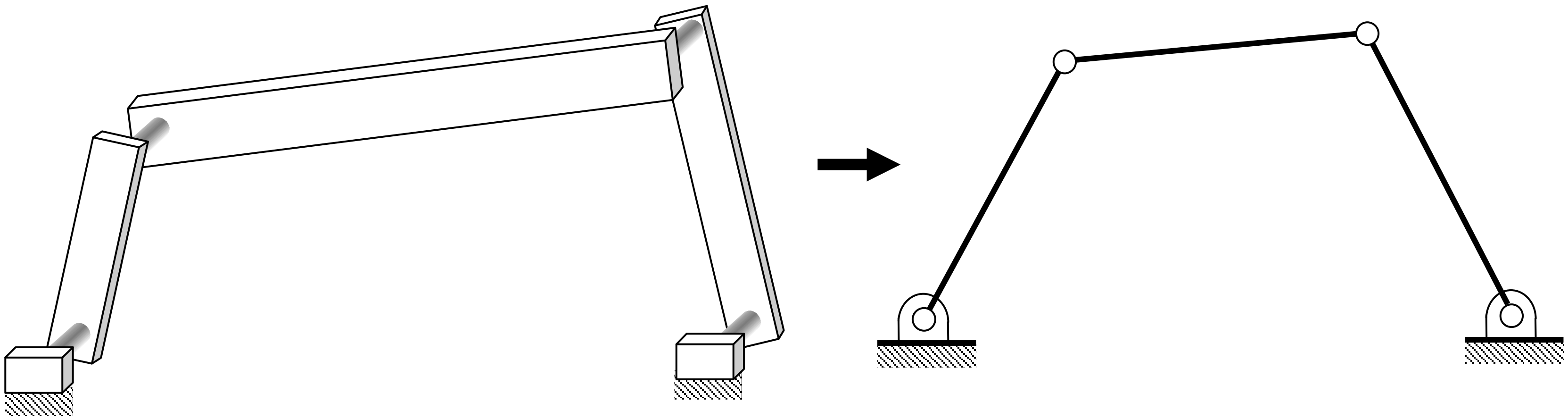
# Introducción

Definición: un mecanismo tiene movimiento plano cuando las velocidades de todos sus puntos son paralelas a un plano fijo.



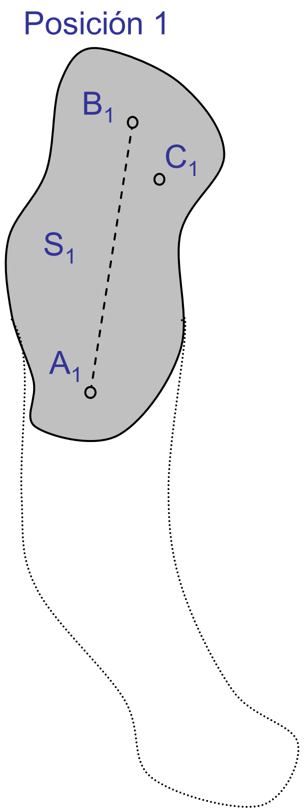
# Introducción

Movimiento plano no quiere decir que el mecanismo este contenido en un plano, aunque así se puede idealizar su movimiento para el análisis cinemático.



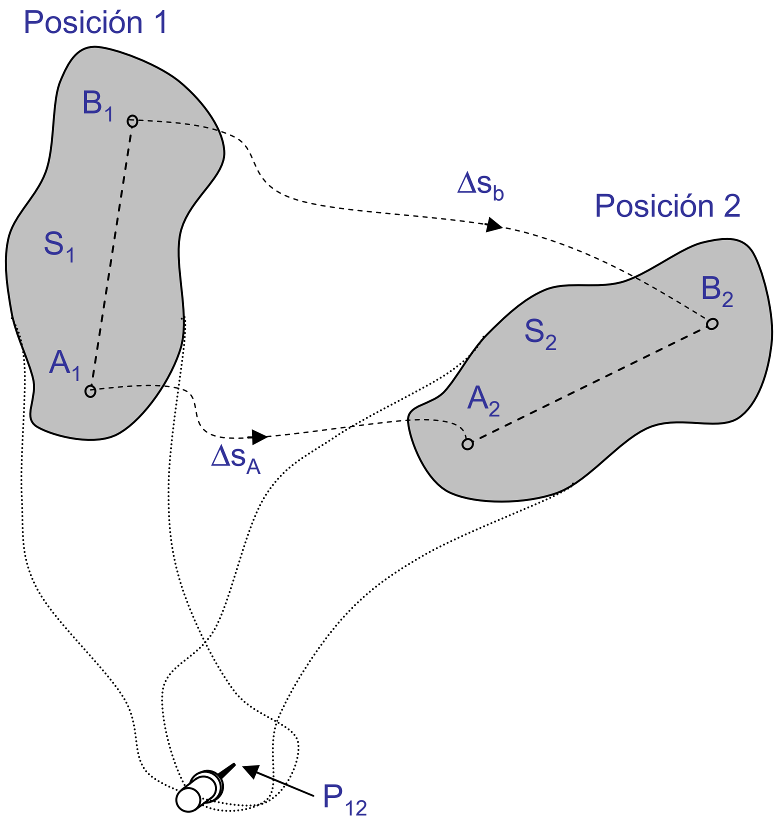
Esta hipótesis no es válida en el caso dinámico.

# Centro instantáneo de rotación



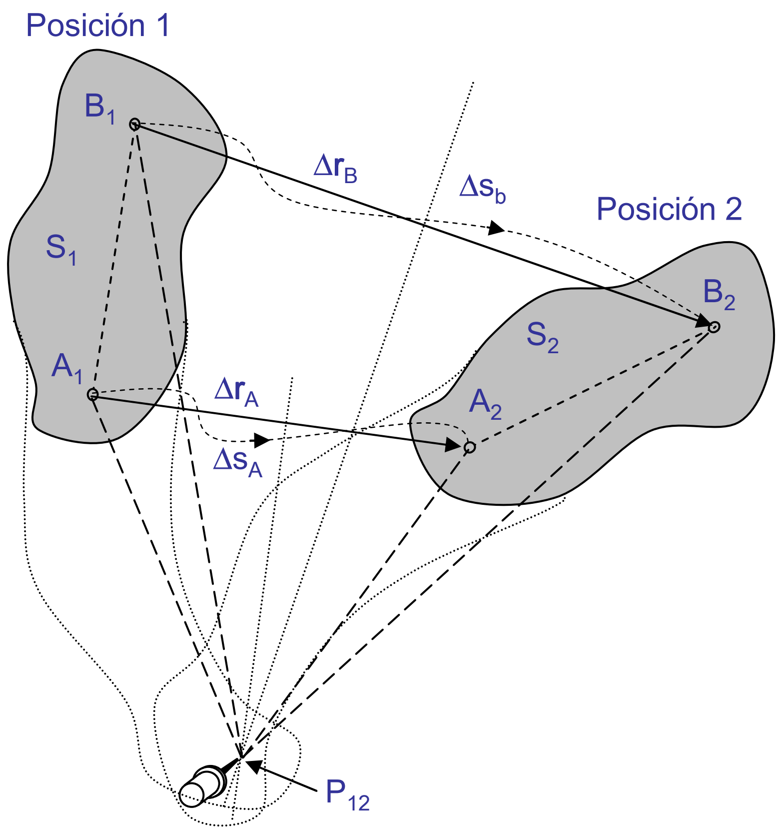

Vamos a estudiar el movimiento de una figura plana en su plano. Para estudiar este movimiento basta con estudiar el movimiento de un segmento, $A_1B_1$, ya que el movimiento de cualquier otro punto, $C_1$, queda definido por la condición de que no varia su posición relativa con respecto a $A_1$ y $B_1$.

# Centro instantáneo de rotación



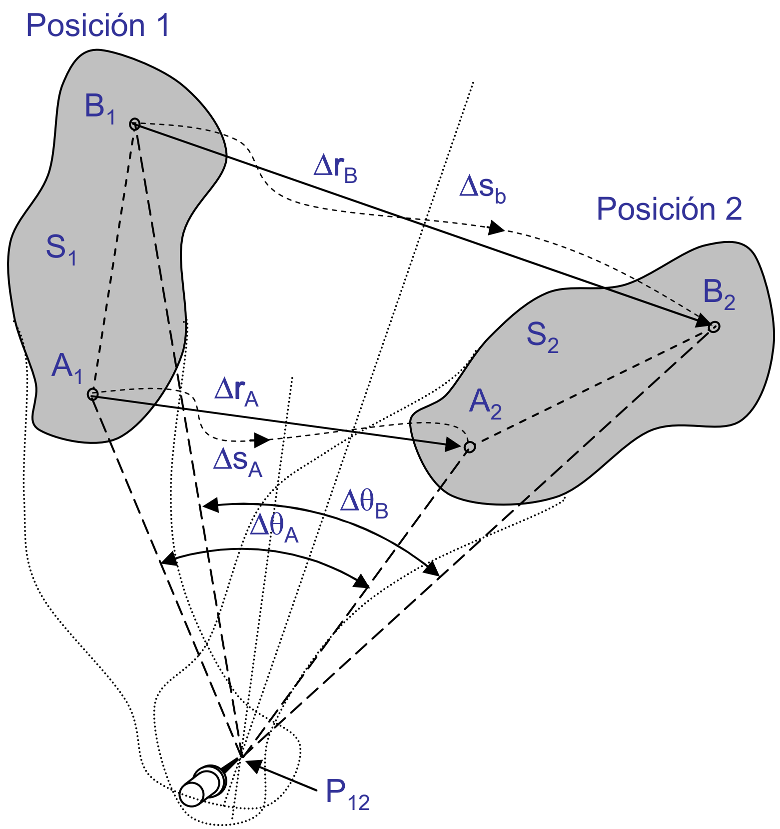

El punto $P_{12}$ es un punto que si se considera rígidamente unido al segmento AB su posición inicial coincide con la final.

# Centro instantáneo de rotación




Dicho punto $P_{12}$ se obtiene mediante la intersección de las mediatrices de los segmentos $A_1A_2$ y $B_1B_2$

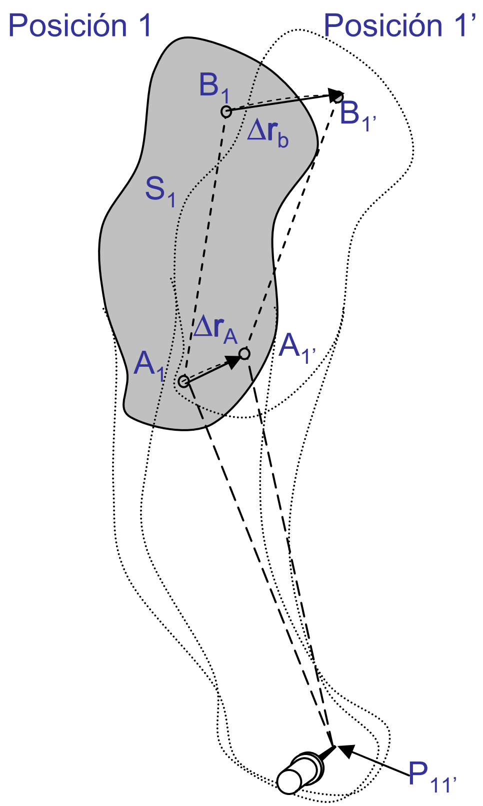
# Centro instantáneo de rotación




Dicho punto $P_{12}$ se denomina <u>polo de rotación</u> o <u>centro de rotación</u> entre las posiciones 1 y 2.

Entonces, el movimiento entre las dos posiciones se puede considerar como una rotación alrededor de dicho punto (esto es sólo válido cuando estudiemos las posiciones iniciales y finales).

# Centro instantáneo de rotación



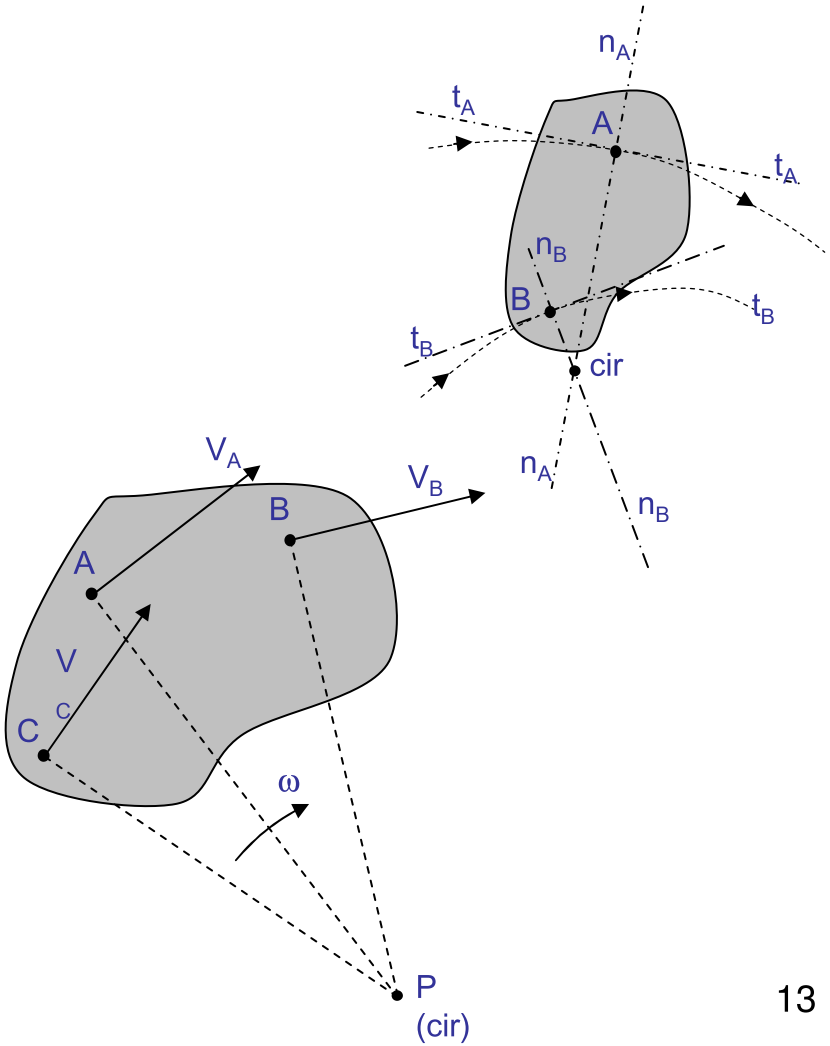

Si la posición 2 se acerca a la posición 1 el segmento $A_1A_2$ tiende a la tangente a la trayectoria en el punto A, y lo mismo ocurre con el punto B.

Así pues, el polo de rotación en el movimiento infinitesimal se convierte en el **centro instantáneo de rotación** (cir), o simplemente **polo** del movimiento, y se obtiene trazando las tangentes a las trayectorias de dos puntos cualquiera del sólido.

# Centro instantáneo de rotación

## Propiedades del cir

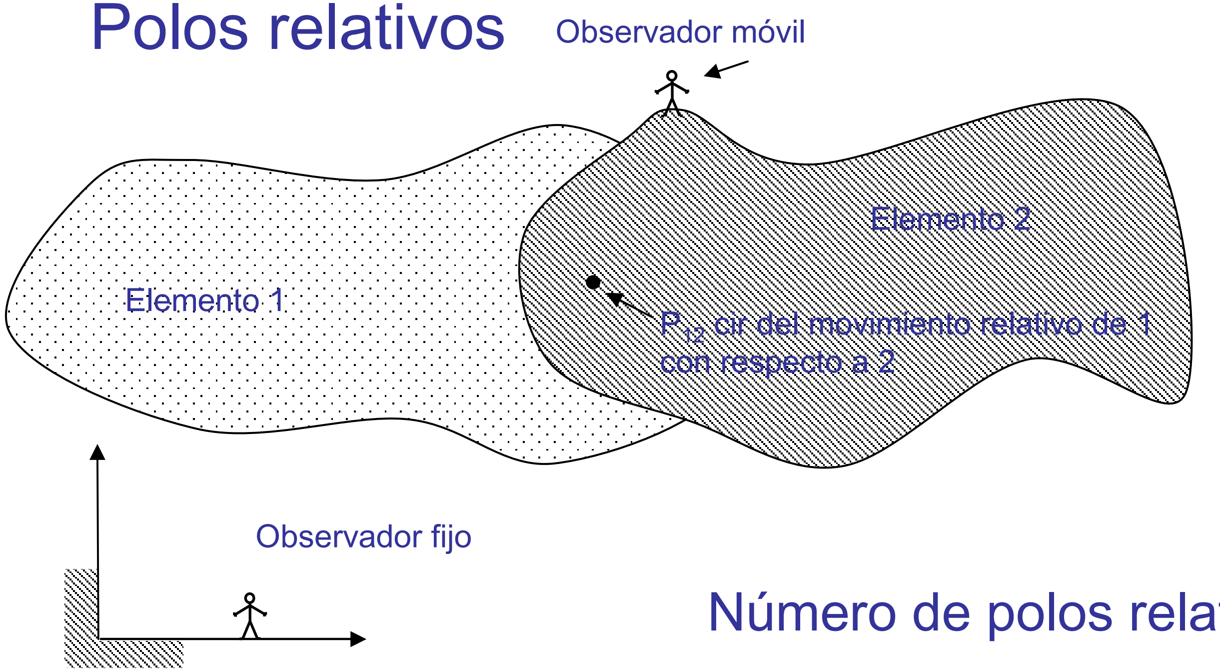
- Puesto que en un “dt” su posición no varía, la velocidad de este punto es cero.
- La velocidad de todos los demás puntos del sólido son perpendiculares al segmento que les une con el cir, y además su magnitud es proporcional a la distancia.
- La velocidad angular del sólido es una relación, constante para todos los puntos del sólido, entre la velocidad de un punto y su distancia al cir.



# Centro instantáneo de rotación

## Propiedades del cir

### Polos relativos




### Número de polos relativos

$$n = \frac{N(N-1)}{2}$$

# Centro instantáneo de rotación

## Propiedades del cir

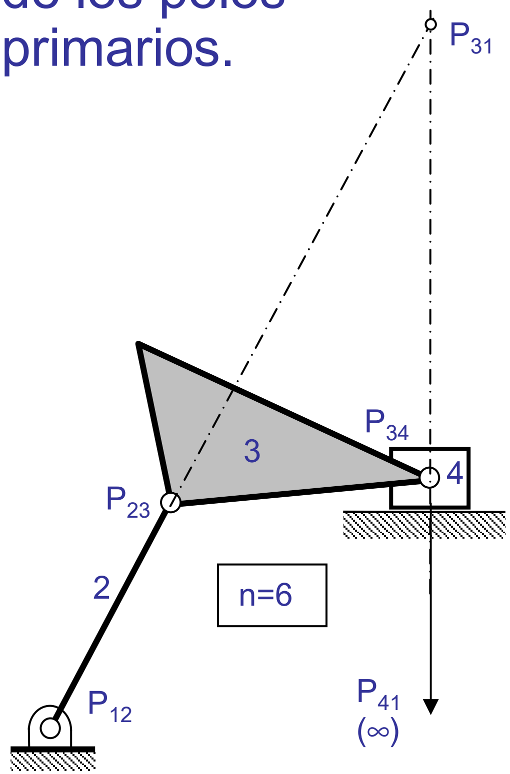
Las propiedades de los cir permiten encontrar los denominados polos primarios de un mecanismo rápidamente siguiendo un conjunto de reglas fácilmente deducibles de todo lo anterior. A partir de ahora, se denominan polos primarios a aquellos polos de un mecanismo que pueden localizarse por simple inspección directa de éste siguiendo las siguientes reglas:

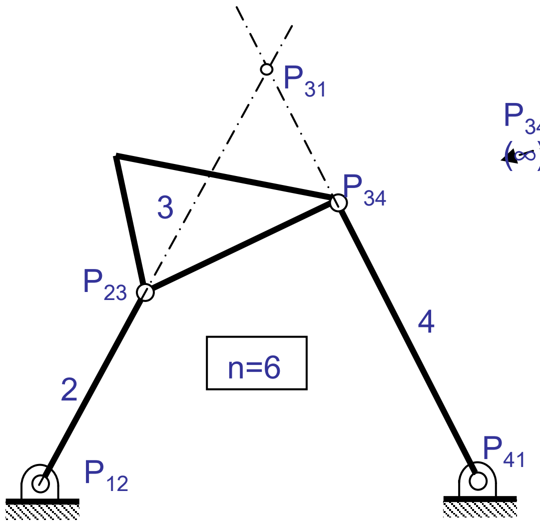
1. Todos los pares de rotación (tipo R) que existen en un mecanismo.
2. Puntos en el infinito cuando un elemento se traslada con respecto a otro.
3. Los puntos de contacto entre dos elementos donde existe rodadura pura.
4. Si en un elemento se conocen las trayectorias de dos de sus puntos respecto de otro elemento, se obtiene el polo del movimiento relativo en el punto de corte de las dos normales a las respectivas trayectorias que pasan por dichos puntos.

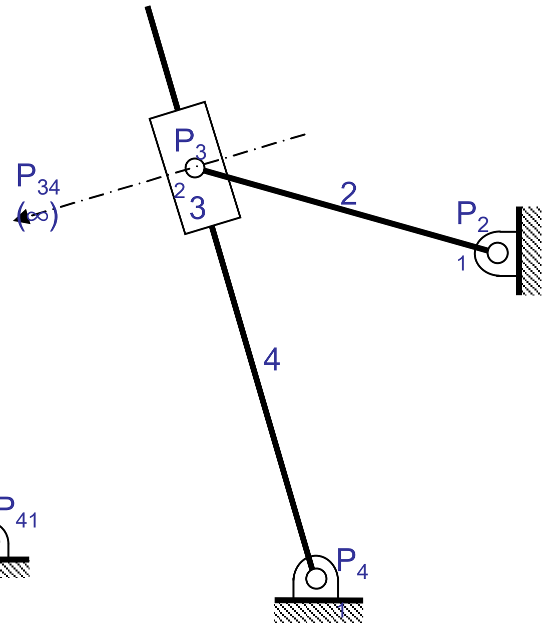
# Centro instantáneo de rotación

## Determinación del cir

Determinación de los polos primarios.



# Capítulo II: Tema 1

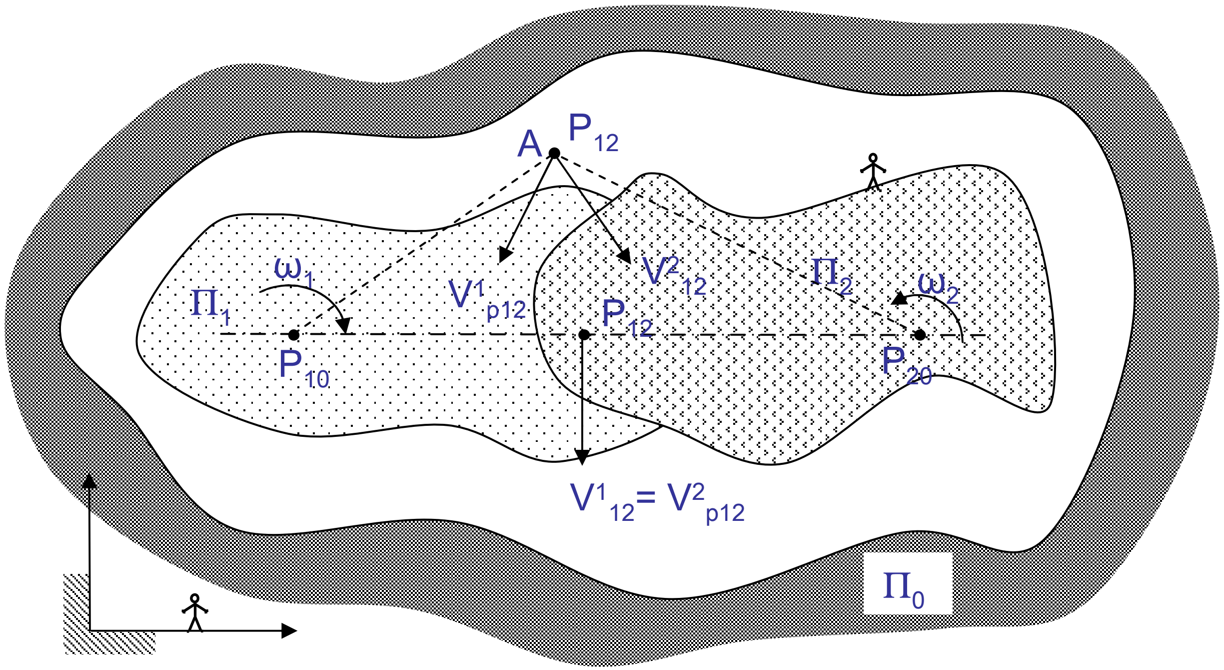
1.2 Teorema de Aronhold-Kennedy.

1. Enunciado.
2. Diagrama del círculo.

# Teorema de Aronhold-Kennedy. Enunciado

*"Los tres polos del movimiento relativo entre tres elementos con movimiento plano están permanentemente alineados".*

El Teorema de Aronhold-Kennedy se emplea para la localización de polos relativos entre los diferentes elementos que componen un mecanismo.




•$P_{10}$: Polo del movimiento relativo de $\Pi_1$ y $\Pi_0$.
•$P_{20}$: Polo del movimiento relativo de $\Pi_2$ y $\Pi_0$.
•$P_{12}$: Polo del movimiento relativo de $\Pi_1$ y $\Pi_2$.

$$\omega_1 \; P_{10}P_{12} = \omega_2 \; P_{20}P_{12}$$

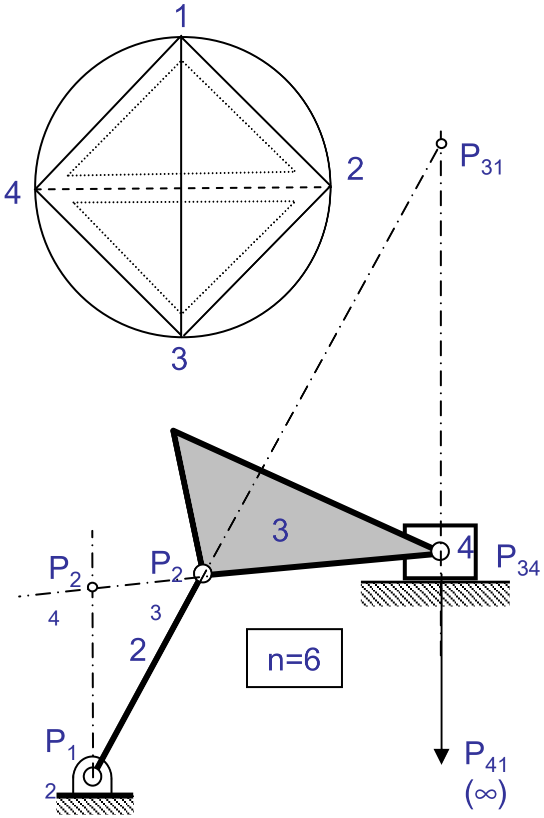
$$\frac{P_{10}P_{12}}{P_{20}P_{12}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

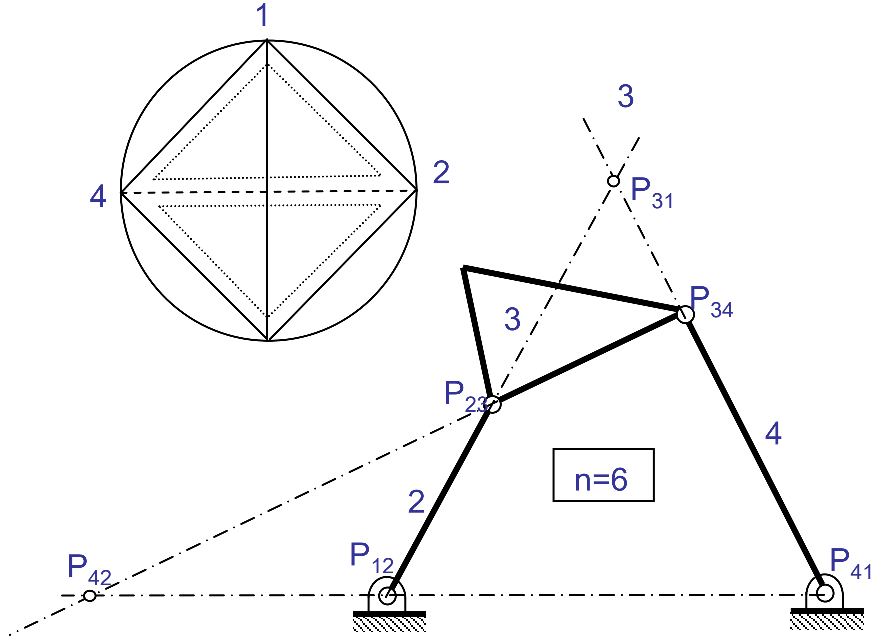
# Diagrama del círculo

El diagrama del círculo permite obtener fácilmente los polos del movimiento relativo entre los elementos de un mecanismo. Para ello el método emplea los conceptos vistos anteriormente y especialmente el Teorema de Aronhod-Kennedy. Para la localización de los polos del movimiento se seguirán los siguientes pasos:

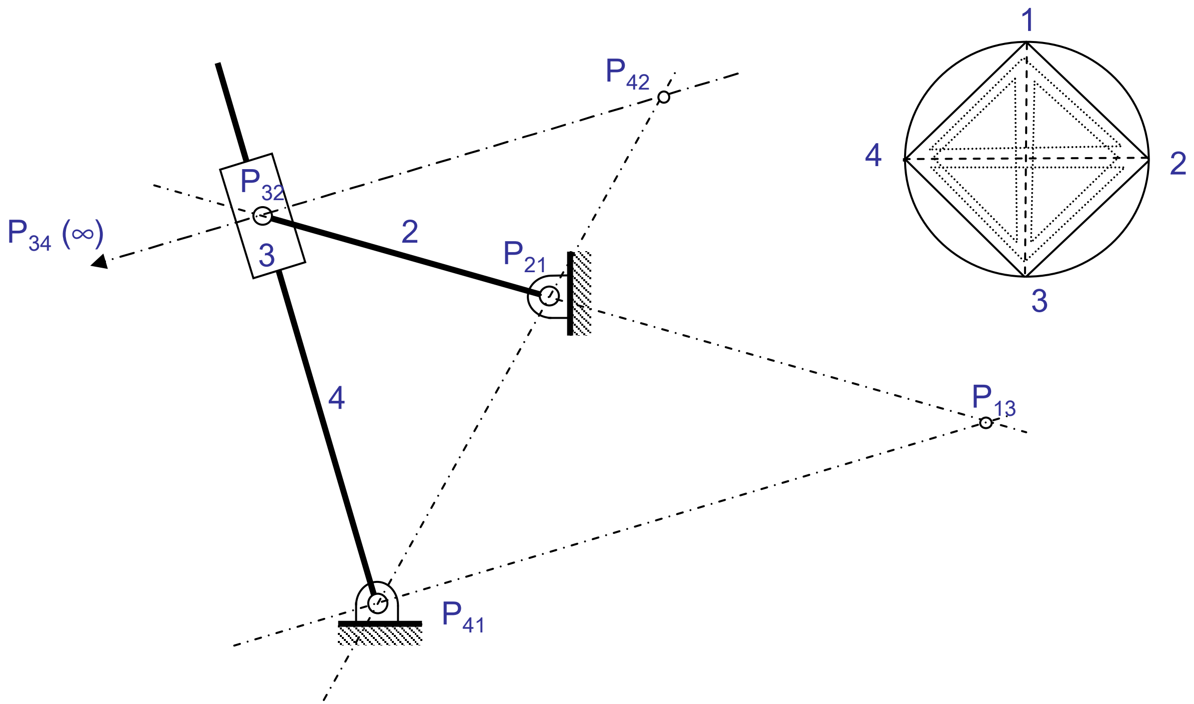
1. Se toma una circunferencia y se divide en tantas partes iguales como elementos (N) tiene el mecanismo. A continuación se numeran de 1 a N los puntos en que está dividida la circunferencia. Todas las posibles cuerdas que unen los puntos marcados representan los distintos polos del movimiento en el mecanismo.
2. Se dibujan con líneas continuas las cuerdas correspondientes a los polos primarios y a trazos los correspondientes a los desconocidos.
3. El resto de los polos será obtenido utilizando el teorema de Aronhold-Kennedy, aplicándoselo a grupos de tres elementos en el mecanismo. Para ello se localizan en el círculo los triángulos que tengan en común un lado dibujado a trazos y todos los demás lados continuos.

# Diagrama del círculo



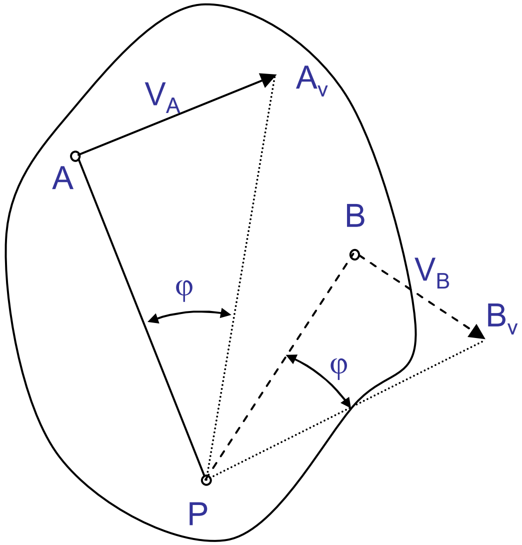
# Diagrama del círculo



# Capítulo II: Tema 1

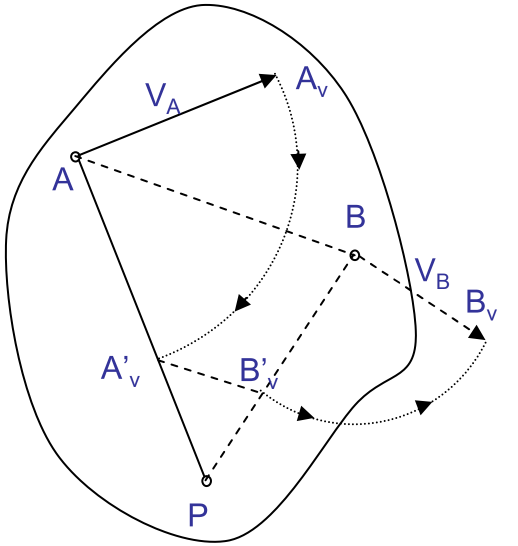
1.3 Aplicación del cir al análisis de velocidades y aceleraciones.
1. Teorema de Mehncke.
2. Teorema de Burmester.
3. Imagen o campo de velocidades.
4. Aplicaciones al análisis de aceleraciones.

# Teorema de Mehncke




$$\tan\varphi = \frac{AA_v}{PA} = \omega$$

$$\tan\varphi = \frac{BB_v}{PB} = \omega$$




$$\frac{AA'_v}{BB'_v} = \frac{PA}{PB}$$

$$\frac{AA'_v}{PA} = \frac{BB'_v}{PB} = \frac{AA_v}{PA} = \frac{BB_v}{PB} = \omega$$

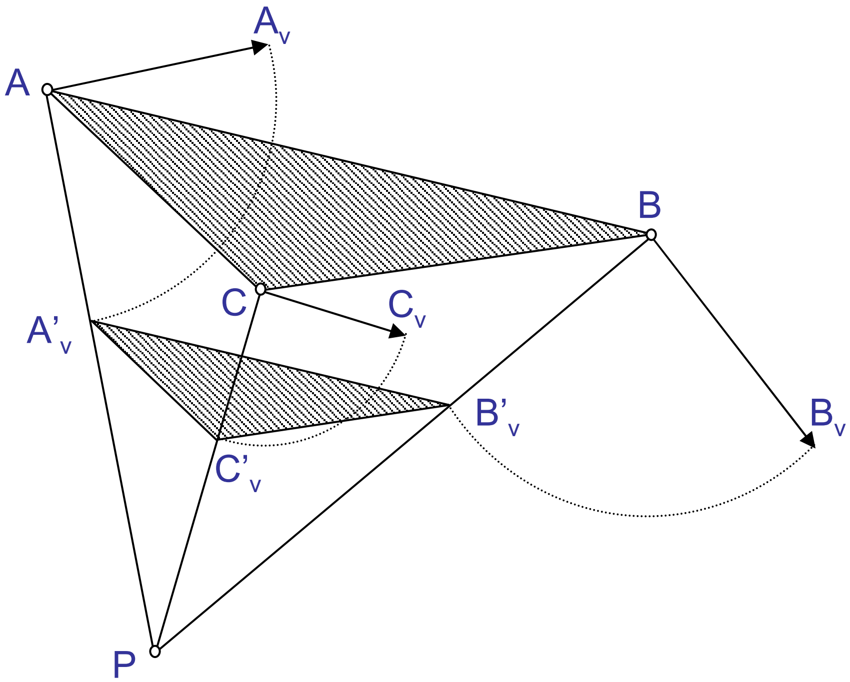
$$\frac{A'_v B'_v}{AB} = \frac{PA'_v}{PA} = \frac{PA - AA'_V}{PA} = 1 - \omega$$

$$\frac{A'_v B'_v}{AB} = \frac{A'_v C'_v}{AC} = \frac{B'_v C'_v}{BC} = 1 - \omega$$

# Teorema de Mehncke

<u>Teorema de Mehncke:</u>

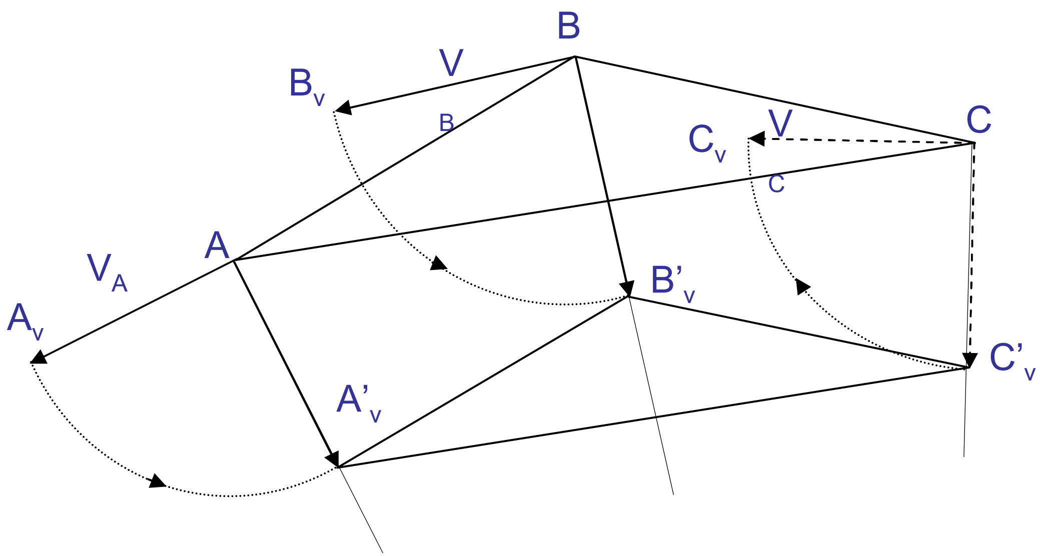
*“La figura formada por los extremos de las velocidades ortogonales de un elemento rígido es proporcional figura original y tiene una relación de semejanza (1-$\omega$), siendo $\omega$ la velocidad angular del elemento”.*




$$\frac{A'_v B'_v}{AB} = \frac{A'_v C'_v}{AC} = \frac{B'_v C'_v}{BC} = 1 - \omega$$

# Teorema de Mehncke

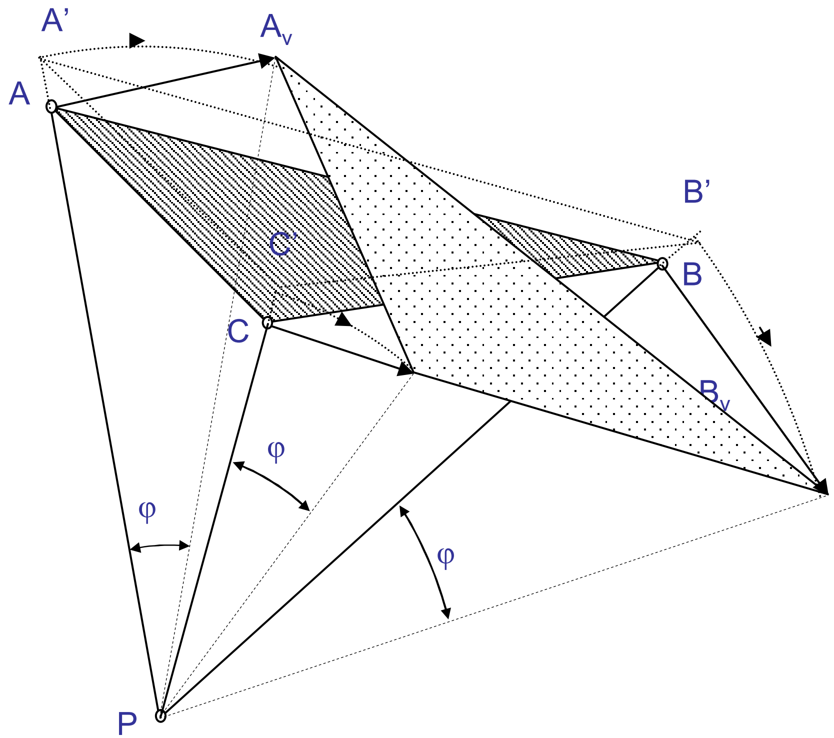
Este teorema permite realizar una interesante construcción gráfica para la determinación de la velocidad de un punto C de un plano móvil conocidas las velocidades de otros dos puntos, A y B, del mismo plano cuando el polo del movimiento cae fuera de los límites del papel.



# Teorema de Burmester

## Teorema de Burmester:

*"La figura formada por los extremos de las velocidades de un elemento rígido, es semejante a la figura original y la razón de semejanza es $(1+\omega)^{1/2}$, encontrándose girada un ángulo $\varphi$ respecto de la figura original".*




$$\tan\varphi = \frac{AA_v}{PA} = \frac{BB_v}{PB} = \frac{CC_v}{PC} = \omega$$

$$\frac{PA_v}{PA} = \frac{\sqrt{PA^2 + AA_v^2}}{PA} = \sqrt{\left(\frac{PA}{PA}\right)^2 + \left(\frac{AA_v}{PA}\right)^2} = \sqrt{1+\omega^2}$$

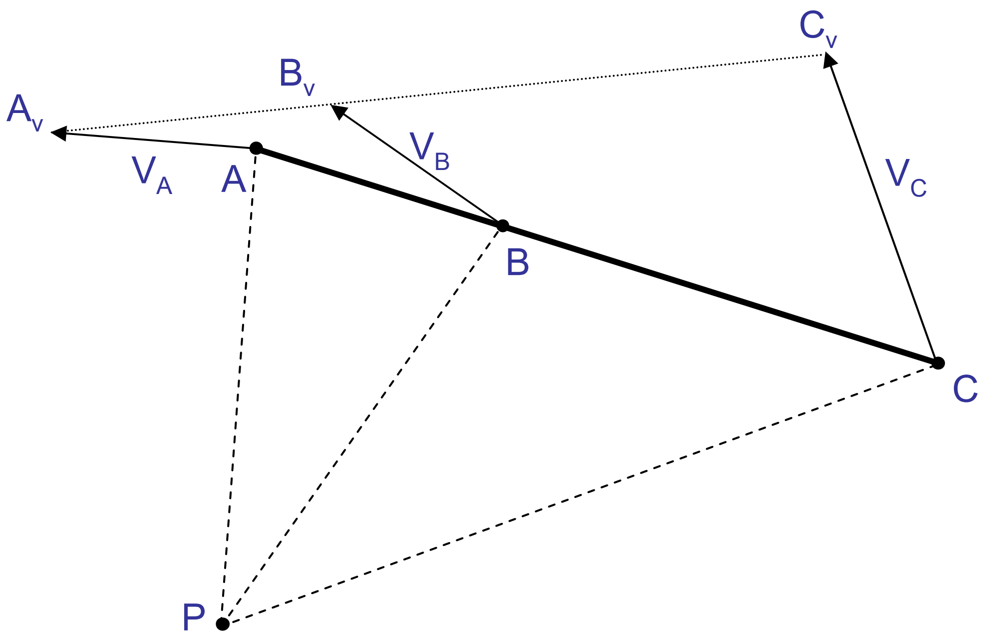
$$PA_v = PA\sqrt{1+\omega^2}$$

$$PB_v = PB\sqrt{1+\omega^2}$$

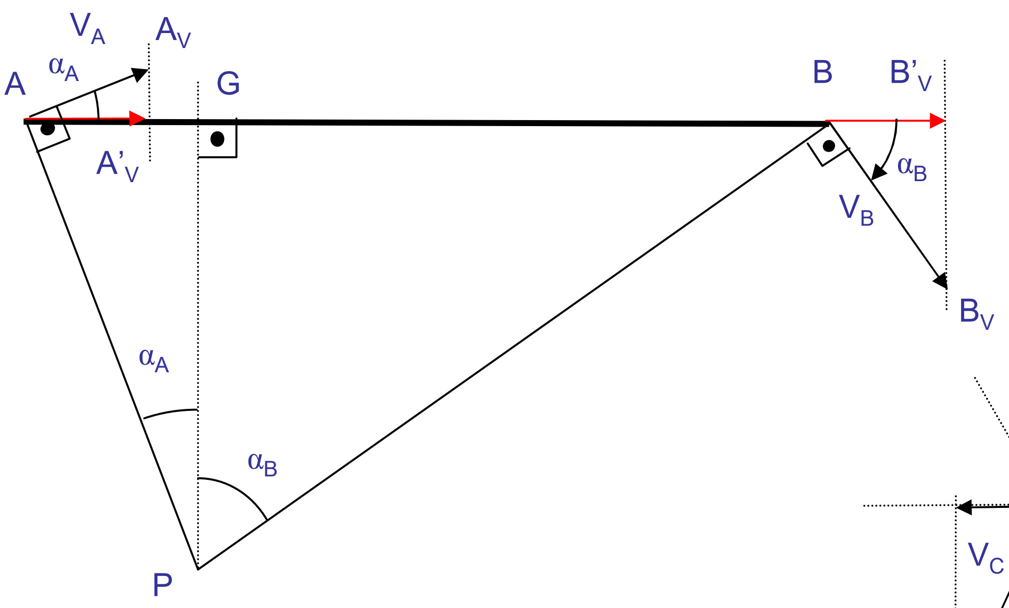
$$PC_v = PC\sqrt{1+\omega^2}$$

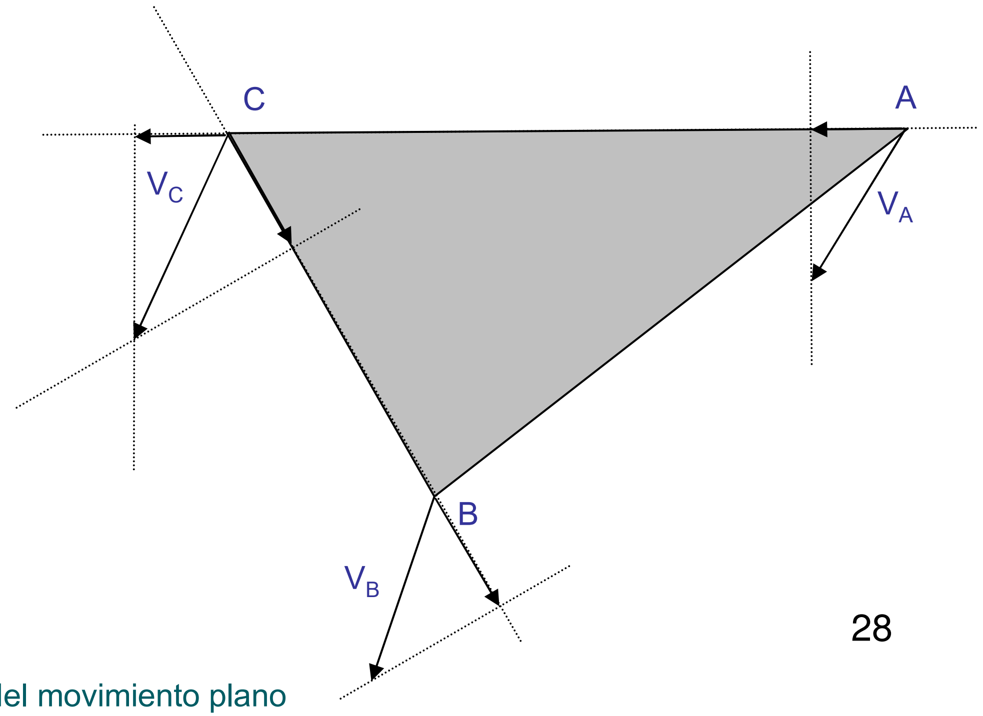
# Teorema de Burmester

Como consecuencia especial del teorema de Burmester se puede decir que si tres puntos sobre el mismo plano móvil están alineados los extremos de las velocidades de éstos también estarán alineados

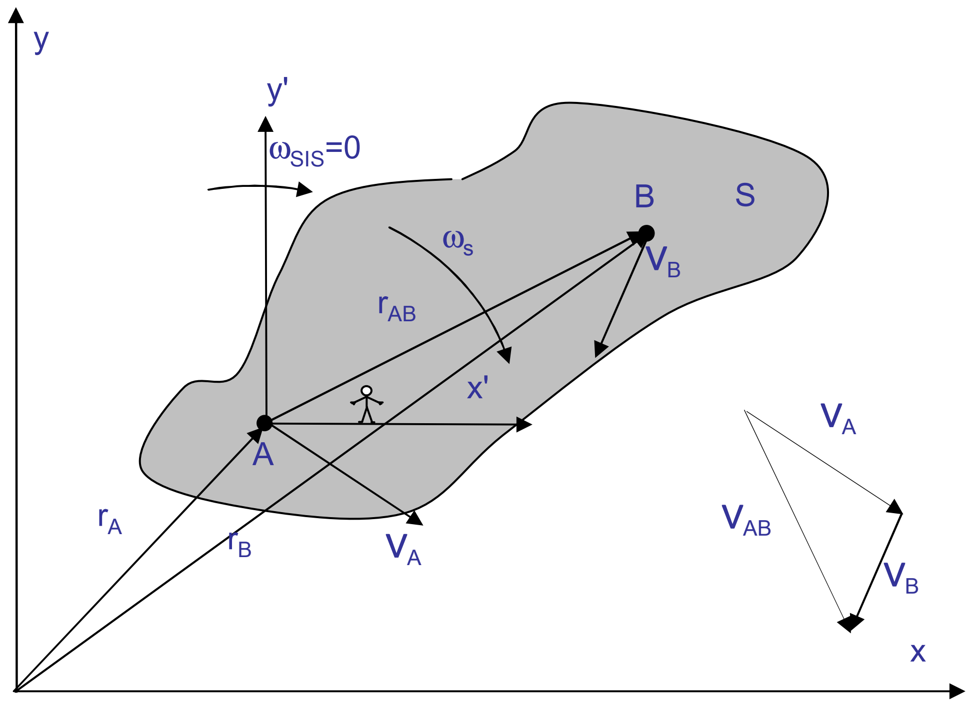


# Teorema de Burmester



# Imagen o campo de velocidades




$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}$$

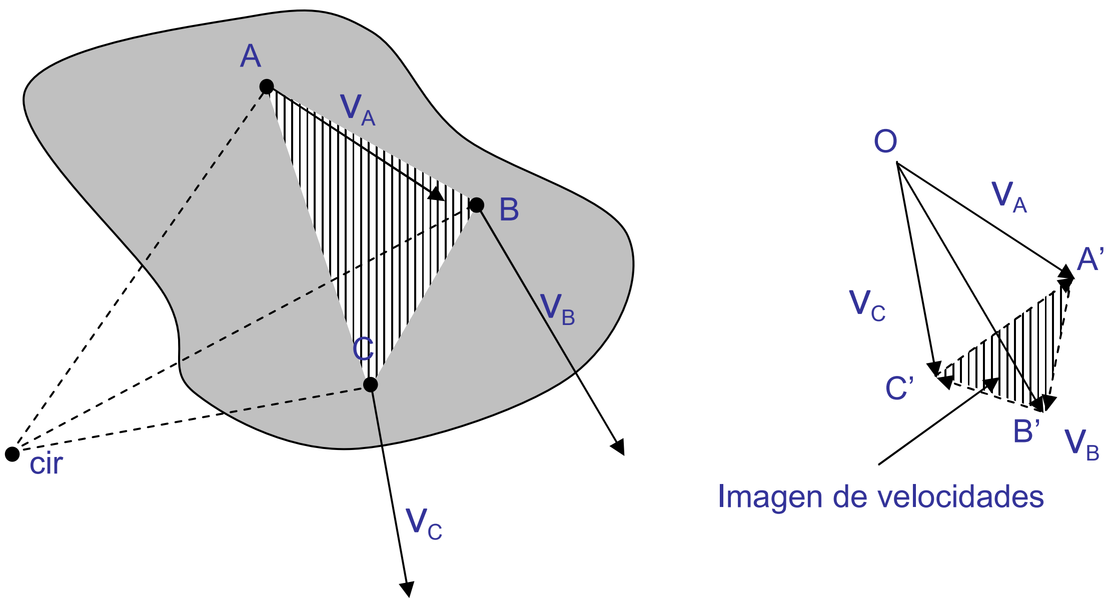
$$\mathbf{V}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \mathbf{V}_A + \mathbf{r}_{AB} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{AB}$$

$V_{AB}$ es siempre perpendicular a la recta AB

# Imagen o campo de velocidades

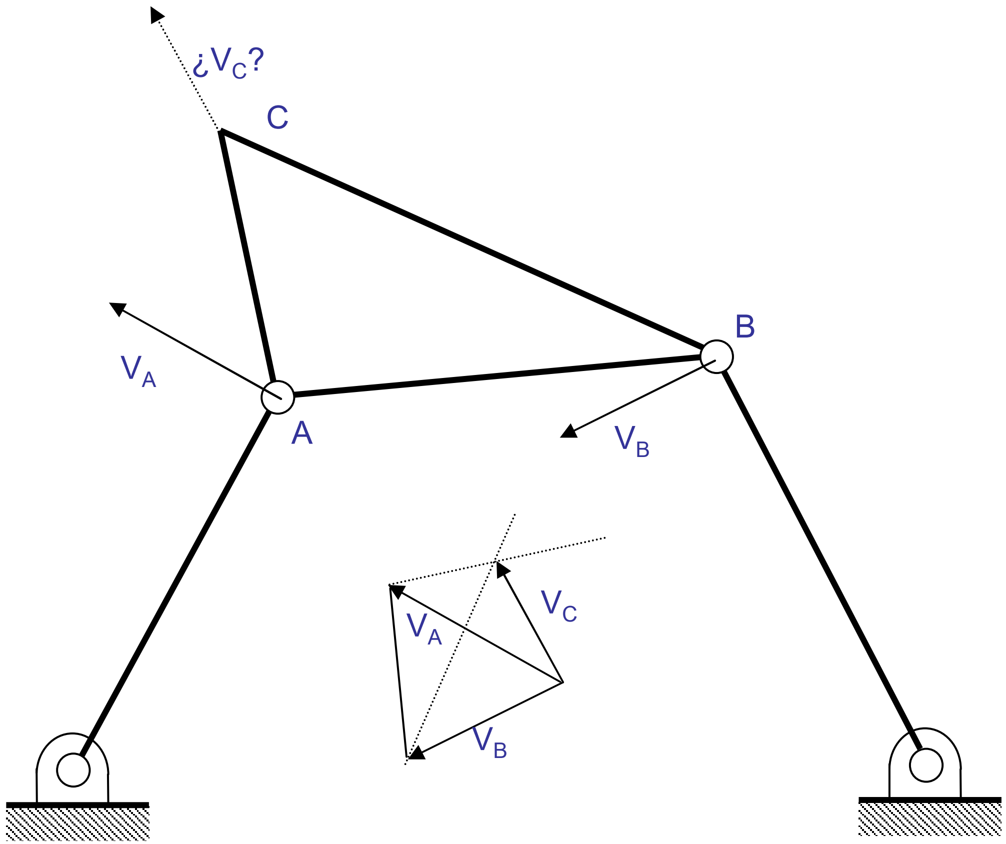
<u>Imagen o Campo de Velocidades:</u>

Si se llevan a un origen común los vectores velocidad de tres puntos de un mismo sólido rígido y se unen los extremos de estos vectores se obtiene un triángulo A'B'C' semejante al triángulos ABC. El triángulo A'B'C' se denomina **Imagen** o **Campo de Velocidades**. Esta propiedad se deduce por las características de las velocidades relativas. En la figura se muestra un sólido y sus tres velocidades que al ser llevadas a un origen común, O, generan el campo de velocidades A'B'C', donde se dice que los tres puntos A', B' y C' son homólogos de A, B y C, y el punto O es homólogo del cir en el cuerpo real.



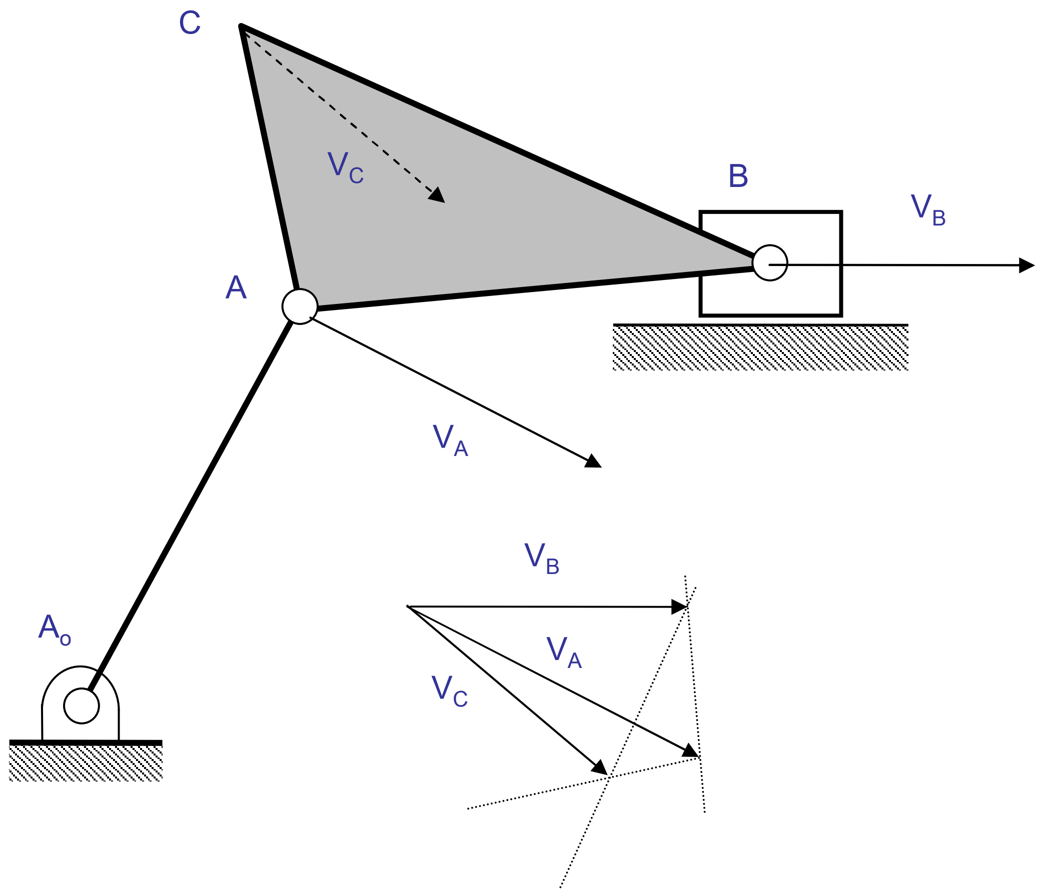

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_B &= \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{AB} \\ \mathbf{V}_C &= \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{BC} \\ \mathbf{V}_A &= \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_{CA} \end{aligned}\right\}$$

# Imagen o campo de velocidades



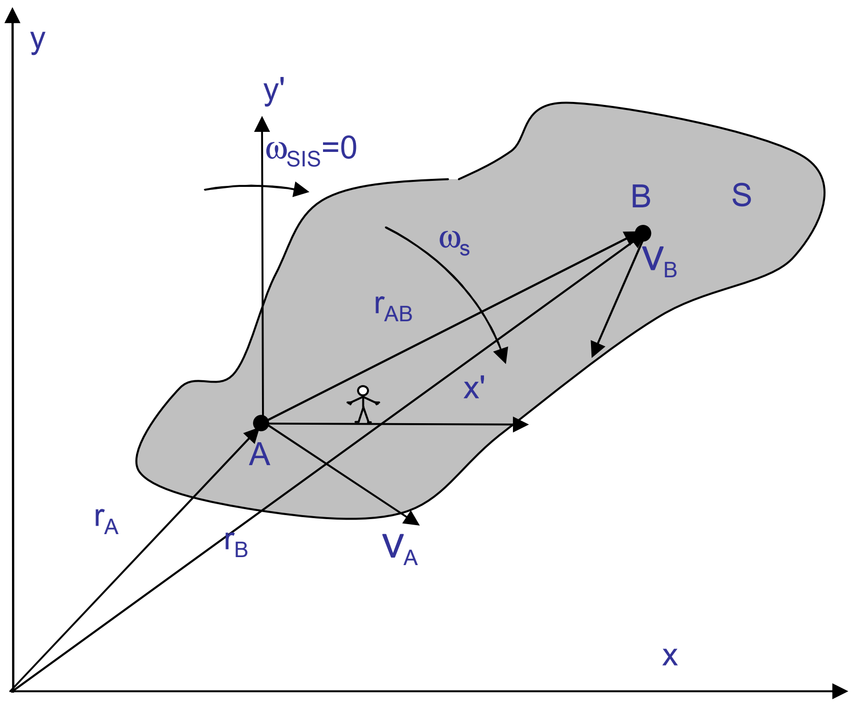

Determinación de la velocidad del punto C del acoplador

# Imagen o campo de velocidades




Análisis de velocidades en un mecanismo biela-manivela

# Aplicación al análisis de aceleraciones




$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}$$

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{r}_{AB} \times \boldsymbol{\omega}$$

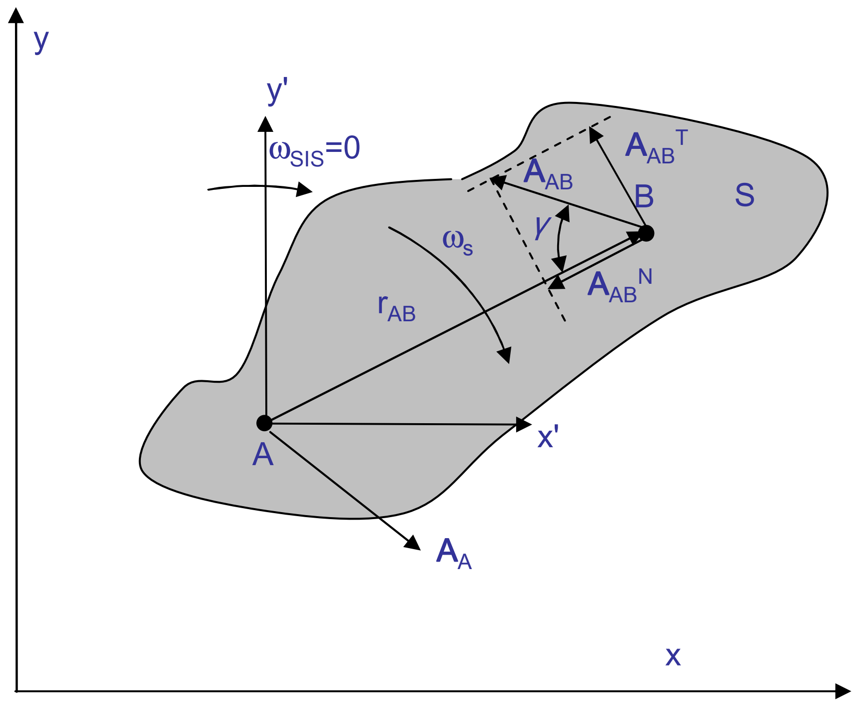
$$\mathbf{A}_\mathrm{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_\mathrm{B}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}_\mathrm{A}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}_\mathrm{AB} \times \boldsymbol{\omega})}{\mathrm{dt}} =$$

$$= \mathbf{A}_\mathrm{A} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\mathrm{AB}}{\mathrm{dt}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_\mathrm{AB} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{dt}} =$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{A} + (\mathbf{r}_\mathrm{AB} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_\mathrm{AB} \times \boldsymbol{\alpha} =$$

$$\mathbf{A}_\mathrm{A} + \mathbf{A}_\mathrm{AB}^\mathrm{N} + \mathbf{A}_\mathrm{AB}^\mathrm{T}$$

# Aplicación al análisis de aceleraciones

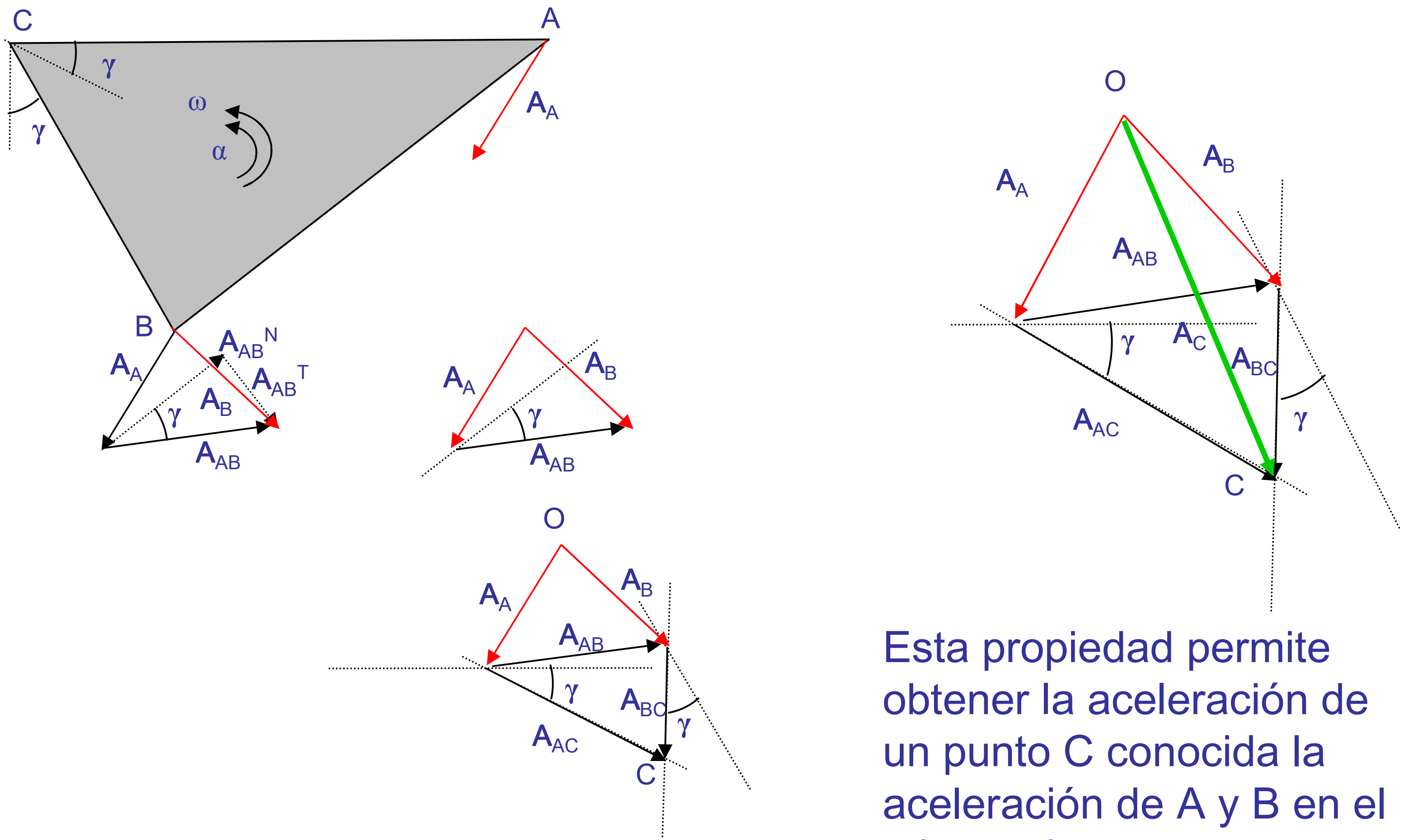



$$\mathbf{A}_{\mathrm{B}} = \mathbf{A}_{\mathrm{A}} + \mathbf{A}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{N}} + \mathbf{A}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{T}}$$

$$\tan\gamma = \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{A}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{N}}}$$

$$\tan\gamma = \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{A}_{\mathrm{AB}}^{\mathrm{N}}} = \frac{\alpha\ \mathrm{AB}}{\omega^2\,\mathrm{AB}} = \frac{\alpha}{\omega^2} = \mathrm{cte}$$

# Aplicación al análisis de aceleraciones

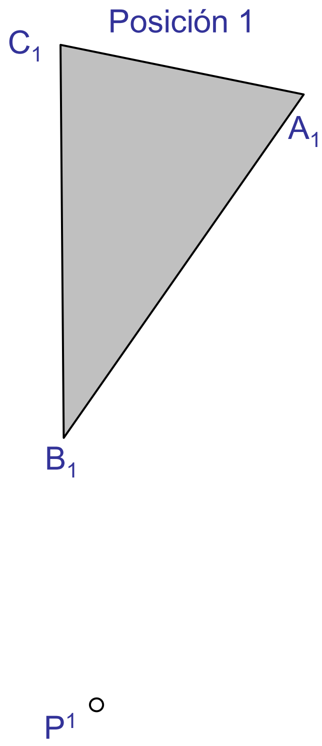



Esta propiedad permite obtener la aceleración de un punto C conocida la aceleración de A y B en el mismo elemento

# Capítulo II: Tema 1

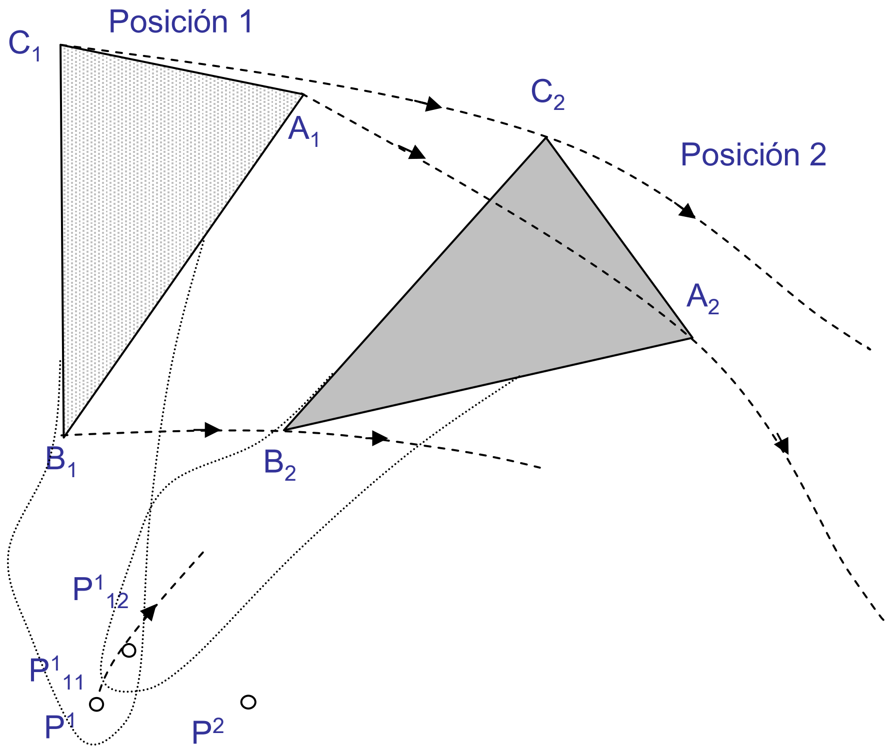
## 1.4 Base y ruleta.

# Base y ruleta

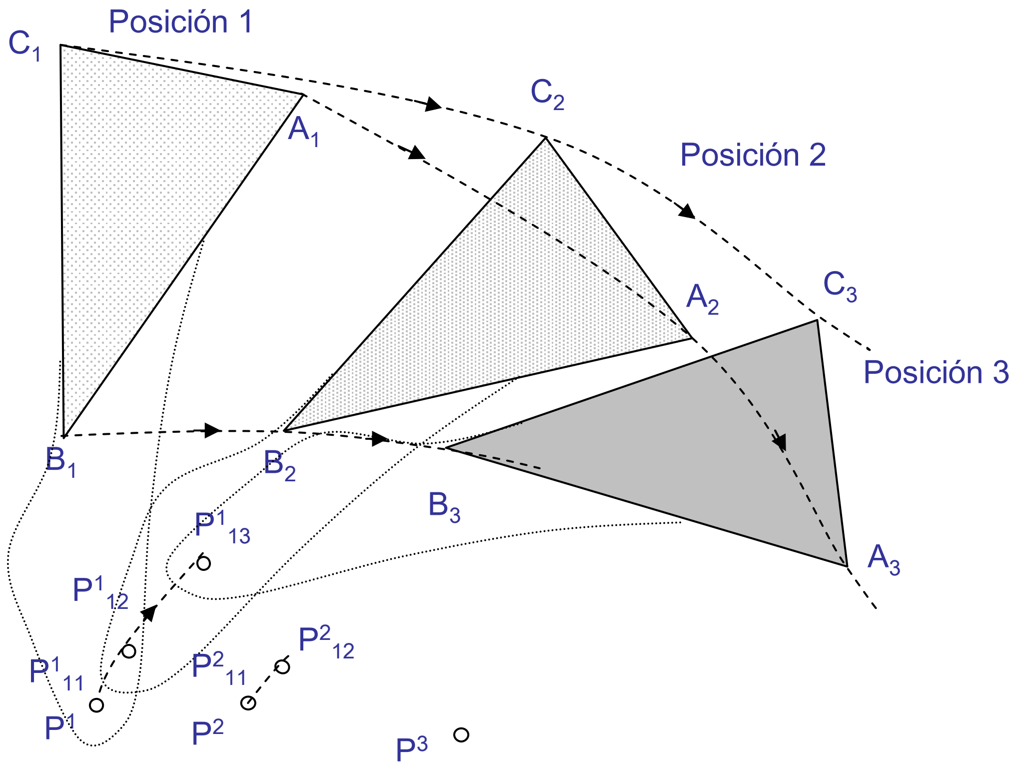



El cir, polo instantáneo o simplemente polo es, como su propio nombre indica, una característica propia de una determinada posición (o instante) de la figura móvil en el plano móvil, que podemos suponer asociado a ella. Por tanto, a medida que el movimiento de dicha figura o plano móvil evolucione, el cir también se verá modificado pasando a ocupar otra posición en los planos de movimiento.

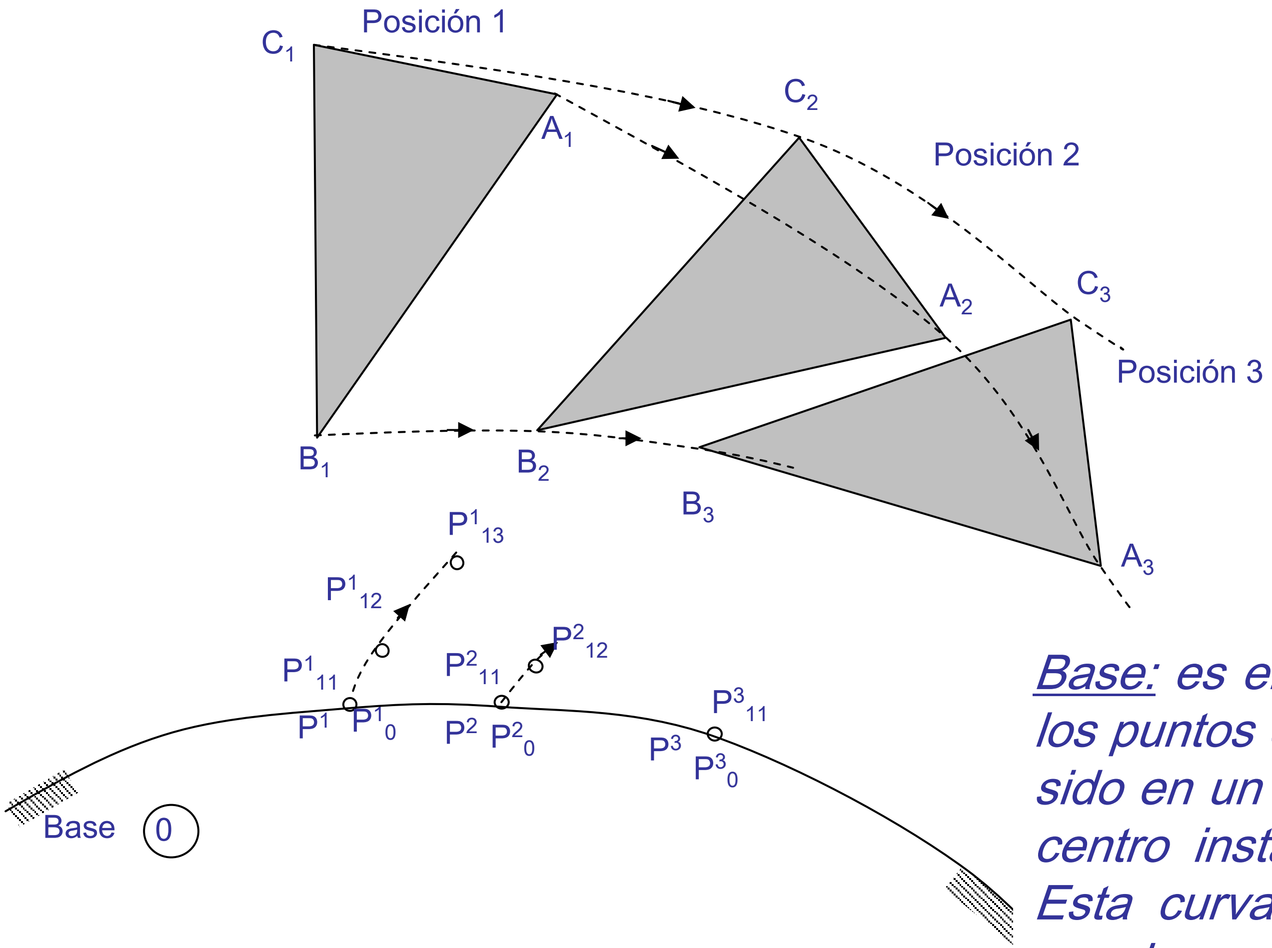
# Base y ruleta



# Base y ruleta

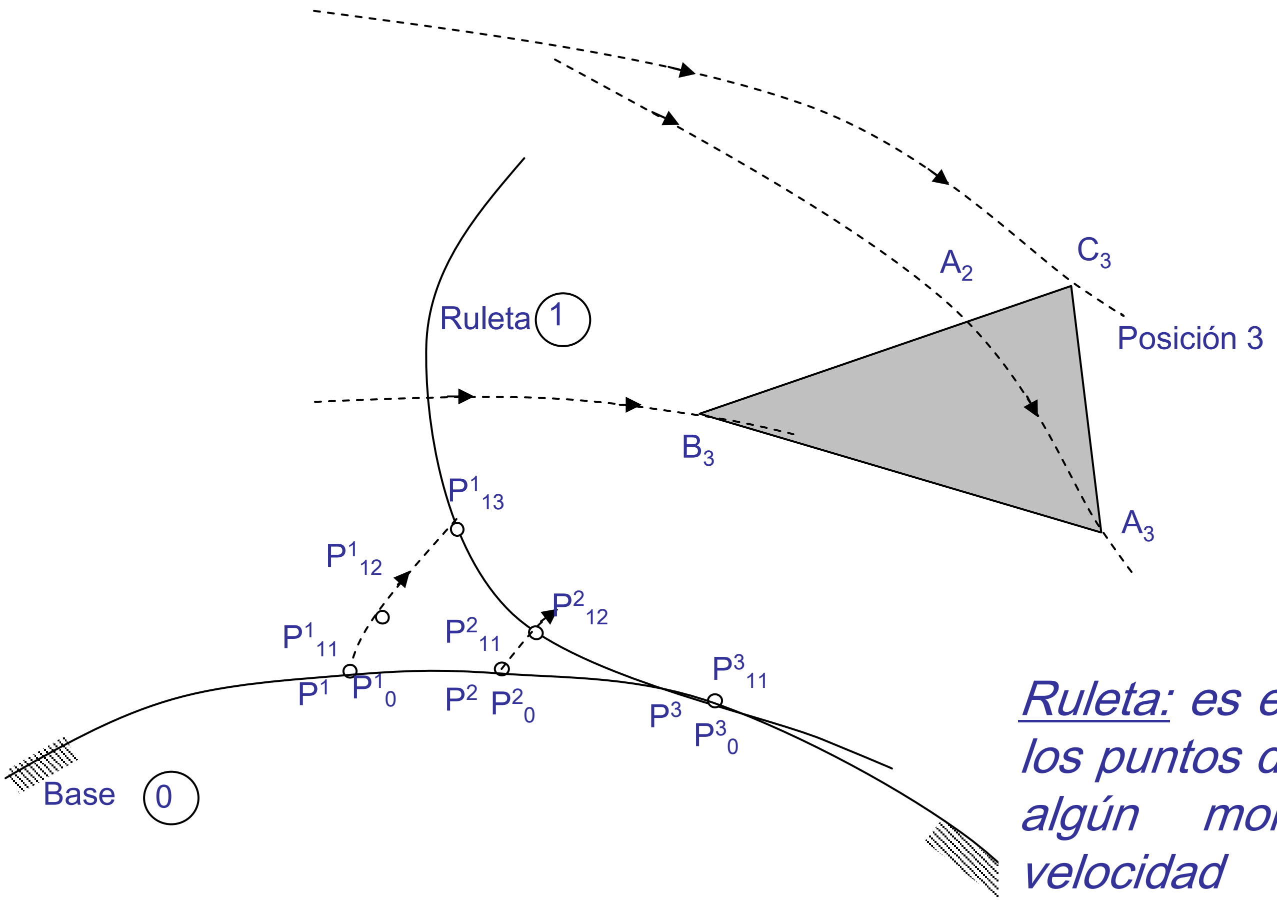


# Base y ruleta



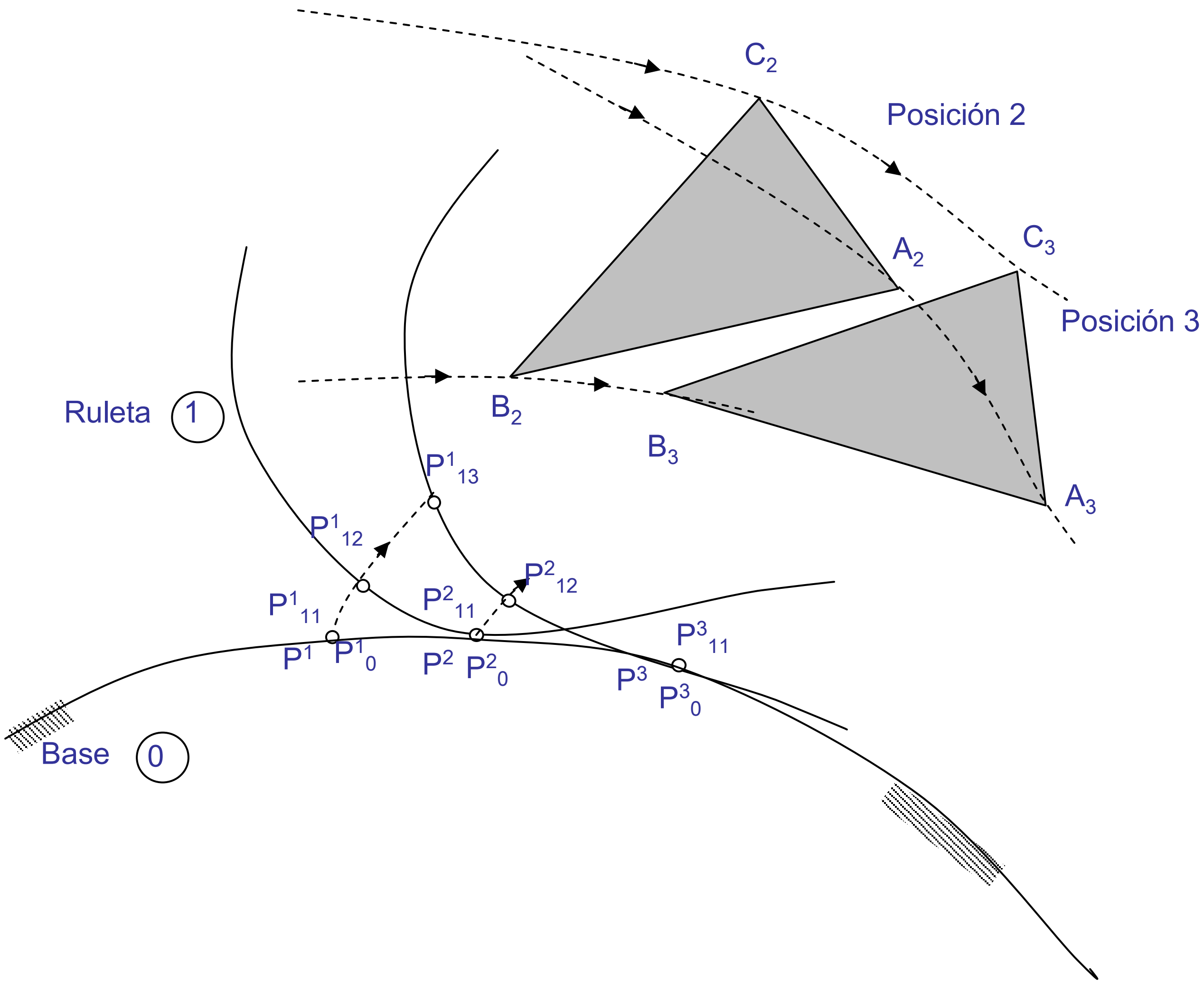

*Base: es el lugar geométrico de los puntos del plano fijo que han sido en un determinado instante centro instantáneo de rotación. Esta curva también se conoce con los nombres de Polodia o curva polar fija.*

# Base y ruleta

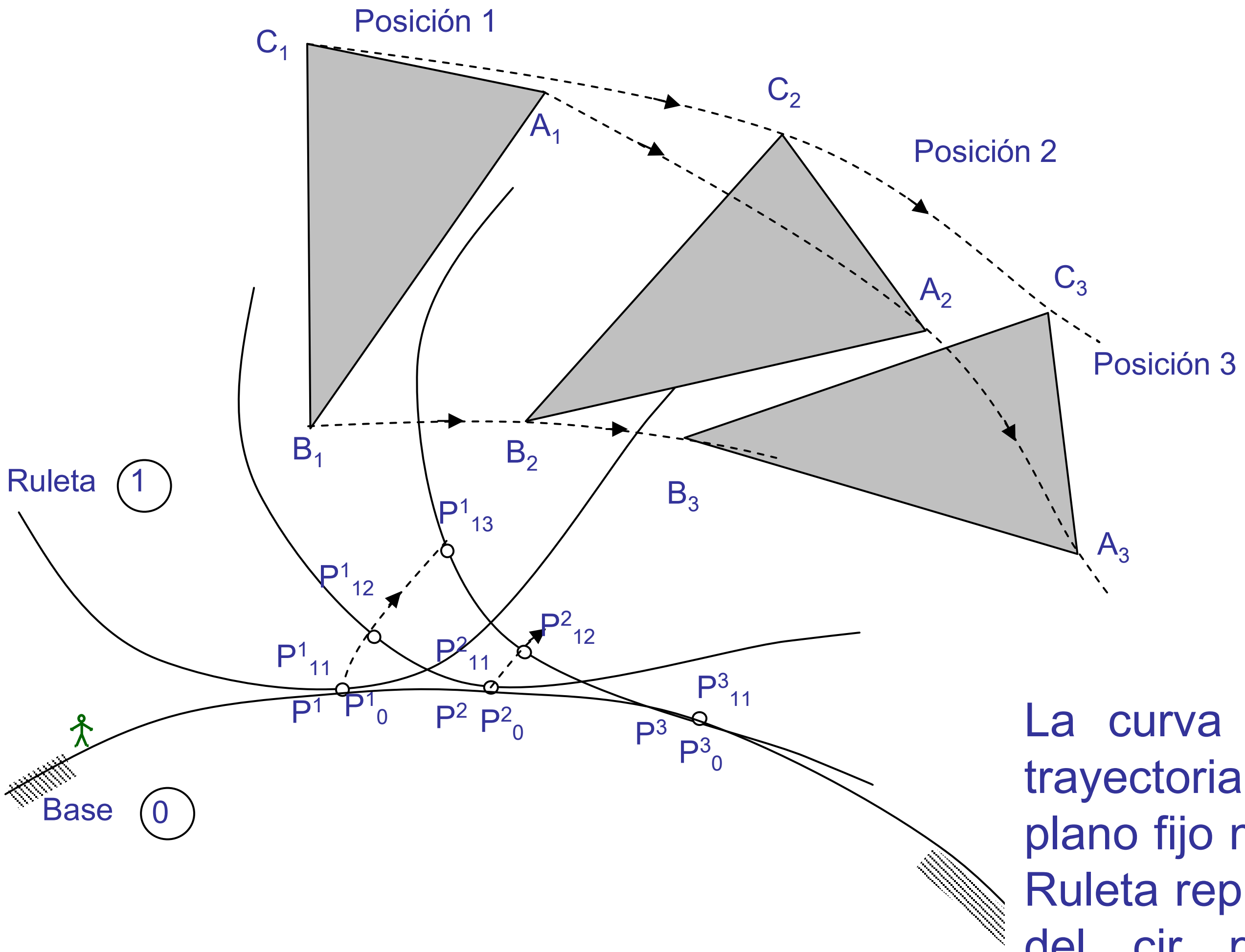



*<u>Ruleta:</u> es el lugar geométrico de los puntos del plano móvil que en algún momento han tenido velocidad nula. También se conoce con los nombres de Herpolodia o curva polar móvil.*

# Base y ruleta

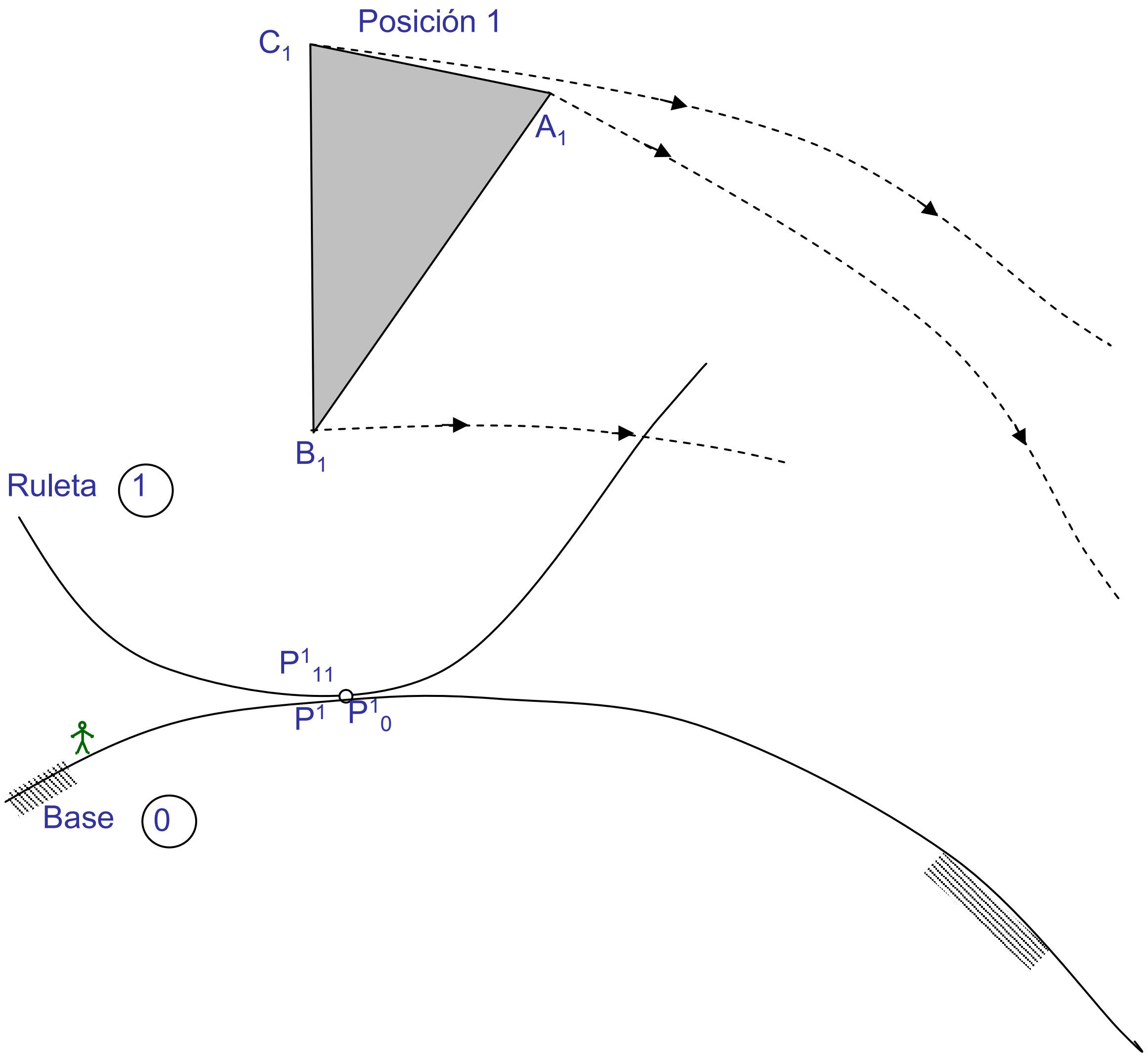


# Base y ruleta

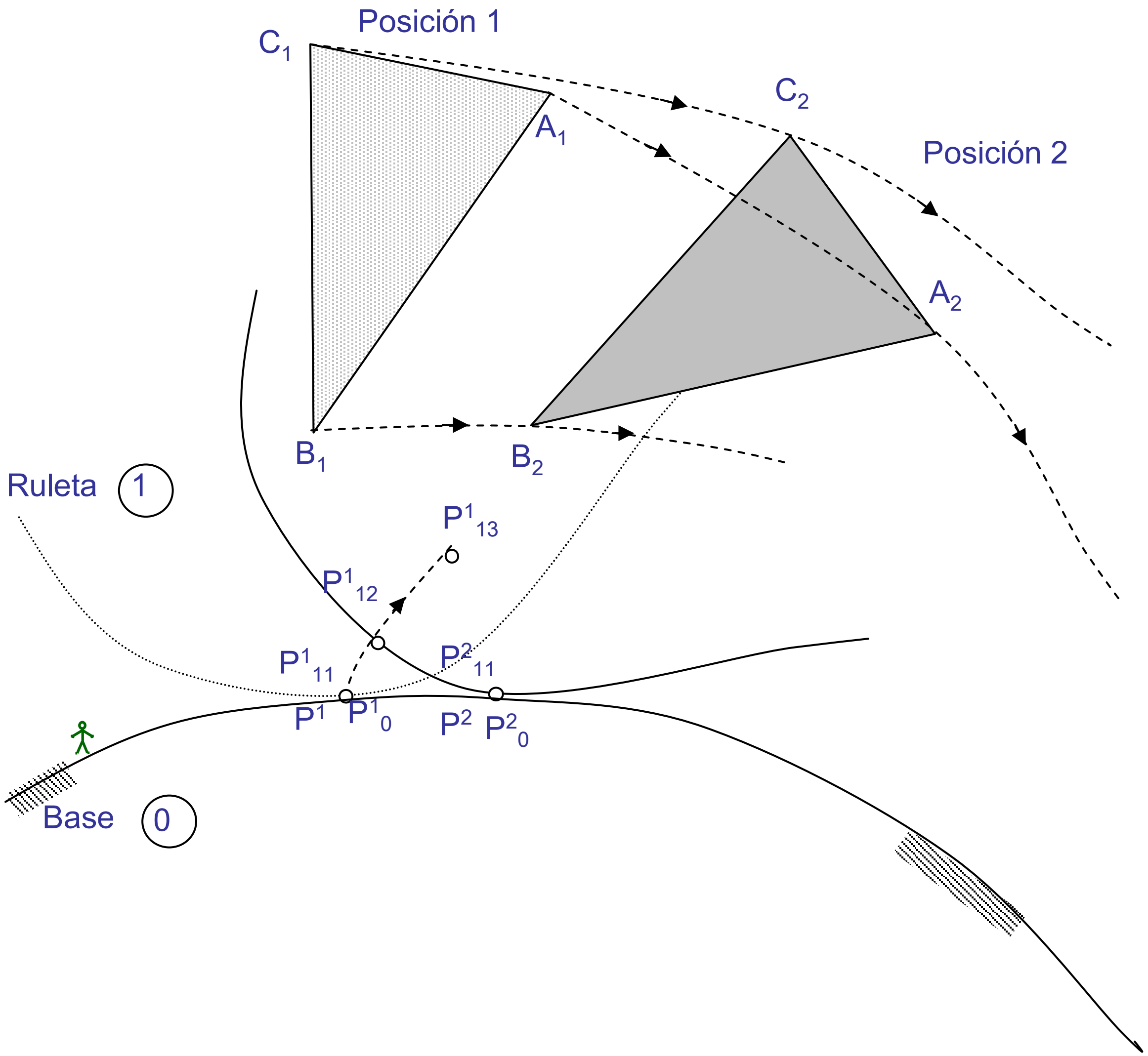



La curva Base representa la trayectoria del cir sobre el plano fijo mientras que la curva Ruleta representa la trayectoria del cir para el observador situado en el plano móvil.

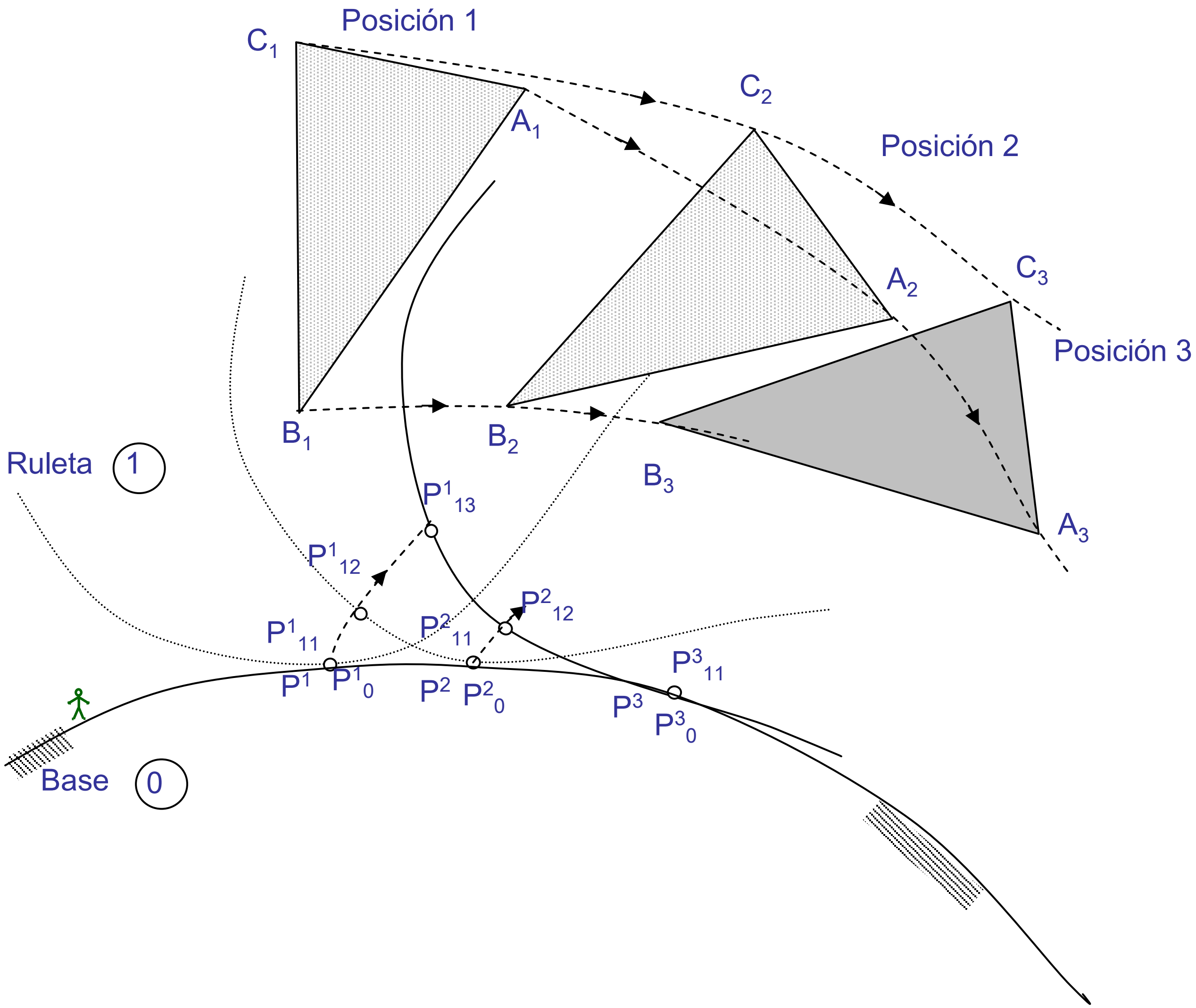
# Base y ruleta



# Base y ruleta



# Base y ruleta

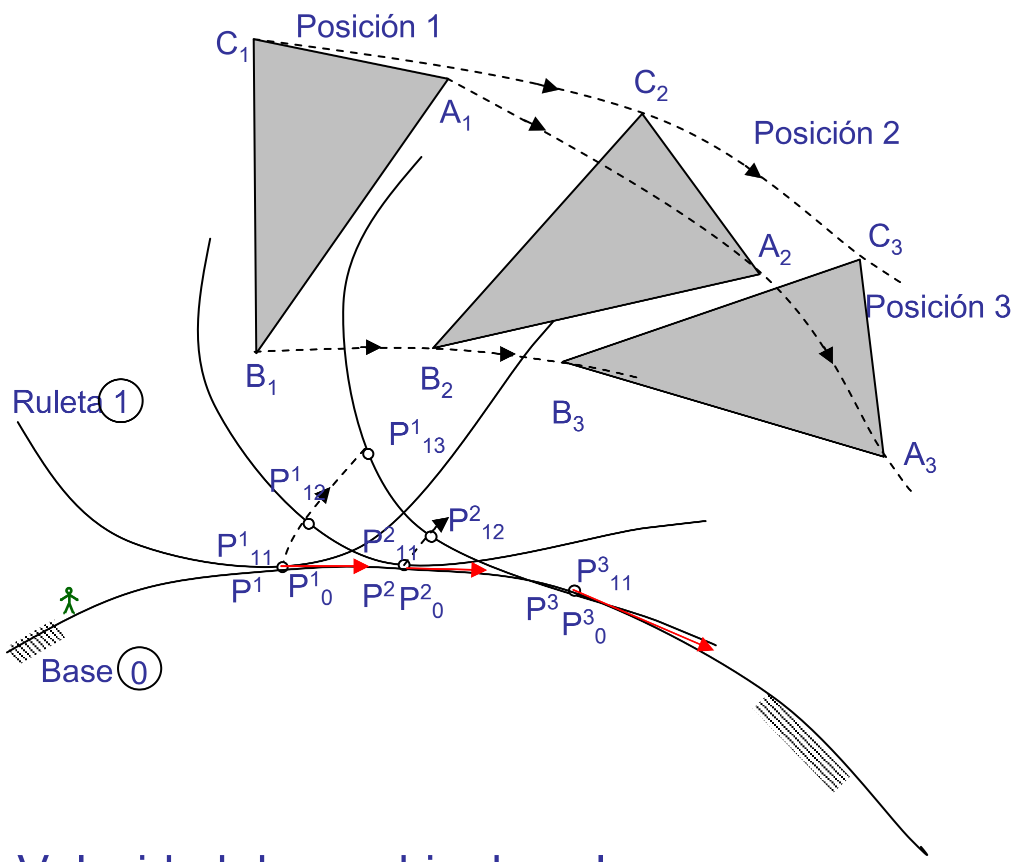


# Base y ruleta

$P_0$: Es el punto del plano fijo que coincide con el cir, es por tanto un punto físico cuya velocidad es cero.

$P_1$: Es el punto del plano móvil que coincide con el cir, es también un punto físico y su velocidad es nula ya que no varía su posición en un instante diferencial de tiempo.

P: Es un punto matemático (no es un punto físico), lo que significa que no pertenece ni al plano fijo ni al móvil. Representa la variación de posición del cir sobre el plano fijo y su trayectoria es la curva Base. Por tanto, este punto sí puede tener velocidad distinta de cero y a esta velocidad se la denomina: <u>Velocidad de Cambio de Polo</u>.




Velocidad de cambio de polo:

# Base y ruleta

De todo lo expuesto anteriormente se deduce que las curvas Base y Ruleta se encuentran en contacto permanente en el cir y no existe velocidad relativa en dicho punto de contacto. En otras palabras, el movimiento entre Base y Ruleta es un movimiento de rodadura pura. Este movimiento queda perfectamente definido si se conoce la geometría de la curva Base y Ruleta y la Velocidad de Cambio de Polo.

# Capítulo II: Tema 1

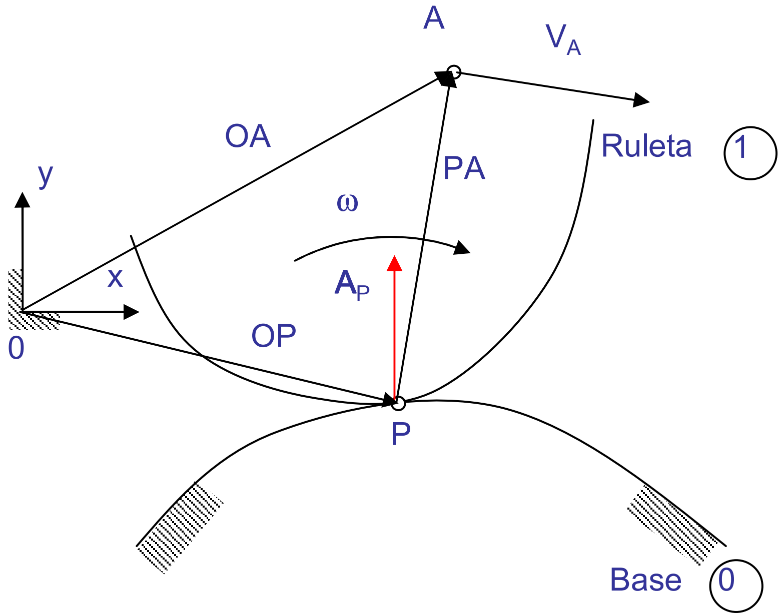
1.5 Aceleración de un punto del plano móvil que coincide con el cir.

# Aceleración de un punto del plano móvil que coincide con el cir

$$\mathbf{V}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{PA}$$

$$\mathbf{V}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{OA} - \mathbf{OP})$$

$$\mathbf{A_A} = \frac{d\mathbf{V}_A}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{PA} + \boldsymbol{\omega} \times \left( \frac{d\mathbf{OA}}{dt} - \frac{d\mathbf{OP}}{dt} \right) =$$
$$\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{PA} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_P)$$




$$\mathbf{A}_P = \boldsymbol{\alpha} \times 0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times 0 - \mathbf{V}_P) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_P$$

$$\boxed{A_P = -\omega\, \mu}$$